PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

SEPTIEMBRE – 2014

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonablemente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

OPCIÓN A

1º) Dada la función $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x+4}$, se pide:

a) Determinar el dominio de f y sus asíntotas.

b) Calcular $f'(x)$ y determinar los extremos de f(x).

c) Calcular $\int_0^1 f(x)\cdot dx$.

---

a)

$$f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x+4}=\frac{x+4+x^2+x}{(x+1)(x+4)}=\frac{x^2+2x+4}{(x+1)(x+4)}=\frac{x^2+2x+4}{x^2+5x+4}.$$

El dominio de una función racional es el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$\underline{\underline{D(f)\Rightarrow R-\{-1,\ -4\}}}.$$

Las asíntotas de la función son las siguientes:

Horizontales: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$y=k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+4}{x^2+5x+4}=\underline{\underline{1=y}}.$$

www.yoquieroaprobar.es

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador: $x_1 = -1$ y $x_2 = -4$.

Oblicuas: No tiene.

(Para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador).

b)

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(x^2+5x+4)-(x^2+2x+4)(2x+5)}{(x^2+5x+4)^2}=$$

$$=\frac{2x^3+10x^2+8x+2x^2+10x+8-(2x^3+5x^2+4x^2+10x+8x+20)}{(x+1)^2(x+4)^2}=\frac{3x^2-12}{(x+1)^2(x+4)^2}=$$

$$=\frac{3(x^2-4)}{(x+1)^2(x+4)^2}=\frac{3(x+2)(x-2)}{(x+1)^2(x+4)^2}=f'(x).$$

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo es que se anule su primera derivada.

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{3(x+2)(x-2)}{(x+1)^2(x+4)^2}=0 \;;;\; 3(x+2)(x-2)=0 \;;;\; (x+2)(x-2)=0 \Rightarrow x_1=-2,\; x_2=2.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos relativos se recurre a la segunda derivada; si es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trata de un máximo y, si es negativa de un mínimo.

$$f''(x)=\frac{6x(x^2+5x+4)^2-3(x^2-4)2(x^2+5x+4)(2x+5)}{(x^2+5x+4)^4}=\frac{6x(x^2+5x+4)-6(x^2-4)(2x+5)}{(x^2+5x+4)^3}=$$

$$=\frac{6x^3+30x^2+24x-6(2x^3+5x^2-8x-20)}{(x^2+5x+4)^3}=\frac{6x^3+30x^2+24x-12x^3-30x^2+48x+120}{(x^2+5x+4)^3}=$$

$$=\frac{-6x^3+72x+120}{(x^2+5x+4)^3}=\frac{-6(x^3-12x-20)}{(x^2+5x+4)^3}=f''(x).$$

$$f''(-2)=\frac{-6(-8+24-20)}{(4-10+4)^3}=\frac{(+)}{(-)}<0 \Rightarrow \text{Máximo relativo para x = -2.}$$

$$f(-2)=\frac{1}{-2+1}+\frac{-2}{-2+4}=-1-1=-2 \Rightarrow \textit{Máximo relativo}: A(-2,\,-2).$$

$$f''(2)=\frac{-6(8-24-20)}{(4+10+4)^3}=\frac{(+)}{(+)}>0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo para x = 2.}$$

www.yoquieroaprobar.es

$$f(2)=\frac{1}{2+1}+\frac{2}{2+4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mínimo relativo: } B\left(2,\ \frac{2}{3}\right)}}.$$

c)

$$\int_0^1 f(x)\cdot dx=\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x+4}\right)\cdot dx=\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}+\frac{x+4-4}{x+4}\right)\cdot dx=\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}+\frac{x+4}{x+4}-\frac{4}{x+4}\right)\cdot dx=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}+1-\frac{4}{x+4}\right)\cdot dx=\left[L|x+1|+x-4L|x+4|\right]_0^1=L2+1-4L5-(L1+0-4L4)=$$

$$=L2+1-4L5+4L4=1+L\frac{2\cdot 4^4}{5^4}=1+L\frac{2\cdot 256}{625}=\underline{\underline{1+L\frac{512}{625}=\int_0^1 f(x)\cdot dx}}.$$

****

www.yoquieroaprobar.es

2º) Dada las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & a & a\\ 1 & a & 1\\ a-1 & a & 2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ y $O=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, se pide:

a) Determinar el valor o valores de α para los cuales no existe la matriz inversa A^{-1}.

b) Para α = -2, hallar la matriz inversa A^{-1}.

c) Para α = 1, calcular todas las soluciones del sistema lineal A · X = O.

---

a)

Una matriz tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & a & a\\ 1 & a & 1\\ a-1 & a & 2\end{vmatrix}=2a+a^2+a(a-1)-a^2(a-1)-a-2a=a^2+a^2-a-a^3+a^2-a=$$

$$=-a^3+3a^2-2a=-a(a^2-3a+2)=0 \Rightarrow \underline{a_1=0}\ ;;\ a^2-3a+2=0\ ;;\ a=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{x_2=1},\ \underline{x_3=2}.$$

$$\underline{\underline{A\ es\ inversible\ \forall a\in R-\{0,\ 1,\ 2\}}}$$

b)

Para α = -2 es $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ -3 & -2 & 2\end{pmatrix}$. Para hallar A^{-1} se usa el método de Gauss-Jordan.

$$(A/I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -3 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{matrix}F_2\to F_2-F_1\\ F_3\to F_3+3F_1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -8 & -4 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{F_3\to-\tfrac{1}{8}F_3\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} & 0 & -\frac{1}{8}\end{array}\right)\Rightarrow\{F_2\leftrightarrow F_3\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} & 0 & -\frac{1}{8}\\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix}F_1\to F_1+2F_2\\ F_3\to\frac{1}{3}F_3\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} & 0 & -\frac{1}{8}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{matrix}F_1\to F_1+F_3\\ F_2\to F_2-\frac{1}{2}F_3\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{24} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{8}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\end{array}\right)\Rightarrow\underline{\underline{A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{12} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{5}{24} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{8}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\end{pmatrix}}}.$$

www.yoquieroaprobar.es

c)

Para α = 1 el sistema lineal A · X = O resulta $\left.\begin{matrix} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ y+2z=0 \end{matrix}\right\}$, que es equivalente al sistema $\left.\begin{matrix} x+y+z=0 \\ y+2z=0 \end{matrix}\right\}$, que es compatible (como todos los sistemas homogéneos) indeterminado.

Haciendo $\underline{z=\lambda}$, $\underline{y=-2\lambda}$, $x=-y-z=-\lambda+2\lambda=\underline{\lambda=x}$.

$$Solución: \left\{\begin{matrix} x=\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=\lambda \end{matrix}\right\},\ \forall\lambda\in R.$$

****

www.yoquieroaprobar.es

3º) Dados los puntos A(2, 0, -2), B(3, -4, -1), C(5, 4, -3) y D(0, 1, 4), se pide.

a) Calcular el área del triángulo de vértices A, B y C.

b) Calcular el volumen del tetraedro ABCD.

---

a)

Los puntos A(2, 0, -2), B(3, -4, -1) y C(5, 4, -3) determinan los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, que son los siguientes:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3,\ -4,\ -1) - (2,\ 0,\ -2) = (1,\ -4,\ 1).$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (5,\ 4,\ -3) - (2,\ 0,\ -2) = (3,\ 4,\ -1).$$

Sabiendo que el área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que lo determinan:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left| \vec{u} \wedge \vec{v} \right| = \frac{1}{2} \begin{Vmatrix} i & j & k \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{Vmatrix} = \frac{1}{2} \left| 4i + 3j + 4k + 12k - 4i + j \right| = \frac{1}{2} \left| 4j + 16k \right| = \left| 2j + 8k \right| =$$

$$= \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{4 + 64} = 2\sqrt{1 + 16} = \underline{\underline{2\sqrt{17}\ u^2 = S}}.$$

b)

Siendo $\vec{w} = \overrightarrow{AD} = D - A = (0,\ 1,\ 4) - (2,\ 0,\ -2) = (-2,\ 1,\ 6)$ y teniendo en cuenta que el volumen de un tetraedro es un sexto del producto mixto de los tres vectores que determinan sus dimensiones:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| \left[\vec{u} \cdot \left(\vec{v} \wedge \vec{w} \right) \right] \right| = \frac{1}{6} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{Vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \left| 24 + 3 - 8 + 8 + 1 + 72 \right| = \frac{1}{6} \cdot \left| 100 \right| = \underline{\underline{\frac{50}{3}\ u^3}}.$$

****

www.yoquieroaprobar.es

4º) Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x+z-1=0$, $\pi_2 \equiv x+z+2=0$ y $\pi_3 \equiv x+3y+2z-3=0$, se pide:

a) Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta r determinada por π_1 y π_2.

b) Calcular el seno del ángulo que forman la recta del apartado anterior forma con el plano π_3.

---

a)

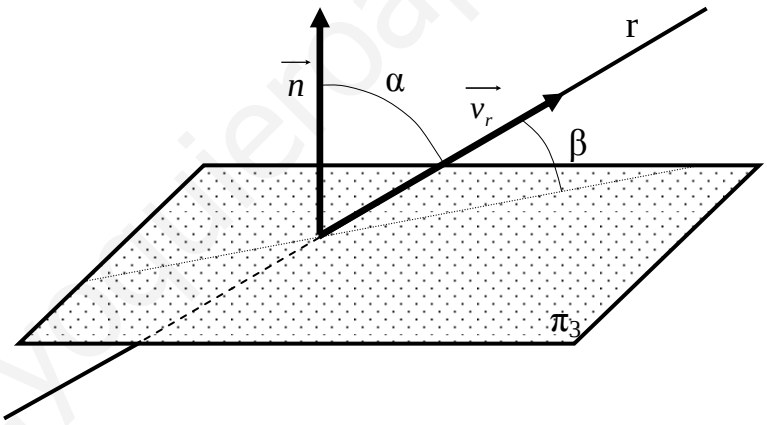
La expresión de r por unas ecuaciones implícitas es $r \equiv \begin{cases} 2x+z-1=0 \\ x+z+2=0 \end{cases}$.

Resolviendo el sistema: $\left.\begin{matrix} 2x+z=1 \\ x+z=-2 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 2x+z=1 \\ -x-z=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{x=3}\ ;;\ z=-2-x=-2-3=\underline{-5=z}$.

La recta r expresada por unas ecuaciones paramétricas es: $\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x=3 \\ y=\lambda \\ z=-5 \end{cases}}}$.

b)

Para facilitar la comprensión del ejercicio hacemos un esquema de la situación:



El ángulo de β que forman el plano π_3 y la recta r es el complementario del ángulo α que forman el vector $\vec{v_r} = (0,\ 1,\ 0)$, director de r, y el vector $\vec{n} = (1,\ 3,\ 2)$, normal al plano π_3.

Sabiendo que el ángulo que forman dos vectores se deduce del concepto de producto escalar:

$$\vec{v_r} \cdot \vec{n} = \left|\vec{v_r}\right| \cdot \left|\vec{n}\right| \cdot \cos\beta \Rightarrow \cos\beta = sen\,\alpha = \frac{\vec{v_r} \cdot \vec{n}}{\left|\vec{v_r}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|} = \frac{(0,\ 1,\ 0)\cdot(1,\ 3,\ 2)}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+3^2}} =$$

$$= \frac{0+3+0}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{1+4+9}} = \frac{3}{\sqrt{14}} = 0'8818 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 53^o\ 18'\ 3''}}.$$

****

www.yoquieroaprobar.es

OPCIÓN B

1º) Dados el plano $\pi \equiv 2x - y + 2z + 3 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$, se pide:

a) Estudiar la posición relativa de r y π.

b) Calcular la distancia entre r y π.

c) Obtener el punto P' simétrico de P(3, 2, 1) respecto del plano π.

---

a)

La expresión de r por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$r \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{1} \;;;\; r \equiv \begin{cases} x-1 = y-2 \\ x-1 = -2z+2 \end{cases} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x - y = -1 \\ x + 2z = 3 \end{cases}}.$$

La recta r y el plano π determinan el sistema $\begin{cases} x - y = -1 \\ x + 2z = 3 \\ 2x - y + 2z = -3 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

En general, según los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

Rango M = Rango M' = 3 → Secantes. (un punto en común)

Rango M = 2 ;; Rango M' = 3 → Paralelos. (ningún punto en común)

Rango M = Rango M' = 2 → Recta contenida en plano. (∞ puntos en común)

Los rangos de M y M' son los siguientes:

$$Rango\ M \Rightarrow |M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 2 + 2 = 0 \Rightarrow \underline{Rango\ M = 2}.$$

$$Rango\ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 1 - 6 + 3 - 3 = -5 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ M' = 3}.$$

www.yoquieroaprobar.es

La recta r y el plano π son paralelos.

b)

La distancia del plano π a la recta r es la distancia de cualquier punto de la recta r al plano π. Un punto de r es A(1, 2, 1).

La distancia de un punto a un plano es: $d(P,\pi)=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la fórmula al punto A(1, 2, 1) y al plano $\pi\equiv 2x-y+2z+3=0$:

$$d(r,\ \pi)=d(A,\ \pi)=\frac{|\ 2\cdot 1-1\cdot 2+2\cdot 1+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{|2-2+2+3|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{5}{\sqrt{9}}=\underline{\underline{\frac{5}{3}\ unidades}}.$$

c)

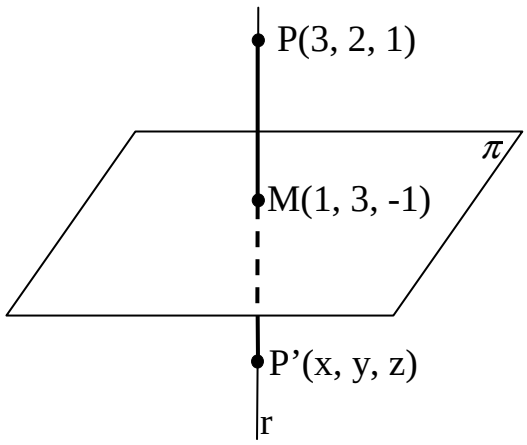
Un vector normal del plano $\pi\equiv 2x-y+2z+3=0$ es $\vec{n}=(2,\ -1,\ 2)$.

La recta s perpendicular a π y que contiene a P(3, 2, 1) es $s\equiv\begin{cases}x=3+2\mu\\ y=2-\mu\\ z=1+2\mu\end{cases}$.

El punto M, intersección del plano π con la recta s, tiene que satisfacer las ecuaciones de ambos, por lo cual:

$$\left.\begin{array}{l}\pi\equiv 2x-y+2z+3=0\\ s\equiv\begin{cases}x=3+2\mu\\ y=2-\mu\\ z=1+2\mu\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow 2(3+2\mu)-(2-\mu)+2(1+2\mu)+3=0\ ;;$$

$$6+4\mu-2+\mu+2+4\mu+3=0\ ;;\ 9\mu+9=0\ ;;\ \mu=-1\Rightarrow\begin{cases}x=3-2=1\\ y=2+1=3\\ z=1-2=-1\end{cases}\Rightarrow \underline{M(1,\ 3,\ -1)}.$$



Para que P' sea el punto simétrico de P con respecto a π, tiene que cumplirse lo siguiente: $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MP'}\Rightarrow M-P=P'-M\ ;;\ (1,\ 3,\ -1)-(3,\ 2,\ 1)=(x,\ y,\ z)-(1,\ 3,\ -1)\ ;;$

www.yoquieroaprobar.es

$$(-2,\ 1,\ -2)=(x-1,\ y-3,\ z+1)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x-1=-2\ \rightarrow\ \underline{x=-1}\\ y-3=1\ \rightarrow\ \underline{y=4}\\ z+1=-2\ \rightarrow\ \underline{z=-3}\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{P'(-1,\ 4,\ -3)}}.$$

****

www.yoquieroaprobar.es

2º) Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{5\,sen\,x}{2x}+\dfrac{1}{2} & si\ \ x<0\\ a & si\ \ x=0\\ x\cdot e^{x}+3 & si\ \ x>0\end{cases}$, se pide:

a) Hallar, si existe, el valor de α para que f(x) sea continua.

b) Decidir si la función es derivable en x = 0 para algún valor de α.

c) Calcular la integral $I=\int_{1}^{L5} f(x)\cdot dx$, donde L denota logaritmo neperiano.

---

a)

Por tratarse de una función definida en tres trozos, cada uno de los cuales es una función continua en su dominio, la función dada es continua en todo R, excepto para el valor de x = 0, que debemos determinar el valor de α para que lo sea

Para que f(x) sea continua en x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5\,sen\,x}{2x}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}=\underline{3}\ \ (*)\\ \lim\limits_{x\to 0^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot e^{x}+3\right)=\underline{3}\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 0^{-}} f(x)=f(a)=\lim_{x\to 0^{+}} f(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3=\underline{a=3}\Rightarrow \underline{\text{La función f(x) es continua en x = 0 para } \alpha = 3}.$$

$$(*)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{5\,sen\,x}{2x}+\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{5\,sen\,x}{2x}+\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}=\frac{6}{2}=\underline{3}.$$

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{x\cdot\cos x+sen\,x}{x^{2}} & si\ \ x<0\\ 0 & si\ \ x=0\\ e^{x}(x+1) & si\ \ x>0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad f'(0)=\begin{cases}\infty\ \ si\ \ x<0\ \ (**)\\ 1\ \ si\ \ x>0\end{cases}\Rightarrow \underline{f'(0^{-})\neq f'(0^{+})}.$$

$$(**)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{x\cdot\cos x+sen\,x}{x^{2}}\right)=\frac{5}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x+sen\,x}{x^{2}}=\frac{5}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{0\cdot 1+0}{0}=\frac{5}{2}\cdot\frac{0}{0}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow In\det.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\ \frac{5}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\,sen\,x+\cos x}{2x}=\frac{5}{2}\cdot\frac{1-0+1}{0}=\frac{5}{2}\cdot\infty=\underline{\infty}.$$

www.yoquieroaprobar.es

La función f(x) no es derivable para x = 0 para cualquier valor real de α.

c)

En el intervalo $[1,\ L5]$ la función resulta ser $f(x)=x\cdot e^x+3$, por lo cual, la integral definida pedida es la que se indica a continuación.

$$I=\int_1^{L5} f(x)\ dx=\int_1^{L5}\left(x\cdot e^x+3\right)\cdot dx=\int_1^{L5} x\cdot e^x\cdot dx+\int_1^{L5} 3\cdot dx=A+3\int_1^{L5} dx=A+3\cdot[x]_1^{L5}=$$

$$=\underline{A+3(L5-1)=I}\,.\qquad (*)$$

Para determinar el valor de A calculamos la integral indefinida $\int x\cdot e^x\cdot dx$.

$$\int x\cdot e^x\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{matrix}u=x\rightarrow du=dx\\ dv=e^x\cdot dx\rightarrow v=e^x\end{matrix}\right\}\Rightarrow x\cdot e^x-\int e^x\cdot dx=x\cdot e^x-e^x+C=\underline{e^x(x-1)+C}\,.$$

$$A=\int_1^{L5} x\cdot e^x\cdot dx=\left[e^x(x-1)\right]_1^{L5}=e^{L5}(L5-1)-e^1(1-1)=\underline{5(L5-1)}.$$

Sustituyendo el valor de A en la expresión (*):

$$I=5(L5-1)+3(L5-1)=\overline{8(L5-1)}.$$

$$\underline{\underline{I=\int_1^{L5} f(x)\cdot dx=8(L5-1).}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

3º) Dala la ecuación matricial: $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, donde B es una matriz cuadrada de tamaño 2 x 2, se pide:

a) Calcular el valor o valores de α para los que esta ecuación tiene solución.

b) Calcular el valor de B en el caso de α = 1.

---

a)

La ecuación matricial $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ tendrá solución cuando la matriz $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ sea inversible, es decir: cuando su determinante sea distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7a - 6 = 0 \;;;\; 7a = 6 \;;;\; \underline{a = \frac{6}{7}}.$$

La ecuación matricial tiene solución $\forall \alpha \in R - \left\{\frac{6}{7}\right\}$.

b)

Para α = 1 es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Llamando $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, la ecuación resulta: $M \cdot B = N$. Multiplicando por la izquierda los dos miembros por la inversa de M:

$$M^{-1} \cdot M \cdot B = M^{-1} \cdot N \;;; I \cdot B = M^{-1} \cdot N \Rightarrow \underline{B = M^{-1} \cdot N}. \quad (*)$$

Se calcula ahora la matriz inversa de M por el método de Gauss-Jordan:

$$(M/I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - 3F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 - 2F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{M^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Sustituyendo el valor de M^{-1} en la expresión (*) y operando:

$$B = M^{-1} \cdot N = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-2 & 7-2 \\ -3+1 & -3+1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = B}}.$$

****

www.yoquieroaprobar.es

4º) Estudiar el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -3 & 5\\ 2 & 2 & -1 & a\\ 1 & 1 & 1 & 6\\ 3 & 1 & -4 & a\end{pmatrix}$ según los valores del parámetro α.

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -1 & -3 & 5\\ 2 & 2 & -1 & a\\ 1 & 1 & 1 & 6\\ 3 & 1 & -4 & a\end{vmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}F_2\to F_2+2F_1\\ F_3\to F_3+F_1\\ F_4\to F_4+F_1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{vmatrix}2 & -1 & -3 & 5\\ 6 & 0 & -7 & a+10\\ 3 & 0 & -2 & 11\\ 5 & 0 & -7 & a+5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6 & -7 & a+10\\ 3 & -2 & 11+0\\ 5 & -7 & a+5\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}6 & -7 & a\\ 3 & -2 & 11\\ 5 & -7 & a\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}6 & -7 & 10\\ 3 & -2 & 0\\ 5 & -7 & 5\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}6 & 7 & a\\ 3 & 2 & 11\\ 5 & 7 & a\end{vmatrix}-5\cdot\begin{vmatrix}6 & 7 & 2\\ 3 & 2 & 0\\ 5 & 7 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=-(12a+21a+385-10a-462-21a)-5\cdot(12+42-20-21)=-2a+77-5\cdot13=-2a+77-65=$$

$$=-2a+12=-2(a-6)=0\ ;;\ a-6=0\ ;;\ \underline{a=6}.$$

Siendo el menor de A, $\begin{vmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -4\end{vmatrix}=-8-1+6+3-2+8=6\neq0$:

<u>Para α ≠ 6 el rango de A es 4 y para α = 6 el rango de A es 3</u>.

****

www.yoquieroaprobar.es