PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE MADRID

JULIO – 2019

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

OPCIÓN A

1º) Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} kx+(k+1)x+z=0 \\ -x+ky-z=0 \\ (k-1)x-y=-(k+1) \end{cases}$, se pide:

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro real k.

b) Resolver el sistema para $k=-1$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} k & k+1 & 1 \\ -1 & k & -1 \\ k-1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} k & k+1 & 1 & 0 \\ -1 & k & -1 & 0 \\ k-1 & -1 & 0 & -k-1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro k es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} k & k+1 & 1 \\ -1 & k & -1 \\ k-1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=1-(k+1)(k-1)-k(k-1)-k=0;$$

$1-(k^2-1)-k^2+k-k=0;\ \ 1-k^2+1-k^2=0;\ \ 2-2k^2=0;\ \ 1-k^2=0;$

$k^2=1 \Rightarrow k_1=-1, k_2=1.$

$$\underline{Para\ \left\{\begin{matrix} k=-1 \\ k=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ k=-1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' = 2$$

$$\underline{Para\ k=-1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$$Para\ k=1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1-2 = -3 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ k=1 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$b)$

Para $k=-1$ el sistema resulta $\left.\begin{matrix} -x+z=0 \\ -x-y-z=0 \\ -2x-y=0 \end{matrix}\right\}$, que es homogéneo y equivalente al sistema $\left.\begin{matrix} x-z=0 \\ x+y+z=0 \\ 2x+y=0 \end{matrix}\right\}$, cuya matriz de coeficientes tiene rango 2, según se ha visto en el apartado anterior.

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema tiene infinitas soluciones. Para resolverlo se hace, por ejemplo, $x=\lambda$, con lo cual, $z=\lambda\ e\ y=-2\lambda$.

$$\underline{Solución: x=\lambda,\ y=-2\lambda,\ z=\lambda,\ \forall\lambda \in R.}$$

****

2º) a) Sean f y g dos funciones derivables de las que se conocen los siguientes datos: $f(1) = 1$; $f'(1) = 2$; $g(1) = 3$; $g'(1) = 4$. Dada $h(x) = f[(x+1)^2]$, usa la regla de la cadena para calcular $h'(0)$. Dada $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, calcula $k'(1)$.

b) Calcula la integral $I = \int (sen\, x)^4 \cdot (\cos x)^3 \cdot dx$.

----

a)

$$h'(x) = [2 \cdot (x+1) \cdot 1] \cdot f'[(x+1)^2] = 2 \cdot (x+1) \cdot f'[(x+1)^2].$$

$$h'(0) = 2 \cdot (0+1) \cdot f'[(0+1)^2] = 2 \cdot f'(1) = 2 \cdot 2 = 4.$$

$$\underline{h'(0) = 4}.$$

$$k'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \Rightarrow k'(1) = \frac{f'(1) \cdot g(1) - f(1) \cdot g'(1)}{[g(1)]^2} = \frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 4}{3^2} = \frac{6-4}{9} = \frac{2}{9}.$$

$$\underline{k'(1) = \frac{2}{9}}.$$

b)

$$I = \int (sen\, x)^4 \cdot (\cos x)^3 \cdot dx$$

Conviene recordar que las integrales de este tipo se solucionan con los cambios que se indican, según que los exponentes de $sen\, x$ y $\cos x$ sean pares o impares:

Si el exponente del $sen\, x$ es impar $\Rightarrow$ $\cos x = t$.
Si el exponente del $cos\, x$ es impar $\Rightarrow$ $\operatorname{sen} x = t$.
Si ambos exponentes son pares $\Rightarrow$ $\operatorname{tag} x = t$.

$$I = \int (sen\, x)^4 \cdot (\cos x)^3 \cdot dx = \int (sen\, x)^4 \cdot (\cos x)^2 \cdot \cos x \cdot dx =$$

$$= \int (sen\, x)^4 \cdot (1 - sen^2\, x) \cdot \cos x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} sen\, x = t \\ \cos x \cdot dx = dt \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$= \int t^4 \cdot (1 - t^2) \cdot dt = \int (t^4 - t^6) \cdot dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = \frac{t^5}{35} \cdot (7 - 5t^2) + C.$$

$$\underline{I = \int (sen\, x)^4 \cdot (\cos x)^3 \cdot dx = \frac{1}{35} \cdot sen^5\, x \cdot (7 - 5 \cdot sen^2\, x) + C.}$$

****

3º) Dados los puntos $A(1,1,1), B(1,3,-3)$ y $C(-3,-1,1)$, se pide:

$a)$ Determinar la ecuación del plano π que contiene a los tres puntos.

$b)$ Obtener un punto D (distinto de A, B y C) tal que los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ sean linealmente dependientes.

$c)$ Encontrar un punto P del eje OX, de modo que el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P sea igual a 1.

$a)$

Los puntos A, B y C determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(1,3,-3) - (1,1,1)] = (0,2,-4).$

$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(-3,-1,1) - (1,1,1)] = (-4,-2,0).$

La ecuación general del plano π que determinan tiene la siguiente expresión general:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 2 & -4 \\ -4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$16(y-1) + 8(z-1) - 8(x-1) = 0;\ \ 2(y-1) + (z-1) - (x-1) = 0;$

$2y - 2 + z - 1 - x + 1 = 0;\ -x + 2y + z - 2 = 0.$

$$\underline{\pi \equiv x - 2y - z + 2 = 0}.$$

$b)$

El punto D pedido tiene que ser coplanario con los puntos A, B y C, por lo cual tiene que satisfacer la ecuación del plano que los contiene, por lo cual y por ejemplo, haciendo $x = y = 0 \Rightarrow -z + 2 = 0 \Rightarrow z = 2.$

$$\underline{D(0,0,2)}.$$

$c)$

El punto P, por pertenecer al eje OX, es de la forma $P(x,0,0)$.

$\overrightarrow{AP} = [P - A] = [(x,0,0) - (1,1,1)] = (x-1,-1,-1).$

El volumen de un tetraedro es un sexto del producto mixto de los tres vectores que lo determinan:

$$V_{ABCP} = \frac{1}{6} \cdot \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}\right] = 1 \Rightarrow \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{matrix} 0 & 2 & -4 \\ -4 & -2 & 0 \\ x-1 & -1 & -1 \end{matrix} \right\| = 1;$$

$$\left\| \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -4 & -2 & 0 \\ x-1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \right\| = 6; \;\; |-16 - 8(x-1) - 8| = 6; \;\; |-24 - 8x + 8| = 6;$$

$$|-8x - 16| = 6; \;\; |-4x - 8| = 3 \Rightarrow \begin{cases} -4x - 8 = 3 \to 4x = -11 \to x_1 = -\frac{11}{4} \\ 4x + 8 = 3 \to 4x = -5 \to x_2 = -\frac{5}{4} \end{cases}.$$

Existen dos puntos que cumplen la condición pedida:

$$\underline{P_1\left(-\frac{11}{4}, 0, 0\right) \; y \; P_2\left(-\frac{5}{4}, 0, 0\right).}$$

****

4º) Una empresa ha llevado a cabo un proceso de selección de personal.

a) Se sabe que el 40 % del total de aspirantes han sido seleccionados en el proceso. Si entre los aspirantes había un grupo de 8 amigos, calcula la probabilidad de que el menos 2 de ellos hayan sido seleccionados.

b) Las puntuaciones obtenidas por los aspirantes en el proceso de selección siguen una distribución normal, X, de media 5,6 y desviación típica σ. Sabiendo que la probabilidad de obtener una puntuación $X \leq 8{,}2$ es 0,67, calcula σ.

----

a)

Se trata de una distribución binomial de los siguientes datos:

$Datos$: $n = 8$; $p = 0{,}4$; $q = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

La fórmula de la probabilidad de que de n elementos r sean favorables es la siguiente: $P = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$.

El suceso contrario a “que al menos 2 de ellos hayan sido seleccionados” es que “sean seleccionados menos de dos de ellos”, por lo cual, la probabilidad pedida es la siguiente:

$$P = 1 - [P(0) + P(1)] = 1 - \left[\binom{8}{0} \cdot 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^8 + \binom{8}{1} \cdot 0{,}4^1 \cdot 0{,}6^7\right] =$$

$$= 1 - [1 \cdot 1 \cdot 0{,}0168 + 8 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}0280] = 1 - (0{,}0168 + 0{,}0896) =$$

$$= 1 - 0{,}1064 = \underline{0{,}8936}.$$

b)

$p(\overline{X} \leq 8{,}2) = 0{,}67 \Rightarrow$ Mirando en el interior de la tabla dada de las áreas limitadas por la curva $N(0,1)$, con el valor de 0,67 se obtiene 0,44.

$$\frac{8{,}2-5{,}6}{\sigma} = 0{,}44; \ \frac{2{,}6}{\sigma} = 0{,}44 \Rightarrow \sigma = \frac{2{,}6}{0{,}44} = 5{,}91.$$

$$\underline{\sigma = 5{,}91}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular para qué valores de $a \in R$ se verifica $A^2 - I = 2A$.

b) Calcular los números reales para los que la matriz A admite inversa y calcularla, cuando sea posible, en función del parámetro a.

c) Calcular, en función de a, el determinante de la matriz $(A \cdot A^t)^2$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

----

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-2a+a^2+1 & 1-a+1+a \\ 1-a+1+a & 1+1+2a+a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-2a+2 & 2 \\ 2 & a^2+2a+2 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 - I = 2A \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2-2a+2 & 2 \\ 2 & a^2+2a+2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2A;$$

$$\begin{pmatrix} a^2-2a+1 & 2 \\ 2 & a^2+2a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2a & 2 \\ 2 & 2+2a \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{matrix} a^2-2a+1 = 2-2a \\ a^2+2a+1 = 2+2a \end{matrix} \right\};$$

$$\left. \begin{matrix} a^2-1=0 \\ a^2-1=0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow a^2-1=0 \Rightarrow a_1 = -1, a_2 = 1.$$

$$\underline{\mathit{Para\ a = -1\ y\ para\ a = 1\ se\ cumple\ que\ A^2 - I = 2A.}}$$

b)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{vmatrix} = 1 - a^2 - 1 = 0;\ -a^2 = 0 \Rightarrow a = 0.$$

$$\underline{\mathit{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall a \in R - \{0\}.}}$$

La inversa de A se obtiene por el método de Gauss-Jordan.

$$(A/I) = \left(\begin{matrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 1+a \\ 1-a & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_2 \to F_2 + (a-1)F_1\} \Rightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 1+a \\ 0 & a^2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & a-1 \end{matrix}\right) \Rightarrow \left\{F_2 \to \frac{1}{a^2}F_2\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1+a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{a-1}{a^2} \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 + (-a-1)F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1+a & \frac{-a-1}{a^2} & \frac{1}{a^2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{a-1}{a^2} \end{array}\right).$$

$$\underline{A^{-1} = \frac{1}{a^2} \cdot \begin{pmatrix} -a-1 & 1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix}}.$$

$c)$

$$|A| = \begin{vmatrix} -a-1 & 1 \\ 1 & a-1 \end{vmatrix} = -(a^2-1) - 1 = -a^2 + 1 - 1 = -a^2.$$

Teniendo en cuenta que $A^t = A$:

$$|(A \cdot A^t)^2| = |(A \cdot A)^2| = |(A^2)^2| = |A^4| = (|A|)^4 = (-a^2)^4 = a^8.$$

$$\underline{|(A \cdot A^t)^2| = a^8}.$$

****

2º) Un brote de una enfermedad se propaga a lo largo de unos días. El número de enfermos t días después de iniciarse el brote viene dado por la función $F(t)$ tal que $F'(t) = t^2(10 - t)$.

a) Sabiendo que inicialmente había 6 personas afectadas, calcula la función $F(t)$.

b) Calcula cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el número máximo de enfermos y cuál es ese número.

c) Calcule, usando el teorema de Bolzano, cuantos días dura el brote.

----

a)

$$F(t) = \int F'(t) \cdot dt = \int t^2(10 - t) \cdot dt = \frac{10t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + C.$$

$$F(0) = 6 \Rightarrow \frac{10 \cdot 0}{3} - \frac{0}{4} + C = 6 \Rightarrow C = 6.$$

$$\underline{F(t) = \frac{10t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + 6.}$$

b)

Una función tiene un máximo relativo cuando se anula su primera derivada y es negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$F'(t) = 0 \Rightarrow t^2(10 - t) = 0 \Rightarrow t_1 = 0, t_2 = 10.$$

La solución para después de iniciarse el brote es $t = 10$.

$$F''(t) = 2t \cdot (10 - t) + t^2(-1) = 20t - 2t^2 - t^2 = 20t - 3t^2.$$

$$F''(10) = 20 \cdot 10 - 3 \cdot 10^2 = 200 - 300 < 0 \Rightarrow Máx.\ para\ t = 10.$$

$$F(10) = \frac{10 \cdot 10^3}{3} - \frac{10^4}{4} + 6 = \frac{40.000 - 30.000 + 72}{12} = \frac{10.072}{12} = 839{,}33.$$

$$\underline{El\ máximo\ de\ enfermos\ se\ produce\ a\ los\ 10\ días\ con\ 839.}$$

c)

El teorema de Bolzano dice que “si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$”.

La función $F(x)$ es continua por ser polinómica, por lo cual, le es aplicable el teorema de Bolzano. Se trata de buscar valores donde la función tome valores negativos. Se hace por tanteo:

Por ejemplo: $F(20)=\frac{10\cdot 20^3}{3}-\frac{20^4}{4}+6=\frac{80.000-160.000+72}{12}<0.$

$F(15)=\frac{10\cdot 15^3}{3}-\frac{15^4}{4}+6=\frac{135.000-151.875+72}{12}<0.$

$F(12)=\frac{10\cdot 12^3}{3}-\frac{12^4}{4}+6=\frac{69.120-62.208+72}{12}>0.$

$F(13)=\frac{10\cdot 13^3}{3}-\frac{13^4}{4}+6=\frac{87.880-85.683+72}{12}>0.$

$F(14)=\frac{10\cdot 14^3}{3}-\frac{14^4}{4}+6=\frac{109.760-115.248+72}{12}<0.$

El día 14 el número de enfermos es “negativo”, por lo cual:

$$\underline{El\ brote\ de\ la\ enfermedad\ dura\ 13\ días}.$$

****

3º) Dado el plano $\pi \equiv 2x + 3y - z = 4$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ y la recta $s \equiv (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 0, 1)$, con $\lambda \in R$, se pide:

a) Calcular el punto simétrico de $P(1, 2, 3)$ respecto de π.

b) Hallar la ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto de intersección de las rectas r y s.

c) Calcular el ángulo que forman entre si las rectas r y s.

----

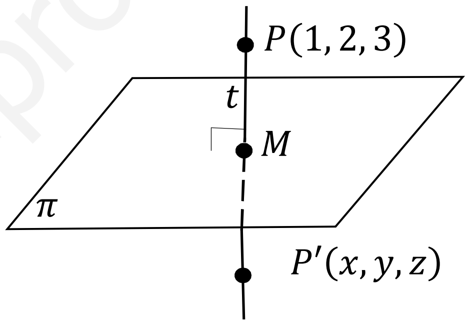
a)

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (2, 3, -1)$.

La recta t, perpendicular a π que contiene a $P(1, 2, 3)$ es $t \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$.

El punto M, intersección del plano π con la recta t es el siguiente:

$$\left. \begin{array}{r} \pi \equiv 2x + 3y - z - 4 = 0 \\ t \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow$$



$\Rightarrow 2(1 + 2\lambda) + 3(2 + 3\lambda) - (3 - \lambda) - 4 = 0;$

$2 + 4\lambda + 6 + 9\lambda - 3 + \lambda - 4 = 0;$

$$14\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{14} \Rightarrow M \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - \frac{2}{14} = \frac{12}{14} \\ y = 2 - \frac{3}{14} = \frac{25}{14} \\ z = 3 + \frac{1}{14} = \frac{43}{14} \end{array} \right\} \Rightarrow M\left(\frac{12}{14}, \frac{25}{14}, \frac{43}{14}\right).$$

Tiene que cumplirse que $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MP'}$.

$$\overrightarrow{PM} = [M - P] = \left[\left(\frac{12}{14}, \frac{25}{14}, \frac{43}{14}\right) - (1, 2, 3)\right] = \left(-\frac{2}{14}, -\frac{3}{14}, \frac{1}{14}\right).$$

$$\overrightarrow{MP'} = [P' - M] = \left[(x, y, z) - \left(\frac{12}{14}, \frac{25}{14}, \frac{43}{14}\right)\right] = \left(x - \frac{12}{14}, y - \frac{25}{14}, z - \frac{43}{14}\right).$$

$$\left(-\frac{2}{14}, -\frac{3}{14}, \frac{1}{14}\right) = \left(x - \frac{12}{14}, y - \frac{25}{14}, z - \frac{43}{14}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - \frac{12}{14} = -\frac{2}{14} \to x = \frac{5}{7} \\ y - \frac{25}{14} = -\frac{3}{14} \to y = \frac{11}{7} \\ z - \frac{43}{14} = \frac{1}{14} \to z = \frac{22}{7} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{P'\left(\frac{5}{7}, \frac{11}{7}, \frac{22}{7}\right)}.$$

$b)$

La expresión de las rectas $r\ y\ s$ por ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases} \Rightarrow x=\mu \Rightarrow \left. \begin{matrix} y-z=-\mu \\ y+z=-\mu \end{matrix} \right\} \Rightarrow 2y=-2\mu;\ y=-\mu;\ z=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\mu \\ y=-\mu. \\ z=0 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2 \\ z=3+\lambda \end{cases}.$$

El punto de intersección de $r\ y\ s$ es el siguiente: $\left\{ \begin{matrix} \mu=-2 \\ \lambda=-3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow N(-2,2,0)$.

La recta h pedida tiene como vector director a $\overrightarrow{v_h}=\vec{n}=(2,3,-1)$.

$$\underline{h \equiv \begin{cases} x=-2+2\gamma \\ y=2+3\gamma \\ z=-\gamma \end{cases}}$$

$c)$

El ángulo que forman las rectas $r\ y\ s$ es el mismo que forman sus vectores directores. Siendo $\overrightarrow{v_r}=(1,-1,0)\ y\ \overrightarrow{v_s}=(1,0,1)$ y por la definición de producto escalar de dos vectores:

$$\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}=|\overrightarrow{v_r}|\cdot|\overrightarrow{v_s}|\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}}{|\overrightarrow{v_r}|\cdot|\overrightarrow{v_s}|}=\frac{(1,-1,0)\cdot(1,0,1)}{\sqrt{1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1-0+0}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{1+1}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha=60°.$$

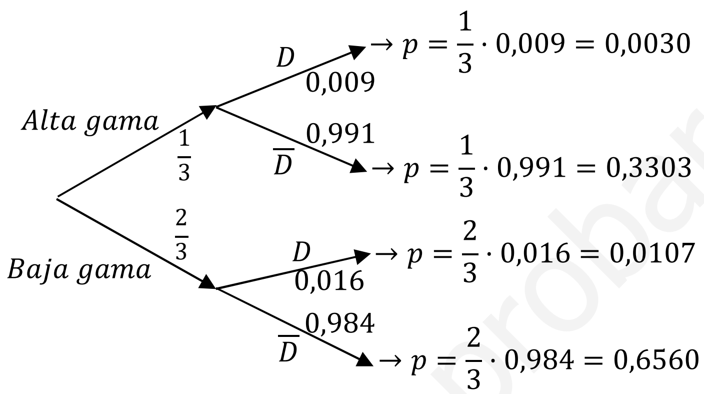
$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ forman\ un\ ángulo\ de\ 60°}.$$

****

4º) Un concesionario dispone de vehículos de baja y alta gama, siendo los de alga gama 1/3 de las existencias. Entre los de baja gama, la probabilidad de tener un defecto de fabricación que obligue a revisarlos durante el rodaje es del 1,6 %, mientras que para los de alta gama es del 0,9 %. En un control de calidad preventa, se elige al azar un vehículo para examinarlo:

a) Calcule la probabilidad de que el vehículo elegido resulte defectuoso.

b) Si se comprueba que el vehículo elegido es defectuoso, calcule la probabilidad de que sea de gama baja.



a)

$$P = P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 0{,}009 + \frac{2}{3} \cdot 0{,}016 = 0{,}0030 + 0{,}0107 = \underline{0{,}0137 = 1{,}37\ \%}.$$

b)

$$P = P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B) \cdot P(D/B)}{P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0{,}016}{\frac{1}{3} \cdot 0{,}009 + \frac{2}{3} \cdot 0{,}016} =$$

$$= \frac{0{,}0107}{0{,}0030 + 0{,}0107} = \frac{0{,}0107}{0{,}0137} = \underline{0{,}7810}.$$

****