

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)**UNIVERSIDAD DE MADRID****JUNIO – 2021**

(Resueltos por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

INSTRUCCIONES GENERALES: Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

1º) Tres hermanos quieren repartirse de forma equitativa un total de 540 acciones valoradas en 1.560 euros, que corresponden a tres empresas, A, B y C. Sabiendo que el valor actual de la acción A es el triple que el de B y la mitad que el de C, que el número de acciones de C es la mitad que el de B y que el actual valor en bolsa de la acción B es 1 euro, encuentre el número de cada tipo de acciones que le corresponde a cada hermano.

Sean x, y, z las acciones de las empresas A, B y C, respectivamente.

Sabiendo que el valor actual de la acción y es de 1 euro, el valor de las otras acciones es, según el enunciado, $x = 3$ euros y $z = 6$ euros.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 540 \\ 3x + y + 6z = 1.560 \\ y = 2z \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x + y + z = 540 \\ 3x + y + 6z = 1.560 \\ y - 2z = 0 \end{array} \right\}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 540 & 1 & 1 \\ 1.560 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-1.080 + 1.560 - 3.240 + 3.120}{-2 + 3 - 6 + 6} = \frac{4.680 - 4.320}{1} = 360.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 540 & 1 \\ 3 & 1.560 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}} = -3.120 + 3.240 = 120.$$

$$z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 540 \\ 3 & 1 & 1.560 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.620 - 1.560 = 60.$$

$$x \Rightarrow \frac{360}{3} = 120; \quad y \Rightarrow \frac{120}{3} = 40; \quad z \Rightarrow \frac{60}{3} = 20.$$

A cada hermano le corresponden 120 acciones de A, 60 de B y 20 de C.

www.yoquieroaprobar.es

2º) Calcula el área de la región limitado por las gráficas de las siguientes funciones:
 $f(x) = 2 + x - x^2$ y $g(x) = 2x^2 - 4x$.

Los puntos de corte de las dos funciones tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

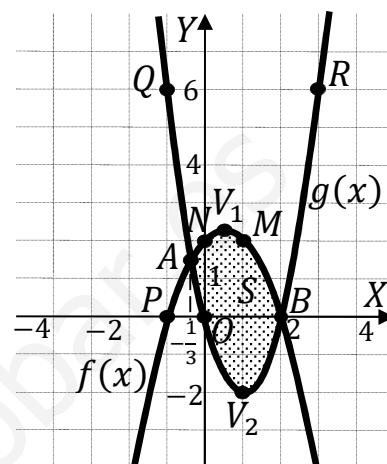
$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2 + x - x^2 = 2x^2 - 4x;$$

$$3x^2 - 5x - 2 = 0; \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{1}{3}; \quad x_2 = 2.$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{18-3-1}{9} = \frac{14}{9} \Rightarrow A\left(-\frac{1}{3}, \frac{14}{9}\right).$$

$$f(2) = 2 + 2 - 4 = 0 \Rightarrow B(2, 0).$$



La función $f(x) = 2 + x - x^2$ es una parábola cóncava ($\cap$) cuyo vértice es el siguiente:

$$f'(x) = 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{8+2-1}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow V_1\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right).$$

Otros puntos de la parábola son $M(1, 2)$, $N(0, 2)$, $B(2, 0)$ y $P(-1, 0)$.

La función $g(x) = 2x^2 - 4x$ es una parábola convexa ($\cup$) cuyo vértice es el siguiente:

$$g'(x) = 4x - 4 = 4(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow V_2(1, -2).$$

Otros puntos de la parábola son $O(0, 0)$, $B(2, 0)$, $Q(-1, 6)$ y $R(3, 6)$.

La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.

Para el cálculo del área pedida se tiene en cuenta que en el intervalo correspondiente a la superficie a calcular todas las ordenadas de $f(x)$ son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de $g(x)$, por lo cual la superficie es la siguiente:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{1}{3}}^2 [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_{-\frac{1}{3}}^2 [(2 + x - x^2) - (2x^2 - 4x)] \cdot dx = \\ &= \int_{-\frac{1}{3}}^2 (-3x^2 + 5x + 2) \cdot dx = \left[-\frac{3x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 2x \right]_{-\frac{1}{3}}^2 = \left[-x^3 + \frac{5x^2}{2} + 2x \right]_{-\frac{1}{3}}^2 = \end{aligned}$$

$$= \left(-2^3 + \frac{5 \cdot 2^2}{2} + 2 \cdot 2 \right) - \left[- \left(-\frac{1}{3} \right)^3 + \frac{5 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right)^2}{2} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) \right] =$$

$$= -8 + 10 + 4 - \frac{1}{27} - \frac{5}{18} + \frac{2}{3} = 6 - \frac{1}{27} - \frac{5}{18} + \frac{2}{3} = \frac{324-2-15+36}{54} = \frac{360-17}{54} = \frac{343}{54}.$$

$$\underline{S = \frac{343}{54} u^2 \cong 6,35 u^2.}$$

www.yoquieroaprobar.es

3º) Sean la recta $r \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$. Se pide:

a) Calcular el ángulo que forman r y π .

b) Hallar el simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano π con respecto al plano $\beta \equiv z - y = 0$.

c) Determinar la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π .

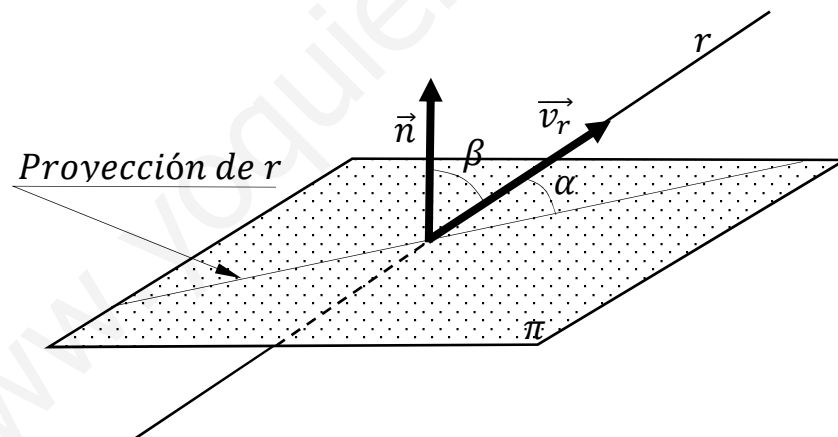
a)

Un vector director de la recta r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\vec{n}_1 = (-1, -1, 1)$ y $\vec{n}_2 = (2, 3, 1)$.

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = i + 2j - 3k + 2k - 3i - j = -2i + j - k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v}_r = (2, -1, 1).$$

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (2, 1, -1)$.



Por definición de producto escalar: $\vec{n} \cdot \vec{v}_r = |\vec{n}| \cdot |\vec{v}_r| \cdot \cos \beta$.

$$\cos \beta = \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}_r}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}_r|}. \text{ Por ser } \alpha \text{ y } \beta \text{ complementarios: } \operatorname{sen} \alpha = \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}_r}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}_r|}.$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{(2, 1, -1) \cdot (2, -1, 1)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{4 - 1 - 1}{\sqrt{4 + 1 + 1} \cdot \sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} =$$

$$= 0,3333 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arc} \operatorname{sen} 0,3333 = 19^\circ 28' 16''.$$

La recta r y el plano π forman un ángulo de $19^\circ 28' 16''$.

b)

El punto P intersección de la recta r y el plano π es la solución del sistema que forman sus expresiones:

$$\begin{aligned} r &\equiv \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 3y - z = -1 \end{cases} \\ \pi &\equiv 2x + y - z + 3 = 0 \Rightarrow 2x + y - z = -3 \end{aligned}$$

Restando la primera ecuación a las otras dos:

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow -3 + 2y = -1; \quad y = 1; \quad -3 + 1 - z = 0 \Rightarrow z = -2.$$

El punto de corte es $P(-3, 1, -2)$.

La recta t que pasa por $P(-3, 1, -2)$ y es perpendicular al plano $\beta \equiv y - z = 0$ tiene como vector director al vector normal del plano: $\vec{n}_\beta = (0, 1, -1)$.

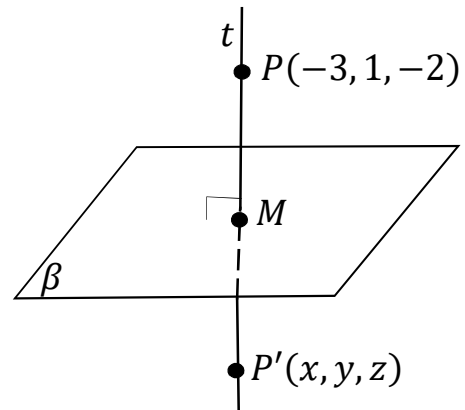
La expresión de t dada por unas ecuaciones paramétricas es $t \equiv \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 + \lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$.

El punto M , intersección del plano β con la recta t es el siguiente:

$$\begin{aligned} \beta &\equiv y - z = 0 \\ t &\equiv \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 + \lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases} \Rightarrow 1 + \lambda - (-2 - \lambda) = 0; \end{aligned}$$

$$1 + \lambda + 2 + \lambda = 0; \quad 2\lambda = -3 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \\ z = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(-3, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$



Tiene que cumplirse que $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MP'}$.

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = \left[\left(-3, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) - (-3, 1, -2) \right] = \left(0, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

$$\overrightarrow{MP'} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OM} = \left[(x, y, z) - \left(-3, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \right] = \left(x + 3, y + \frac{1}{2}, z + \frac{1}{2}\right).$$

$$\left(0, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(x + 3, y + \frac{1}{2}, z + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x + 3 = 0 \rightarrow x = -3 \\ y + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \rightarrow y = -2 \\ z + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow z = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{P'(-3, -2, 1)}.$$

c)

Existen varios procedimientos para determinar la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π ; se va a emplear la siguiente.

La proyección ortogonal de una recta con respecto a un plano es la recta que pasa por dos puntos del plano que son proyecciones de dos puntos de la recta.

Uno de los puntos a considerar es el punto $P(-3, 1, -2)$, intersección de la recta r y el plano π .

Para obtener otro punto de la recta $r \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$ se expresa por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = -1 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \begin{cases} x + y = \lambda \\ 2x + 3y = -1 + \lambda \end{cases};$$

$$\begin{cases} -2x - 2y = -2\lambda \\ 2x + 3y = -1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow y = -1 - \lambda; x - 1 - \lambda = \lambda; x = 1 + 2\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{Por ejemplo, para } \lambda = 0 \Rightarrow Q(1, -1, 0).$$

La recta q tiene por vector director al normal del plano π , que es $\vec{n} = (2, 1, -1)$; su expresión es la

siguiente: $q \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\mu \\ y = -1 + \mu \\ z = -\mu \end{cases}$.

El punto Q' es la intersección de q y π :

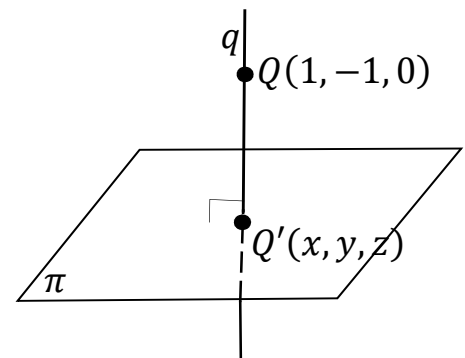
$$\pi \equiv 2x + y - z = -3$$

$$q \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + \mu \\ z = -\mu \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot 1 - 1 + \mu - (-\mu) = -3; 1 + 2\mu = -3; 2\mu = -4;$$

$$\mu = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 - 2 = -3 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow Q'(1, -3, 2).$$

La recta r' pedida, proyección ortogonal de r sobre π es la que pasa por los puntos $P(-3, 1, -2)$ y $Q'(1, -3, 2)$.

Sabiendo que la recta que pasa por dos puntos viene dada por la expresión

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1};$$


$$r' \equiv \frac{x+3}{1+3} = \frac{y-1}{-3-1} = \frac{z+2}{2+2}; \quad \frac{x+3}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+2}{4} \Rightarrow \underline{r' \equiv \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}}.$$

www.yoquieroaprobar.es

4º) El tiempo de vida de los individuos de cierta especie animal tiene una distribución normal de media 8,8 meses y una desviación típica de 3 meses.

a) ¿Qué porcentaje de individuos de esta especie supera los 10 meses? ¿Qué porcentaje de individuos ha vivido entre 7 y 10 meses?

b) Si se toman al azar 4 especímenes, ¿cuál es la probabilidad de que el menos uno no supere los 10 meses de vida?

c) ¿Qué valor de c es tal que el intervalo $(8,8 - c, 8,8 + c)$ incluye el tiempo de vida (medido en meses) del 98 % de los individuos de esta especie?

a)

Datos: $\mu = 8,8$; $\sigma = 3$.

$X \rightarrow N(\mu; \sigma) = N(8,8; 3)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-8,8}{3}$.

$$P = P(X > 10) = P\left(Z > \frac{10-8,8}{3}\right) = P\left(Z > \frac{1,2}{3}\right) = P(Z > 0,4) = \\ = 1 - P(Z \leq 0,4) = 1 - 0,6554 = \underline{0,3446 = 34,46 \%}.$$

$$P = P(7 \leq X \leq 10) = P\left(\frac{7-8,8}{3} \leq Z \leq \frac{10-8,8}{3}\right) = P\left(\frac{-1,8}{3} \leq Z \leq \frac{1,2}{3}\right) = \\ = P(-0,6 \leq Z \leq 0,4) = P(Z < 0,4) - [1 - P(Z < 0,6)] = \\ = P(Z < 0,4) - 1 + P(Z < 0,6) = 0,6554 - 1 + 0,7257 = 1,3811 - 1 = \\ = \underline{0,3811 = 38,11 \%}.$$

b)

La probabilidad de que un individuo no supere los 10 meses de vida es la siguiente:

$$P(X \leq 10) = 1 - P(X > 10) = 1 - 0,3446 = 0,6554.$$

Como se pide la probabilidad de que “al menos uno de cuatro individuos no supere los 10 meses de vida”, hemos de recurrir a una distribución binomial de las siguientes características:

$$n = 4; \quad p = 0,6554; \quad q = 1 - p = 0,3446; \quad r \geq 1.$$

$$\text{La fórmula de la distribución binomial es: } P = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}.$$

$$P = P(r \geq 1) = 1 - P(r = 0) = 1 - \binom{4}{0} \cdot 0,6554^0 \cdot 0,3446^{4-0} =$$

$$= 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0,3446^4 = 1 - 0,0141 = \underline{0,9859}.$$

c)

Se conoce la probabilidad, por lo tanto, tipificando la variable: $Z = \frac{X-8,8}{3}$.

$$P = P(8,8 - c \leq X \leq 8,8 + c) = P\left(\frac{8,8-c-8,8}{3} \leq Z \leq \frac{8,8+c-8,8}{3}\right) = 0,98;$$

$$P\left(\frac{-c}{3} \leq Z \leq \frac{c}{3}\right) = P\left(Z < \frac{c}{3}\right) - \left[1 - P\left(Z < \frac{c}{3}\right)\right] = P\left(Z < \frac{c}{3}\right) - 1 + P\left(Z < \frac{c}{3}\right) =$$

$$= 2 \cdot P\left(Z < \frac{c}{3}\right) - 1 = 0,98; \quad P\left(Z < \frac{c}{3}\right) = \frac{1,98}{2} = 0,9900.$$

Buscando en la tabla $N(0, 1)$ de forma inversa, a 0,9900 le corresponde, aproximadamente, el valor 2,33.

$$\frac{c}{3} \cong 2,33 \Rightarrow \underline{c \cong 7}.$$

5º) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a :

$$\begin{cases} ax - 2y + (a - 1)z = 4 \\ -2x + 3y - 6z = 2 \\ -ax + y - 6z = 6 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema según los diferentes valores de a .

b) Resuelva el sistema para $a = 1$.

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} a & -2 & a-1 \\ -2 & 3 & -6 \\ -a & 1 & -6 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} a & -2 & a-1 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -a & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$\begin{aligned} |M| &= \begin{vmatrix} a & -2 & a-1 \\ -2 & 3 & -6 \\ -a & 1 & -6 \end{vmatrix} = -18a - 2(a-1) - 12a + 3a(a-1) + 6a + 24 = \\ &= -24a - 2a + 2 + 3a^2 - 3a + 24 = 3a^2 - 29a + 26 = 0; \quad x = \frac{29 \pm \sqrt{29^2 - 12 \cdot 26}}{2 \cdot 3} = \\ &= \frac{29 \pm \sqrt{841 - 312}}{6} = \frac{29 \pm \sqrt{529}}{6} = \frac{29 \pm 23}{6} \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = \frac{26}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Para } \begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq 26/3 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.D.}$$

$$\begin{aligned} \text{Para } a = 1 \Rightarrow M' &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -1 & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M' \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -1 & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{cases} F_2 \rightarrow F_2 + 2F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 + F_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 10 \\ 0 & -1 & -6 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 = F_3\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{Rang } M' &= 2. \end{aligned}$$

$$\text{Para } a = 1 \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.I.}$$

$$\text{Para } a = \frac{26}{3} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} \frac{26}{3} & -2 & \frac{23}{3} & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -\frac{26}{3} & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

A efectos de rango, las matrices M' y M'' son equivalentes, siendo:

$$M'' = \begin{pmatrix} 26 & -6 & 23 & 12 \\ -6 & 9 & -18 & 6 \\ -26 & 3 & -18 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M'' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 26 & -6 & 12 \\ -6 & 9 & 6 \\ -26 & 3 & 18 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 13 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \\ -13 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 117 - 6 + 26 + 78 - 13 - 18 =$$

$$= 117 - 6 + 26 + 78 - 13 - 18 = 221 - 35 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } M'' = \text{Rang } M' = 3.$$

Para $a = \frac{26}{3} \Rightarrow \text{Rang } M = 2; \text{Rang } M' = 3 \Rightarrow \text{Sistema incompatible.}$

b)

Para $a = 1$ el sistema resulta $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -2x + 3y - 6z = 2 \\ -x + y - 6z = 6 \end{cases}$, que es compatible indeterminado, como se comprobó en el apartado anterior. Despreciando una de las ecuaciones, por ejemplo la segunda, resulta $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -x + y - 6z = 6 \end{cases}$. Haciendo $z = -\lambda$:

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -x + y = 6 + 6\lambda \end{cases} \Rightarrow -y = 10 + 6\lambda; \quad y = -10 - 6\lambda.$$

$$x - 2 \cdot (-10 - 6\lambda) = 4; \quad x + 20 + 12\lambda = 4; \quad x = -16 - 12\lambda.$$

Solución: $x = -16 - 12\lambda; \quad y = -10 - 6\lambda; \quad z = \lambda, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

6º) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{si } x < 0 \\ x \cdot e^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

b) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f restringida a $(-\pi, 2)$. Demuestre que existe un punto $x_0 \in [0, 1]$ de manera que $f(x_0) = 2$.

c) Calcule $\int_{-\frac{\pi}{2}}^1 f(x) \cdot dx$.

a)

La función $f(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$, excepto para $x = 0$, cuya continuidad es dudosa. Se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$\text{Para } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \text{sen } x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot e^x) = 0 = f(0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow \underline{f(x) \text{ es continua para } x = 0}.$$

La función $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$, excepto para $x = 0$ cuya derivabilidad es dudosa y se estudia a continuación.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ e^x(x+1) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f'(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow 1 \Rightarrow \underline{f(x) \text{ es derivable en } x = 0}.$$

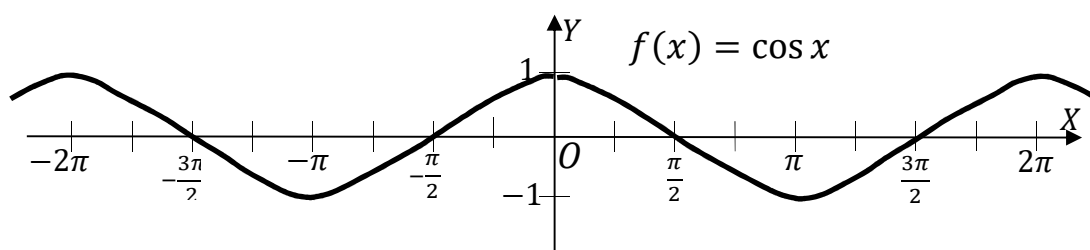
b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ e^x(x+1) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

En el intervalo $(-\pi, 0)$ la función $f'(x) = \cos x$ es negativa en el intervalo $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$ y es positiva en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, 0)$.

Para una mejor comprensión del crecimiento o decrecimiento de la función coseno se hace su representación gráfica, aproximada.



En el intervalo $(-\pi, 0)$ la función $f'(x) = \cos x$ es negativa en el intervalo $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$ y es positiva en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, 0)$.

En el intervalo $(0, 2) \Rightarrow f'(x) = e^x \cdot (x + 1) > 0$.

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{\text{Decrecimiento: } f'(x) < 0 \Rightarrow x \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)}.$$

$$\underline{\text{Crecimiento: } f'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 2\right)}.$$

Para demostrar que existe un punto $x_0 \in [0, 1]$ de manera que $f(x_0) = 2$ se tiene en cuenta que la función es continua en $[0, 1]$.

$$f(0) = 0 \cdot e^0 = 0 \cdot 1 = 0. \qquad f(1) = 1 \cdot e^1 = e.$$

Teniendo en cuenta el teorema de los valores intermedios o desigualdad de Darboux que dice que “si una función es continua en un intervalo $[a, b]$ toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$ al menos una vez”, por lo cual y teniendo en cuenta que $0 < 2 < e$, queda demostrado que

$$\underline{\text{Existe al menos un } x_0 \in [0, 1] \text{ de manera que } f(x_0) = 2}.$$

También se puede resolver este apartado de la forma siguiente:

Demostrar que existe un punto $x_0 \in [0, 1]$ de manera que $f(x_0) = 2$ es equivalente a demostrar que la función $g(x) = f(x) - 2$ tiene una raíz real en el intervalo $[0, 1]$.

En el intervalo $[0, 1]$ es $f(x) = x \cdot e^x$ y $g(x) = f(x) - 2 = x \cdot e^x - 2$.

El teorema de Bolzano dice que “si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$ ”.

A la función $g(x) = x \cdot e^x - 2$ le es aplicable el teorema de Bolzano en el intervalo $[0, 1]$:

$$g(0) = 0 \cdot e^0 - 2 = 0 - 2 = -2 < 0. \quad g(1) = 1 \cdot e^1 - 2 = e - 2 > 0.$$

Lo anterior demuestra que $g(x)$ tiene al menos una raíz real en $[0, 1]$ y también que existe al menos un $x_0 \in [0, 1]$ de manera que $f(x_0) = 2$, c. q. d.

c)

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^1 f(x) \cdot dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \text{sen } x \cdot dx + \int_0^1 x \cdot e^x \cdot dx = A + B. \quad (*)$$

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \text{sen } x \cdot dx = [-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = -\cos 0 - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 - 0 = -1.$$

$$B = \int_0^1 x \cdot e^x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ e^x \cdot dx = dv \rightarrow v = e^x \end{array} \right\} \Rightarrow \left[x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx \right]_0^1 =$$

$$= [x \cdot e^x - e^x]_0^1 = [e^x(x - 1)]_0^1 = e^1(1 - 1) - e^0(0 - 1) = 1.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de A y B:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^1 f(x) \cdot dx = -1 + 1 \Rightarrow I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^1 f(x) \cdot dx = 0.$$

7º) Sean los planos $\pi_1 \equiv x + y = 1$ y $\pi_2 \equiv x + z = 1$.

a) Halle los planos paralelos al plano π_1 tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2.

b) Halle la recta que pasa por el punto $P(0, 2, 0)$ y es perpendicular al plano π_2 .

c) Halle la distancia entre los puntos de intersección del plano π_1 con los ejes X e Y.

a)

Los planos paralelos al plano $\pi_1 \equiv x + y - 1 = 0$ tienen por expresión general $\pi \equiv x + y + D = 0$.

La distancia del origen de coordenadas al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(O, \pi) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la fórmula al plano $\pi \equiv x + y + D = 0$:

$$d(O, \pi) = 2 \Rightarrow \frac{|D|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{|D|}{\sqrt{2}} \Rightarrow |D| = 2\sqrt{2} \Rightarrow D_1 = -2\sqrt{2}, D_2 = 2\sqrt{2}.$$

Los planos pedidos son: $\pi' \equiv x + y - 2\sqrt{2} = 0$ y $\pi'' \equiv x + y + 2\sqrt{2} = 0$.

b)

Un vector normal del plano π_2 es $\vec{n}_2 = (1, 0, 1)$.

La recta r pedida es, dada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas, la siguiente: $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases}$

c)

Los puntos de intersección del plano $\pi_1 \equiv x + y - 1 = 0$ con los ejes X e Y son los siguientes:

$$\text{Eje X} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv x + y - 1 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x - 1 = 0; x = 1 \Rightarrow A(1, 0, 0).$$

$$\text{Eje Y} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv x + y - 1 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y - 1 = 0; y = 1 \Rightarrow B(0, 1, 0).$$

La distancia entre los puntos $A(1, 0, 0)$ y $B(0, 1, 0)$ es el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0, 1, 0) - (1, 0, 0)] = (-1, 1, 0).$$

$$d(\overline{AB}) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} \Rightarrow \underline{d(\overline{AB}) = \sqrt{2} \text{ unidades.}}$$

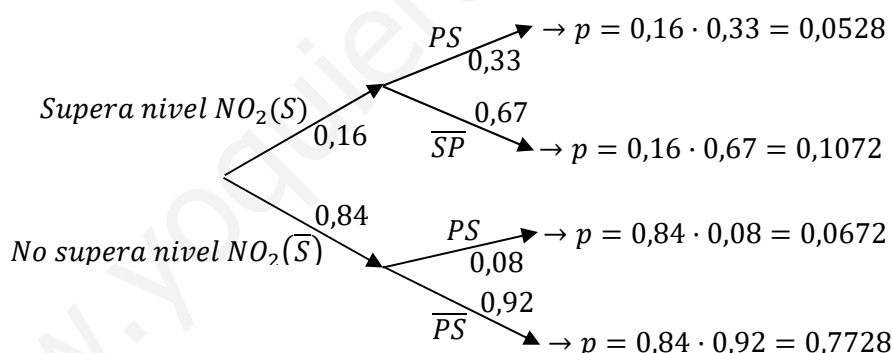
www.yoquieroaprobar.es

8º) Una estación de medición de calidad del aire mide niveles de NO_2 y de partículas en suspensión. La probabilidad de que en un día se mida un nivel de NO_2 superior al permitido es 0,16. En los días en los que se supera el nivel permitido de NO_2 , la probabilidad de que se supere el nivel permitido de partículas es 0,33. En los días en los que no se supera el nivel de NO_2 , la probabilidad de que se supere el nivel de partículas es 0,08.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que se supere al menos uno de los dos?
- c) ¿Son independientes los sucesos “en un día se supera el nivel permitido de NO_2 ” y “en un día se supera el nivel permitido de partículas”?
- d) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de NO_2 , sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas?

Probabilidad de superar el nivel de partículas en suspensión: SP .

Probabilidad de no superar el nivel de partículas en suspensión: $\overline{SP}$.



a)

$$P = P(S \cap PS) = P(S) \cdot P(PS|S) = 0,16 \cdot 0,33 = \underline{0,0528}.$$

b)

La probabilidad pedida es igual a la unidad menos la probabilidad de que no se supere ninguno de los dos niveles:

$$P = 1 - P(\overline{S} \cap \overline{PS}) = 1 - P(\overline{S}) \cdot P(\overline{PS}|\overline{S}) = 1 - 0,84 \cdot 0,02 = 1 - 0,7728 = \underline{0,2272}.$$

c)

Dos sucesos PS y S son independientes cuando $P(PS \cap S) = P(PS) \cdot P(S)$:

$$P(S) = 0,16.$$

$$P(PS) = P(S \cap PS) + P(\bar{S} \cap PS) = P(S) \cdot P(PS/S) + P(\bar{S}) \cdot P(PS/\bar{S}) = \\ = 0,16 \cdot 0,33 + 0,84 \cdot 0,08 = 0,0528 + 0,0672 = 0,1200.$$

$$P(PS) \cdot P(S) = 0,16 \cdot 0,12 = 0,0192 \neq 0,0528 = P(S \cap PS).$$

Por lo expuesto anteriormente los sucesos S y PS NO son independientes.

d)

$$P(S|\bar{PS}) = \frac{P(S \cap \bar{PS})}{P(\bar{PS})} = \frac{P(S) \cdot P(\bar{PS}|S)}{1 - P(PS)} = \frac{0,16 \cdot 0,67}{1 - 0,12} = \frac{0,1072}{0,88} = \underline{0,1218}.$$
