CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	**PAU** **SETEMBRO 2013**	**Código: 25**

FÍSICA

Puntuación máxima: Cuestiones 4 puntos (1 cada cuestión, teórica o práctica). Problemas 6 puntos (1 cada apartado).
No se valorará la simple anotación de un ítem cómo solución a las cuestiones; han de ser razonadas.
Se puede usar calculadora siempre que no sea programable ni memorice texto.
El alumno elegirá una de las dos opciones.

OPCIÓN A

C.1. La ecuación de una onda transversal de amplitud 4 cm y frecuencia 20 Hz que se propaga en el sentido negativo del eje X con una velocidad de 20 m·s⁻¹ es: A) $y(x, t) = 4·10^{-2} \cos \pi (40\ t + 2\ x)$ m. B) $y(x, t) = 4·10^{-2} \cos \pi (40\ t - 2\ x)$ m. C) $y(x, t) = 4·10^{-2} \cos 2\pi (40\ t + 2\ x)$ m.

C.2. Un espejo cóncavo tiene 80 cm de radio de curvatura. La distancia del objeto al espejo para que su imagen sea derecha y 4 veces mayor es: A) 50 cm. B) 30 cm. C) 60 cm.

C.3. Una radiación monocromática, de longitud de onda 300 nm, incide sobre cesio. Si la longitud de onda umbral del cesio es 622 nm, el potencial de frenado es: A) 12,5 V. B) 2,15 V. C) 125 V.
(Datos: 1 nm = 10^{9} m; h = 6,63·10^{-34} J·s; c = 3·10^{8} m·s⁻¹; q_e = −1,6·10^{-19} C)

C.4. Si tenemos un resorte de constante elástica conocida, ¿cómo podemos determinar el valor de una masa desconocida? Describe las experiencias que debemos realizar.

P.1. Se desea poner un satélite de masa 10^3 kg en órbita alrededor de la Tierra y a una altura dos veces el radio terrestre. Calcula: a) La energía que hay que comunicarle desde la superficie de la Tierra. b) La fuerza centrípeta necesaria para que describa la órbita. c) El periodo del satélite en dicha órbita.
(Datos: R_T = 6370 km; g_0 = 9,8 m/s²)

P.2. Se acelera una partícula alfa mediante una diferencia de potencial de 1 kV, penetrando a continuación, perpendicularmente a las líneas de inducción, en un campo magnético de 0,2 T. Halla: a) El radio de la trayectoria descrita por la partícula. b) El trabajo realizado por la fuerza magnética. c) El módulo, dirección y sentido de un campo eléctrico necesario para que la partícula alfa no experimente desviación alguna a su paso por la región en la que existen los campos eléctrico y magnético.
(Datos: m_α = 6,68·10^{-27} kg; q_α = 3,2·10^{-19} C)

OPCIÓN B

C.1. La actividad en el instante inicial de medio mol de una sustancia radiactiva cuyo período de semidesintegración es de 1 día, es: A) 2,41·10^{18} Bq. B) 3,01·10^{23} Bq. C) 0,5 Bq. (Dato: N_A= 6,022·10^{23} mol⁻¹)

C.2. La longitud de onda asociada a un electrón de 100 eV de energía cinética es: A) 2,3·10^{-5} m. B) 1,2·10^{-10} m. C) 10^{-7} m. (Datos: m_e = 9,1·10^{-31} kg, h = 6,63·10^{-34} J·s; q_e = −1,6·10^{-19} C)

C.3. Las líneas de inducción del campo magnético son: A) Siempre cerradas. B) Abiertas o cerradas, ya que dependen del agente creador del campo magnético. C) Siempre abiertas, por semejanza con el campo eléctrico.

C.4. Si en la práctica de óptica geométrica la lente convergente tiene una distancia focal imagen de +10 cm, ¿a qué distancias de la lente puedes situar el objeto para obtener imágenes sobre la pantalla, si se cumple que $|s| + |s'|$ = 80 cm? Dibuja la marcha de los rayos.

P.1. Tres cargas eléctricas puntuales de 10^{-6} C se encuentran situadas en los vértices de un cuadrado de 1 m de lado. Calcula: a) La intensidad del campo y el potencial electrostático en el vértice libre. b) Módulo, dirección y sentido de la fuerza del campo electrostático sobre una carga de −2·10^{-6} C situada en dicho vértice. c) El trabajo realizado por la fuerza del campo para trasladar dicha caga desde el vértice al centro del cuadrado. Interpreta el signo del resultado. (Dato: K = 9·10^{9} N·m²·C⁻²)

P.2. Una bola colgada de un hilo de 2 m de longitud se desvía de la vertical un ángulo de 4°, se suelta y se observan sus oscilaciones. Halla: a) La ecuación del movimiento armónico simple. b) La velocidad máxima de la bola cuando pasa por la posición de equilibrio. c) Comprueba el resultado obtenido en el apartado anterior, utilizando la ecuación de la conservación de la energía mecánica.

Soluciones

OPCIÓN A

C.1. La ecuación de una onda transversal de amplitud 4 cm y frecuencia 20 Hz que se propaga en el sentido negativo del eje X con una velocidad de 20 m·s⁻¹ es:
A) $y(x, t) = 4·10^{-2} \cos \pi (40\ t + 2\ x)$ m.
B) $y(x, t) = 4·10^{-2} \cos \pi (40\ t - 2\ x)$ m.
C) $y(x, t) = 4·10^{-2} \cos 2\pi (40\ t + 2\ x)$ m.

(P.A.U. Sep. 13)

Solución: A

La ecuación de una onda armónica unidimensional puede escribirse como:

$$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm k \cdot x)$$

En la que
y es la elongación del punto que oscila (separación de la posición de equilibrio)
A es la amplitud (elongación máxima)
ω es la frecuencia angular que está relacionada con la frecuencia f por $\omega = 2\ \pi \cdot f$.
t es el tiempo
k es el número de onda, la cantidad de ondas que entran en una longitud de 2 π metros. Está relacionada con la longitud de onda λ por $k = 2\ \pi / \lambda$
x es la distancia del punto al foco emisor.
El signo ± entre $\omega \cdot t$ y $k \cdot x$ es negativo si la onda se propaga en sentido positivo del eje X, y positivo si lo hace en sentido contrario.
Como dice que se propaga en sentido negativo del eje X podemos descartar la opción B.
La frecuencia angular ω de la ecuación de la opción A es $\omega_1 = \pi \cdot 40$ [rad/s], que corresponde a una frecuencia de 20 Hz.

$$f_1 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{40\pi\,[\text{rad/s}]}{2\pi\,[\text{rad}]} = 20\ \text{s}^{-1}$$

C.2. Un espejo cóncavo tiene 80 cm de radio de curvatura. La distancia del objeto al espejo para que su imagen sea derecha y 4 veces mayor es:
A) 50 cm.
B) 30 cm.
C) 60 cm.

(P.A.U. Sep. 13)

Datos (convenio de signos DIN)	***Cifras significativas: 3***
Radio de curvatura	$R = -80,0$ cm $= -0,800$ m
Aumento lateral	$A_L = 4,00$
Incógnitas	
Posición del objeto	s
Otros símbolos	
Distancia focal del espejo	f
Posición de la imagen	s'
Tamaño del objeto	y
Tamaño de la imagen	y'
Ecuaciones	
Relación entre la posición de la imagen y la del objeto en los espejos	$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$
Aumento lateral en los espejos	$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s}$

Solución: B

La distancia focal del espejo es la mitad del radio de curvatura. Como el espejo es cóncavo el foco se encuentra a la izquierda, y, por el convenio de signos, la distancia focal es negativa

$$f = R / 2 = -0{,}400 \text{ m}$$

El aumento lateral en espejos es

$$A_{\mathrm{L}} = -\frac{s'}{s} = 4{,}00$$

$$s' = -4{,}00\ s$$

Se sustituyen f, s' en la ecuación de los espejos

$$\frac{1}{-4{,}00\ s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{-0{,}400\ [\mathrm{m}]}$$

Multiplicando ambos lados por ($-4{,}00\ s$) queda una ecuación sencilla

$$1 - 4{,}00 = 10\ s$$

La solución es:

$$s = -0{,}300 \text{ m}$$

C.3. Una radiación monocromática, de longitud de onda 300 nm, incide sobre cesio. Si la longitud de onda umbral del cesio es 622 nm, el potencial de frenado es:
A) 12,5 V.
B) 2,15 V.
C) 125 V.
Datos: 1 nm = 10^{9} m; $h = 6{,}63\cdot10^{-34}$ J·s; $c = 3\cdot10^{8}$ m·s^{-1}; $q_e = -1{,}6\cdot10^{-19}$ C. *(P.A.U. Sep. 13)*

Datos	***Cifras significativas: 3***
Longitud de onda de la radiación	$\lambda = 300 \text{ nm} = 3{,}00\cdot10^{-7}$ m
Longitud de onda umbral del cesio	$\lambda_0 = 622 \text{ nm} = 6{,}22\cdot10^{-7}$ m
Constante de Planck	$h = 6{,}62\cdot10^{-34}$ J·s
Velocidad de la luz en el vacío	$c = 3{,}00\cdot10^{8}$ m/s
Carga del electrón	$e = -1{,}60\cdot10^{-19}$ C
Incógnitas	
Potencial de frenado	V
Otros símbolos	
Frecuencia umbral	f_0
Ecuaciones	
Ecuación de Planck (energía de un fotón)	$E_{\mathrm{f}} = h \cdot f$
Ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico	$E_{\mathrm{f}} = W_{\mathrm{e}} + E_{\mathrm{c}}$
Relación entre la frecuencia de una onda luminosa y la longitud de onda	$f = c / \lambda$
Relación entre la energía cinética de los electrones y el potencial de frenado	$E_{\mathrm{c}} = \|e\| \cdot V$

Solución: B

Partiendo de la ecuación de Einstein y sustituyendo en ella las de Planck y la relación entre longitud de onda y frecuencia, queda

$$E_{\mathrm{c}} = E_{\mathrm{f}} - W_{\mathrm{e}} = h \cdot f - h \cdot f_0 = \frac{h \cdot c}{\lambda} - \frac{h \cdot c}{\lambda_0} = h \cdot c \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right)$$

$$E_{\mathrm{c}} = 6{,}62 \cdot 10^{-34}\ [\mathrm{J \cdot s}] \cdot 3{,}00 \cdot 10^{8}\ [\mathrm{m \cdot s^{-1}}] \left(\frac{1}{3{,}00 \cdot 10^{-7}\ [\mathrm{m}]} - \frac{1}{6{,}22 \cdot 10^{-7}\ [\mathrm{m}]} \right) = 3{,}43 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

Usando la relación entre la energía cinética de los electrones y el potencial de frenado

$$E_{\mathrm{c}} = |e| \cdot V \Rightarrow \quad V = \frac{E_{\mathrm{c}}}{|e|} = \frac{3{,}43 \cdot 10^{-19}\ [\mathrm{J}]}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ [\mathrm{C}]} = 2{,}14\ \mathrm{V}$$

C.4. Si tenemos un resorte de constante elástica conocida, ¿cómo podemos determinar el valor de una masa desconocida? Describe las experiencias que debemos realizar.

(P.A.U. Sep. 13)

Solución:

Se colgaría el resorte con un platillo de balanza y se anotaría la posición del platillo, medida con una regla vertical: y_1
Sin mover la regla, se colocaría la masa en el platillo y se mediría y anotaría la nueva posición del platillo: y_2
Se calcularía el alargamiento $\Delta y = y_2 - y_1$.
Conocido el valor de la constante podría calcularse la fuerza de recuperación elástica por la ecuación de Hooke

$$F = - k \cdot \Delta y$$

Como en el equilibrio estático entre la fuerza elástica y el peso del objeto son iguales:

$$k \cdot \Delta y = m \cdot g$$

La masa se calcula despejándola en la ecuación anterior.

$$m = \frac{k \cdot \Delta y}{g}$$

P.1. Se desea poner un satélite de masa 10^3 kg en órbita alrededor de la Tierra y a una altura dos veces el radio terrestre. Calcula:
a) La energía que hay que comunicarle desde la superficie de la Tierra.
b) La fuerza centrípeta necesaria para que describa la órbita.
c) El periodo del satélite en dicha órbita.
Datos: R_T = 6370 km; g_0 = 9,8 m/s². *(P.A.U. Sep. 13)*
Rta.: a) $\Delta E = 5{,}20 \cdot 10^{10}$ J; b) $F = 1{,}09 \cdot 10^3$ N; c) T = 7 h 19 min.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa del satélite	$m = 10^3$ kg $= 1{,}00 \cdot 10^3$ kg
Radio de la Tierra	R = 6370 km $= 6{,}37 \cdot 10^6$ m
Altura de la órbita	$h = 2 \cdot 6370$ km $= 1{,}27 \cdot 10^7$ m
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	$g_0 = 9{,}80$ m/s²
Incógnitas	
Energía que hay que comunicarle desde la superficie de la Tierra	ΔE
Fuerza centrípeta necesaria para que describa la órbita	F
Período orbital del satélite	T
Otros símbolos	
Masa de la Tierra	M
Constante de la gravitación universal	G
Ecuaciones	
Velocidad de un satélite a una distancia r del centro de un astro de masa M	$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$
Relación entre la masa, la gravedad y el radio de un astro	$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$
Energía cinética	$E_c = ½\, m \cdot v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

a) La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial.
La expresión de la energía potencial es:

$$E_\text{p} = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

Al no tener la masa de la Tierra se sustituye $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$.

$$E_\text{p} = -\frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{r}$$

Se supone que en la superficie de la Tierra el satélite está en reposo[a], por lo que solo tiene energía potencial, que vale:

$$E_\text{p}(\text{suelo}) = -G \frac{M \cdot m}{R} = -\frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{R} = -g_0 \cdot R \cdot m = -9{,}80\ [\text{m/s}^2] \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ [\text{m}] \cdot 1{,}00 \cdot 10^3\ [\text{kg}] = -6{,}24 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

El radio de una órbita circular a una altura dos veces el radio terrestre es

$$r = R + h = R + 2\,R = 3\,R = 3 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ [\text{m}] = 1{,}91 \cdot 10^7\ \text{m}$$

La energía potencial en la órbita es:

$$E_\text{p}(\text{órbita}) = -G \frac{M \cdot m}{r} = -\frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{3\,R} = -\frac{g_0 \cdot R \cdot m}{3} = \frac{E_{\text{p s}}}{3} = \frac{-6{,}24 \cdot 10^{10}\ \text{J}}{3} = -2{,}08 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

Para calcular la energía cinética en la órbita necesitamos calcular la velocidad orbital.
La velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor del centro de un astro de masa M es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Se sustituye $G \cdot M$ por $g_0 \cdot R^2$ en la ecuación de la velocidad, y queda

$$v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{3 \cdot R}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R}{3}} = \sqrt{\frac{9{,}80\ [\text{m/s}^2] \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ [\text{m}]}{3}} = 4{,}56 \cdot 10^3\ \text{m/s} = 4{,}56\ \text{km/s}$$

Análisis: Se espera que un satélite en órbita alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. *El resultado está está de acuerdo con esta suposición.*

La energía cinética en órbita es:

$$E_\text{c}(\text{órbita}) = m \cdot v^2 / 2 = [1{,}00 \cdot 10^3\ [\text{kg}] \cdot (4{,}56 \cdot 10^3\ [\text{m/s}])^2] / 2 = 1{,}04 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

La energía mecánica en órbita valdrá

$$E(\text{órbita}) = E_\text{c}(\text{órbita}) + E_\text{p}(\text{órbita}) = 1{,}04 \cdot 10^{10}\ [\text{J}] + (-2{,}08 \cdot 10^{10}\ [\text{J}]) = -1{,}04 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

Análisis: La energía mecánica tiene el valor opuesto al de la energía cinética

La energía que hay que comunicarle al satélite en la superficie de la Tierra es la diferencia entre la que tendrá en órbita y la que tiene en el suelo:

$$\Delta E = E(\text{órbita}) - E(\text{suelo}) = -1{,}04 \cdot 10^{10} - (-6{,}24 \cdot 10^{10}\ \text{J}) = 5{,}20 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

b) La fuerza centrípeta es:

$$F = m \cdot a_\text{N} = m \frac{v^2}{r} = m \frac{\frac{g_0 \cdot R}{3}}{3 \cdot R} = \frac{m \cdot g_0}{9} = \frac{1{,}00 \cdot 10^3\ [\text{kg}] \cdot 9{,}80\ [\text{m/s}^2]}{9} = 1{,}09 \cdot 10^3\ \text{N}$$

c) El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad en el movimiento circular uniforme:

[a] Para un sistema de referencia en el centro de la Tierra, cualquier punto de la superficie tiene velocidad debido a la rotación terrestre. La velocidad de un punto de la superficie terrestre vale: $v = \omega \cdot R = 2\,\pi\,R\,/\,T = 463$ m/s. Para un objeto de 1000 kg, la energía cinética sería $E_\text{c} = ½\ m \cdot v^2 = 1{,}07 \cdot 10^8$ J mucho menor que el valor absoluto de la energía potencial ($6{,}24 \cdot 10^{10}$ J)

$$T=\frac{2\pi\cdot r}{v}=\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 1{,}91\cdot 10^{7}\,[\mathrm{m}]}{7{,}58\cdot 10^{3}\,[\mathrm{m/s}]}=2{,}63\cdot 10^{4}\ \mathrm{s}=7\ \mathrm{h}\ 18\ \mathrm{min}$$

P.2. Se acelera una partícula alfa mediante una diferencia de potencial de 1 kV, penetrando a continuación, perpendicularmente a las líneas de inducción, en un campo magnético de 0,2 T. Halla:

a) El radio de la trayectoria descrita por la partícula.
b) El trabajo realizado por la fuerza magnética.
c) El módulo, dirección y sentido de un campo eléctrico necesario para que la partícula alfa no experimente desviación alguna a su paso por la región en la que existen los campos eléctrico y magnético.

Datos: $m_\alpha = 6{,}68\cdot10^{-27}$ kg; $q_\alpha = 3{,}2\cdot10^{-19}$ C. *(P.A.U. Sep. 13)*

Rta.: a) R = 3,2 cm; b) $W_B = 0$; c) $|\overline{\boldsymbol{E}}| = 6{,}2\cdot10^4$ V/m.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Carga de la partícula alfa	$q_\alpha = 3{,}2\cdot10^{-19}$ C
Diferencia de potencial de aceleración	ΔV = 1,00 kV = $1{,}00\cdot10^3$ V
Masa de la partícula alfa	$m_\alpha = 6{,}68\cdot10^{-27}$ kg
Intensidad del campo magnético	$\lvert\overline{\boldsymbol{B}}\rvert$ = 0,200 T
Incógnitas	
Radio de la trayectoria descrita por la partícula alfa	R
Trabajo realizado por la fuerza magnética	W_B
Vector campo eléctrico que anule el efecto del campo magnético	$\overline{\boldsymbol{E}}$
Otros símbolos	
Vector de la fuerza magnética sobre la partícula alfa	$\overline{\boldsymbol{F}}_B$
Vector fuerza eléctrica sobre la partícula alfa	$\overline{\boldsymbol{F}}_E$
Ecuaciones	
Ley de Lorentz: fuerza magnética sobre una carga q que se desplaza en el interior de un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$	$\overline{\boldsymbol{F}}_B = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio R)	$a_N=\dfrac{v^2}{R}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m\cdot\overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio R	$v=\dfrac{2\pi\cdot R}{T}$
Fuerza $\overline{\boldsymbol{F}}_E$ ejercida por un campo electrostático $\overline{\boldsymbol{E}}$ sobre una carga q	$\overline{\boldsymbol{F}}_E = q\cdot\overline{\boldsymbol{E}}$

Solución:

a) Para calcular la velocidad de la partícula alfa tenemos que tener en cuenta que al acelerar la partícula alfa con una diferencia de potencial (suponemos que desde el reposo), este adquiere una energía cinética:

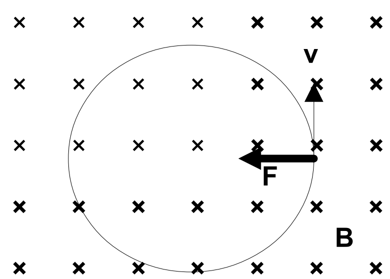
$$W(\text{eléctrico}) = q\cdot\Delta V = \Delta E_c = ½\ m_p\cdot v^2 - ½\ m_p\cdot v_0^2$$

Si parte del reposo, $v_0 = 0$. La velocidad final es:

$$v=\sqrt{\frac{2\,q_\alpha\cdot\Delta V}{m_\alpha}}=\sqrt{\frac{2\cdot 3{,}20\cdot10^{-19}\,[\mathrm{C}]\cdot 1{,}00\cdot10^{3}\,[\mathrm{V}]}{6{,}28\cdot10^{-27}\,[\mathrm{kg}]}}=3{,}10\cdot10^{5}\ \mathrm{m/s}$$

Si solo actúa la fuerza magnética:

$$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_B$$



La partícula alfa describe una trayectoria circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración solo tiene componente normal a_N,

$$F_B=m\cdot a=m\cdot a_N=m\frac{v^2}{R}$$

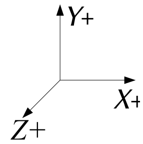
Usando la expresión de la ley de Lorentz (en módulos) para la fuerza magnética

$$|q| \cdot B \cdot v \cdot \operatorname{sen} \varphi = m \frac{v^2}{R}$$

Despejando el radio R

$$R = \frac{m \cdot v}{|q| \cdot B \cdot \operatorname{sen} \varphi} = \frac{6{,}28 \cdot 10^{-27}\,[\text{kg}] \cdot 3{,}10 \cdot 10^{5}\,[\text{m/s}]}{3{,}20 \cdot 10^{-19}\,[\text{C}] \cdot 0{,}200\,[\text{T}] \cdot \operatorname{sen} 90°} = 3{,}23 \cdot 10^{-2}\ \text{m} = 3{,}23\ \text{cm}$$

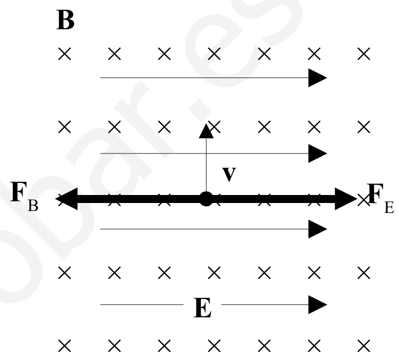
b) Como la trayectoria es circular, el desplazamiento es, en todo momento, perpendicular a la fuerza magnética, por lo que su trabajo es nulo.



$$W_B = F_B \cdot \Delta s \cdot \cos 90° = 0$$

c) Tomando el sistema de referencia como el de figura de la derecha, cuando solo actúa la fuerza magnética la trayectoria de la partícula alfa es una circunferencia. En la figura anterior se dibujó la partícula alfa moviéndose inicialmente en el sentido positivo del eje Y y el campo magnético dirigido en el sentido negativo del eje Z.

Cuando actúa una fuerza eléctrica que anula la magnética,



$$\overline{\boldsymbol{F}}_B + \overline{\boldsymbol{F}}_E = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) + q \cdot \overline{\boldsymbol{E}} = \overline{\mathbf{0}}$$

El campo eléctrico debe valer:

$$\overline{\boldsymbol{E}} = -(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) = -(3{,}10 \cdot 10^5\ \overline{\mathbf{j}}\ [\text{m/s}] \times 0{,}200\ (-\overline{\mathbf{k}})\ [\text{T}]) = 6{,}19 \cdot 10^4\ \overline{\mathbf{i}}\ \text{N/C}$$

El campo eléctrico está dirigido en el sentido positivo del eje X.

En cualquier sistema de referencia, la dirección del campo eléctrico debe ser perpendicular tanto a la dirección del campo magnético como a la dirección de la velocidad. El sentido del campo eléctrico tiene que ser igual que el de la fuerza eléctrica y opuesto al de la fuerza magnética.

OPCIÓN B

C.1. La actividad en el instante inicial de medio mol de una sustancia radiactiva cuyo período de semidesintegración es de 1 día, es:

A) $2{,}41 \cdot 10^{18}$ Bq.

B) $3{,}01 \cdot 10^{23}$ Bq.

C) 0,5 Bq.

Dato: $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$. *(P.A.U. Sep. 13)*

Solución: A

La actividad radiactiva es el número de desintegraciones por segundo y es proporcional a la cantidad de isótopo radiactivo

$$A = -\,\text{d}\,N / \text{d}\,t = \lambda \cdot N$$

Siendo λ la constante de desintegración radiactiva.

Integrando la ecuación anterior, se encuentra la relación entre λ y el período de semidesintegración $T_{½}$

$$N = N_0 \cdot \text{e}^{-\lambda \cdot t}$$

$$\lambda = \frac{\ln(N_0/N)}{t}$$

Cuando $t = T_{½}$, $N = N_0 / 2$

$$\lambda = \ln 2 \,/\, T_{½}$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0{,}693}{1\,[\text{día}] \cdot 24\,[\text{h/día}] \cdot 3600\,[\text{s/h}]} = 8{,}02 \cdot 10^{-6}\ \text{s}^{-1}$$

$$A = \lambda \cdot N = 8{,}02 \cdot 10^{-6}\,[\text{s}^{-1}] \cdot 0{,}500\,[\text{mol}] \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23}\,[\text{mol}^{-1}] = 2{,}42 \cdot 10^{18}\ \text{Bq}$$

C.2. La longitud de onda asociada a un electrón de 100 eV de energía cinética es:

A) $2,3\cdot 10^{-5}$ m.

B) $1,2\cdot 10^{-10}$ m.

C) 10^{-7} m.

Datos: $m_e = 9,1\cdot 10^{-31}$ kg, $h = 6,63\cdot 10^{-34}$ J·s; $q_e = -1,6\cdot 10^{-19}$ C. *(P.A.U. Sep. 13)*

Solución: B

De Broglie propuso que en algunos casos el comportamiento de ciertas partículas podría interpretarse como el de ondas cuya longitud de onda asociada λ vendría dada por la expresión:

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{m\cdot v}$$

En la ecuación, h es la constante de Planck, m la masa de la partícula y v su velocidad.
La energía cinética de 100 eV es:

$$E_c = 100 \cdot 1,6\cdot 10^{-19}\ [\text{C}] \cdot 1\ [\text{V}] = 1,6\cdot 10^{-17}\ \text{J}$$

Un electrón con esa energía cinética se mueve a una velocidad de:

$$v=\sqrt{\frac{2E_c}{m}}=\sqrt{\frac{2\cdot 1,6\cdot 10^{-17}\ [\text{J}]}{9,1\cdot 10^{-31}\ [\text{kg}]}}=5,93\cdot 10^{6}\ \text{m/s}$$

Sustituyendo en la ecuación de De Broglie, queda

$$\lambda=\frac{h}{m\cdot v}=\frac{6,63\cdot 10^{-34}\ [\text{J·s}]}{9,1\cdot 10^{-31}\ [\text{kg}]\cdot 5,93\cdot 10^{6}\ [\text{m/s}]}=1,23\cdot 10^{-10}\ \text{m}$$

C.3. Las líneas de inducción del campo magnético son:

A) Siempre cerradas.

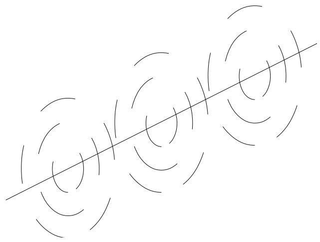
B) Abiertas o cerradas, ya que dependen del agente creador del campo magnético.

C) Siempre abiertas, por semejanza con el campo eléctrico.

(P.A.U. Sep. 13)

Solución: A

Si el campo magnético es producido por un imán, un solenoide o una espira, las fuentes del campo magnético son los polos N del elemento mientras que los sumideros son los polos S. Pero como ambos polos son inseparables, las líneas de campo son cerradas.
(Si partimos un imán en dos, cada parte sigue teniendo dos polos. No se pueden conseguir por división monopolos magnéticos)
Si el campo es producido por una corriente rectilínea indefinida, las líneas de campo son circunferencias concéntricas alrededor del hilo.



C.4. Si en la práctica de óptica geométrica la lente convergente tiene una distancia focal imagen de +10 cm, ¿a qué distancias de la lente puedes situar el objeto para obtener imágenes sobre la pantalla, si se cumple que $|s| + |s'| = 80$ cm? Dibuja la marcha de los rayos.

(P.A.U. Sep. 13)

Rta.: $s_1 = -0,117$ m, $s_2 = -0,683$ m.

Datos (convenio de signos DIN)	***Cifras significativas: 3***
Distancia focal de la lente	$f' = 10,0$ cm $= 0,100$ m
Distancia entre el objeto y su imagen	$d = 80,0$ cm $= 0,800$ m
Incógnitas	
Posición del objeto	s
Otros símbolos	
Tamaño del objeto	y
Posición de la imagen	s'

Otros símbolos

Tamaño de la imagen	y'

Ecuaciones

Relación entre la posición de la imagen y la del objeto en las lentes	$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$

Solución:

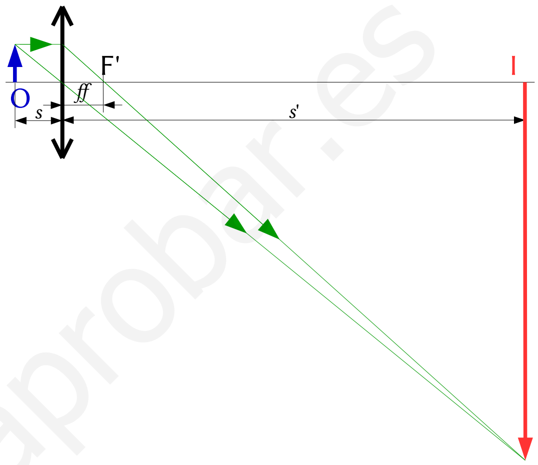
Se usa la ecuación:

$$|s| + |s'| = 0{,}800 \text{ m}$$

Teniendo en cuenta que, por el criterio de signos, la distancia del objeto a la lente es negativa, $s < 0$, pero la distancia de la imagen, cuando es real, es positiva $s' > 0$, queda

$$-s + s' = 0{,}800 \text{ m}$$

Sustituyendo f y s' en la ecuación de las lentes, queda



$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$$

$$\frac{1}{s + 0{,}800\,[\text{m}]} - \frac{1}{s} = \frac{1}{0{,}100\,[\text{m}]}$$

$$\frac{1}{s + 0{,}800} = \frac{1}{s} + \frac{1}{0{,}100} = \frac{s + 0{,}100}{0{,}100\,s}$$

$$0{,}100\ s = (s + 0{,}100)\ (s + 0{,}800)$$

$$s^2 + 0{,}800\ s + 0{,}0800 = 0$$

$$s_1 = -0{,}117 \text{ m}$$

$$s_2 = -0{,}683 \text{ m}$$

El dibujo representa de forma aproximada la primera solución.

P.1. Tres cargas eléctricas puntuales de 10^{-6} C se encuentran situadas en los vértices de un cuadrado de 1 m de lado. Calcula:

a) La intensidad del campo y el potencial electrostático en el vértice libre.

b) Módulo, dirección y sentido de la fuerza del campo electrostático sobre una carga de $-2 \cdot 10^{-6}$ C situada en dicho vértice.

c) El trabajo realizado por la fuerza del campo para trasladar dicha caga desde el vértice al centro del cuadrado. Interpreta el signo del resultado.

Dato: $K = 9 \cdot 10^9$ N·m²·C⁻². *(P.A.U. Sep. 13)*

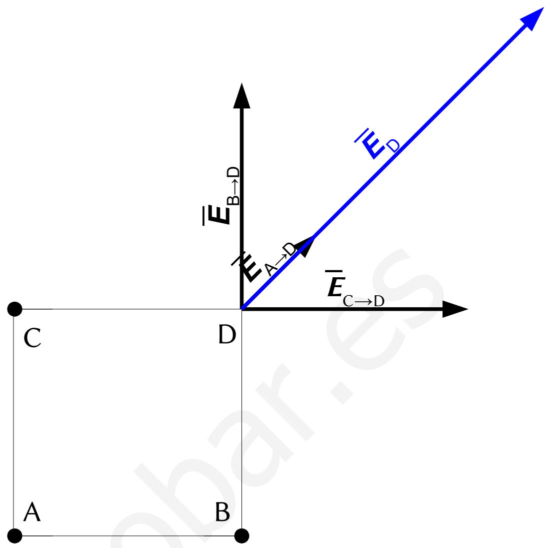
Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{E}} = 1{,}72 \cdot 10^4$ N/C, diagonal hacia fuera; $V = 2{,}44 \cdot 10^4$ V.
b) $|\overline{\boldsymbol{F}}| = 0{,}0344$ N, diagonal hacia el centro; c) $W_E = 0{,}0276$ J.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Lado del cuadrado	$l = 1{,}00$ m
Valor de la carga situada en el punto A(0, 0) m	$Q_A = 1{,}00 \cdot 10^{-6}$ C
Valor de la carga situada en el punto B(1,00, 0) m	$Q_B = 1{,}00 \cdot 10^{-6}$ C
Valor de la carga situada en el punto C(0, 1,00) m	$Q_C = 1{,}00 \cdot 10^{-6}$ C
Valor de la carga situada en el punto D(1,00, 1,00) m	$Q_D = -2{,}00 \cdot 10^{-6}$ C
Constante eléctrica	$K = 9{,}00 \cdot 10^9$ N·m²·C⁻²
Incógnitas	
Intensidad del campo electrostático en el punto D	$\overline{\boldsymbol{E}}_D$
Potencial electrostático en el punto D	V_D
Trabajo del campo al llevar a carga desde D al centro del cuadrado G	$W_{D \to G}$
Otros símbolos	
Distancia entre dos puntos A y B	r_{AB}
Ecuaciones	
Intensidad del campo electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$\vec{\boldsymbol{E}} = K \frac{Q}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$

Ecuaciones

Principio de superposición	$\vec{E}_A = \sum \vec{E}_{A\,i}$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$V = K\dfrac{Q}{r}$
Potencial electrostático en un punto debido a varias cargas	$V = \sum V_i$
Trabajo que hace la fuerza del campo cuando se mueve una carga q desde un punto A hasta otro punto B	$W_{A\to B} = q\,(V_A - V_B)$

Solución:



a) Se hace un dibujo de las cargas y de cada uno de los vectores campo y de la suma vectorial que es el vector campo $\overline{\boldsymbol{E}}$ resultante.
Las distancias BD y CD valen la longitud del lado:

$$r_{BD} = r_{CD} = l = 1{,}00 \text{ m}$$

La distancia AD es la longitud de la diagonal del cuadrado

$$r_{AD} = |\vec{r}_{AD}| = \sqrt{(1{,}00\,[\text{m}])^2 + (1{,}00\,[\text{m}])^2} = 1{,}41 \text{ m}$$

Se elige un sistema de referencia con el origen en cada carga, tomando el eje X horizontal, positivo hacia la derecha y el eje Y vertical, positivo hacia arriba.
El vector unitario $\overline{\boldsymbol{u}}_{CD}$ del punto D tomando como origen el punto C es el vector $\overline{\mathbf{i}}$ unitario del eje X.
El vector unitario $\overline{\boldsymbol{u}}_{BD}$ del punto D tomando como origen el punto B es el vector $\overline{\mathbf{j}}$ unitario del eje Y.
El vector unitario $\overline{\boldsymbol{u}}_{AD}$ del punto D tomando como origen el punto A es:

$$\vec{u}_{AD} = \frac{\vec{r}_{AD}}{|\vec{r}_{AD}|} = \frac{(1{,}00\,\vec{\mathbf{i}} + 1{,}00\,\vec{\mathbf{j}})\,[\text{m}]}{1{,}41\,[\text{m}]} = 0{,}707\,\vec{\mathbf{i}} + 0{,}707\,\vec{\mathbf{j}}$$

La intensidad de campo electrostático en el punto D, debida a la carga de 1 µC situada en el punto A es:

$$\vec{E}_{A\to D} = 9{,}00\cdot 10^9\,[\text{N·m}^2\text{C}^{-2}]\cdot\frac{1{,}00\cdot 10^{-6}\,[\text{C}]}{(1{,}41\,[\text{m}])^2}(0{,}707\,\vec{\mathbf{i}} + 0{,}707\,\vec{\mathbf{j}}) = (3{,}18\cdot 10^3\,\vec{\mathbf{i}} + 3{,}18\cdot 10^3\,\vec{\mathbf{j}})\text{ N/C}$$

La intensidad de campo electrostático en el punto D, debida a la carga de 1 µC situada en el punto B es:

$$\vec{E}_{B\to D} = 9{,}00\cdot 10^9\,[\text{N·m}^2\text{C}^{-2}]\cdot\frac{1{,}00\cdot 10^{-6}\,[\text{C}]}{(1{,}00\,[\text{m}])^2}\vec{\mathbf{j}} = 9{,}00\cdot 10^3\,\vec{\mathbf{j}}\text{ N/C}$$

Por analogía, la intensidad de campo electrostático en el punto D, debida a la carga de 1 µC situada en el punto C es:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{C\to D} = 9{,}00\cdot 10^3\,\overline{\mathbf{i}}\text{ N/C}$$

Aplicando el principio de superposición,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_D = \sum \overline{\boldsymbol{E}}_{i\to D} = \overline{\boldsymbol{E}}_{A\to D} + \overline{\boldsymbol{E}}_{B\to D} + \overline{\boldsymbol{E}}_{C\to D}$$

$$\overline{\boldsymbol{E}}_D = (3{,}18\cdot 10^3\,\overline{\mathbf{i}} + 3{,}18\cdot 10^3\,\overline{\mathbf{j}})\,[\text{N/C}] + (9{,}00\cdot 10^3\,\overline{\mathbf{j}})\,[\text{N/C}] + (9{,}00\cdot 10^3\,\overline{\mathbf{i}})\,[\text{N/C}] = (1{,}22\cdot 10^4\,\overline{\mathbf{i}} + 1{,}22\cdot 10^4\,\overline{\mathbf{j}})\text{ N/C}$$

Análisis: El vector intensidad de campo eléctrico resultado del cálculo es diagonal hacia arriba y hacia la derecha, coherente con el dibujo que se había hecho.

El valor del campo es:

$$|\vec{E}_D| = \sqrt{(1{,}22\cdot 10^4\,[\text{N/C}])^2 + (1{,}22\cdot 10^4\,[\text{N/C}])^2} = 1{,}72\cdot 10^4\text{ N/C}$$

Generalizando el resultado para cualquier sistema de referencia,

$|\overline{\boldsymbol{E}}_D| = 1{,}72\cdot 10^4$ N/C. El campo va en la dirección de la diagonal, hacia fuera.

Los potenciales electrostáticos en el punto D debidos a las cargas en C y B son iguales y valen:

$$V_{B\to D} = V_{C\to D} = 9{,}00\cdot 10^9\,[\text{N·m}^2\text{C}^{-2}]\frac{1{,}00\cdot 10^{-6}\,[\text{C}]}{(1{,}00\,[\text{m}])} = 9{,}00\cdot 10^3\text{ V}$$

El potencial electrostático en el punto D debido a la carga en A vale:

$$V_{A\to D}=9{,}00\cdot 10^{9}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2C^{-2}}]\frac{1{,}00\cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(1{,}41\ [\mathrm{m}])}=6{,}36\cdot 10^{3}\ \mathrm{V}$$

El potencial electrostático en un punto debido a la presencia de varias cargas, es la suma algebraica de los potenciales debidos a cada carga.

$$V_D = V_{A\to D} + V_{B\to D} + V_{C\to D} = 6{,}36{\cdot}10^3\ [\mathrm{V}] + 2 \cdot 9{,}00{\cdot}10^3\ [\mathrm{V}] = 2{,}44{\cdot}10^4\ \mathrm{V}$$

b) Como la intensidad del campo electrostático en un punto es la fuerza sobre la unidad de carga positiva colocada en ese punto, podemos calcular la fuerza electrostática sobre la carga de −2 μC a partir del vector intensidad de campo electrostático:

$$\overline{\boldsymbol{F}} = q \cdot \overline{\boldsymbol{E}} = -2{,}00{\cdot}10^{-6}\ [\mathrm{C}]\ (1{,}22{\cdot}10^4\ \overline{\mathbf{i}} + 1{,}22{\cdot}10^4\ \overline{\mathbf{j}})\ [\mathrm{N/C}] = (-2{,}44{\cdot}10^{-2}\ \overline{\mathbf{i}} - 2{,}44{\cdot}10^{-2}\ \overline{\mathbf{j}})\ \mathrm{N}$$

Generalizando el resultado para cualquier sistema de referencia,

$$|\overline{\boldsymbol{F}}| = |q| \cdot |\overline{\boldsymbol{E}}| = 2{,}00{\cdot}10^{-6}\ [\mathrm{C}] \cdot 1{,}72{\cdot}10^4\ [\mathrm{N/C}] = 3{,}44{\cdot}10^{-2}\ \mathrm{N}$$

La fuerza va en la dirección de la diagonal, hacia el centro del cuadrado, porque la carga es negativa.

c) El trabajo que hace la fuerza del campo cuando se traslada la carga q = −2 μC desde el vértice D al centro G del cuadrado es

$$W_{D\to G} = q\ (V_D - V_G)$$

Falta calcular el potencial electrostático en el punto G situado en el centro del cuadrado de forma análoga a como se hizo antes.
La distancia de cada vértice al centro del cuadrado es la mitad de la diagonal:

$$r_{AG} = r_{BG} = r_{CG} = 1{,}41\ [\mathrm{m}]\ /\ 2 = 0{,}707\ \mathrm{m}$$

Los potenciales electrostáticos en el punto G debidos a las cargas en A, B y C son iguales y valen:

$$V_{A\to G}=V_{B\to G}=V_{C\to G}=V=9{,}00\cdot 10^{9}\ [\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}}]\frac{1{,}00\cdot 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(0{,}707\ [\mathrm{m}])}=1{,}27\cdot 10^{4}\ \mathrm{V}$$

El potencial electrostático en G es la suma algebraica de los potenciales debidos a cada carga.

$$V_G = V_{A\to G} + V_{B\to G} + V_{C\to G} = 3 \cdot V = 3 \cdot 1{,}27{\cdot}10^4\ [\mathrm{V}] = 3{,}82{\cdot}10^4\ \mathrm{V}$$

El trabajo de la fuerza del campo es

$$W_E = W_{D\to G} = q\ (V_D - V_G) = -2{,}00{\cdot}10^{-6}\ [\mathrm{C}] \cdot (2{,}44{\cdot}10^4 - 3{,}82{\cdot}10^4)\ [\mathrm{V}] = 2{,}76{\cdot}10^{-2}\ \mathrm{J}$$

El trabajo es positivo porque el sentido de la fuerza (hacia el centro del cuadrado) y el del desplazamiento son iguales.

P.2. Una bola colgada de un hilo de 2 m de longitud se desvía de la vertical un ángulo de 4°, se suelta y se observan sus oscilaciones. Halla:
a) La ecuación del movimiento armónico simple.
b) La velocidad máxima de la bola cuando pasa por la posición de equilibrio.
c) Comprueba el resultado obtenido en el apartado anterior, utilizando la ecuación de la conservación de la energía mecánica.

(P.A.U. Sep. 13)

Rta.: a) $s = 0{,}140\ \mathrm{sen}(2{,}21 \cdot t + 4{,}71)$ [m]; b) $v_m = 0{,}309$ m/s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Longitud del hilo	$L = 2{,}00$ m
Amplitud angular (elongación angular máxima)	$\theta_0 = 4{,}00° = 0{,}0698$ rad
Aceleración de la gravedad (no la dan pero sin ella no se puede resolver)	$g = 9{,}81$ m/s²
Incógnitas	
Elongación en función del tiempo	θ
Velocidad máxima de la bola	v_m
Otros símbolos	
Pulsación (frecuencia angular)	ω

Ecuaciones

De movimiento en el M.A.S. $\theta = \theta_0 \text{ sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$

$s = A \text{ sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$

Período del péndulo $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

Relación entre el arco s y el ángulo central θ en una circunferencia de radio R $s = \theta \cdot R$

Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia y el período $\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$

Solución:

a) Tomando el movimiento de péndulo como armónico simple porque $\theta \approx \text{sen } \theta$

$$\text{sen } 0{,}0698 = 0{,}0697 \approx 0{,}0698$$

Se calcula el período y la frecuencia angular

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2{,}00 \text{ [m]}}{9{,}81 \text{ [m/s}^2]}} = 2{,}84 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi \text{ [rad]}}{2{,}84 \text{ [s]}} = 2{,}21 \text{ rad/s}$$

La ecuación de movimiento queda

$$\theta = 0{,}0698 \cdot \text{sen}(2{,}21 \cdot t + \varphi_0) \text{ [rad]}$$

Cuando $t = 0$, $\theta = 0{,}0698$ (está en la posición de máxima elongación),

$$0{,}0698 = 0{,}0698 \cdot \text{sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\text{sen } \varphi_0 = 1 \begin{cases} \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \\ \varphi_0 = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Tomando como positivo el sentido en que se mueva al principio, queda

$$\theta = 0{,}0698 \cdot \text{sen}(2{,}21 \text{ t} + 4{,}71) \text{ [rad]}$$

La elongación máxima o amplitud:

$$A = s_m = \theta_0 \cdot R = \theta_0 \cdot L = 0{,}0698 \text{ [rad]} \cdot 2{,}00 \text{ [m]} = 0{,}140 \text{ m}$$

La ecuación de movimiento quedaría

$$s = 0{,}140 \text{ sen}(2{,}21 \cdot t + 4{,}71) \text{ [m]}$$

b) La velocidad máxima cuando pasa por la posición de equilibrio, se calcula derivando la ecuación de movimiento

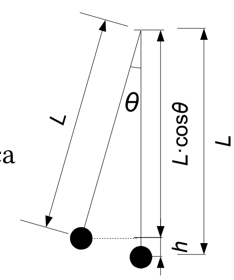
$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\{0{,}140 \text{ sen}(2{,}21 \cdot t + 4{,}71)\}}{\mathrm{d}t} = 0{,}309 \cos(2{,}21 \cdot t + 4{,}71) \text{ m/s}$$

Alcanza un valor máximo cuando el coseno de la fase es 1.

$$v_m = 0{,}309 \text{ m/s}$$

c) En el punto más alto, la altura vale:

$$h_m = L - L \cos \theta_0 = L\,(1 - \cos \theta_0) = 2{,}00 \text{ [m]} \,(1 - \cos 0{,}0698) = 4{,}87 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$



Como la única fuerza no conservativa (la tensión del hilo) no realiza trabajo (porque el desplazamiento es perpendicular siempre a la dirección de la fuerza), la energía mecánica se conserva. Entre la posición más alta (punto 1) y la más baja (punto 2)

$$(E_c + E_p)_1 = (E_c + E_p)_2$$

$$\tfrac{1}{2}\, m \cdot v_1^2 + m \cdot g \cdot h_1 = \tfrac{1}{2}\, m \cdot v_2^2 + m \cdot g \cdot h_2$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}\cdot 0^2+\cancel{m}\cdot g\cdot h_1=\frac{1}{2}\cancel{m}\cdot v_2^2+\cancel{m}\cdot g\cdot 0$$

$$2\,g\cdot h_1=v_2^2$$

$$v_2=\sqrt{2\,g\cdot h_1}=\sqrt{2\cdot 9{,}81\,[\mathrm{m/s^2}]\cdot 4{,}87\cdot 10^{-3}\,[\mathrm{m}]}=0{,}309\ \mathrm{m/s}$$

Cuestiones y problemas de las Pruebas de acceso a la Universidad (P.A.U.) en Galicia.
Respuestas y composición de Alfonso J. Barbadillo Marán.
Algunos cálculos se hicieron con una hoja de cálculo de LibreOffice u OpenOffice del mismo autor.
Algunas ecuaciones y las fórmulas orgánicas se construyeron con la extensión CLC09 de Charles Lalanne-Cassou.
La traducción al/desde el gallego se realizó con la ayuda de *traducindote*, de Óscar Hermida López.
Se procuró seguir las recomendaciones del Centro Español de Metrología (CEM)

Actualizado: 11/02/22