PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas. Está permitido el uso de calculadoras científicas que no sean programables.

OPCIÓN A

1º) A la compañía de transportes que lleva a la escuela municipal los 160 jóvenes de su alumnado, un servicio de un autobús de 40 plazas le supone un gasto de 120 euros y uno de un microbús de 20 plazas sólo 80 euros. Se debe decidir el número de autobuses X y microbuses Y que transporten a todo el alumnado, minimizando el gasto y cumpliendo ciertas limitaciones: la compañía sólo cuenta con 5 conductores de autobús (aptos para conducir microbuses) y otros 7 conductores de microbús (no aptos para conducir autobuses). Además las autoridades de tráfico obligan a que circulen al menos el doble de microbuses que de autobuses. Se pide:

a) Representar en el plano XY la región de soluciones factibles del programa.

b) Encontrar el número óptimo de autobuses X y microbuses Y que minimizan el gasto de la empresa y cumplen con las restricciones. Calcular dicho gasto.

Las restricciones del ejercicio se establecen en el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 40x+20y \geq 160 \\ x+y \leq 12 \\ 2x \leq y \\ x \leq 5;\, y \leq 12 \end{array}\right\} \text{ o mejor: } \left.\begin{array}{r} 2x+y \geq 8 \\ x+y \leq 12 \\ 2x-y \leq 0 \\ x \leq 5;\, y \leq 12 \end{array}\right\}.$$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y)=120x+80y$.

La región factible se indica en la figura:

1 $\Rightarrow 2x+y \geq 8 \Rightarrow y=8-2x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$

x	0	4
y	8	0

2 $\Rightarrow x+y \leq 12 \Rightarrow y=12-x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	12	0
y	0	12

③ $\Rightarrow 2x - y \geq 0 \Rightarrow y = 2x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	4
y	0	8

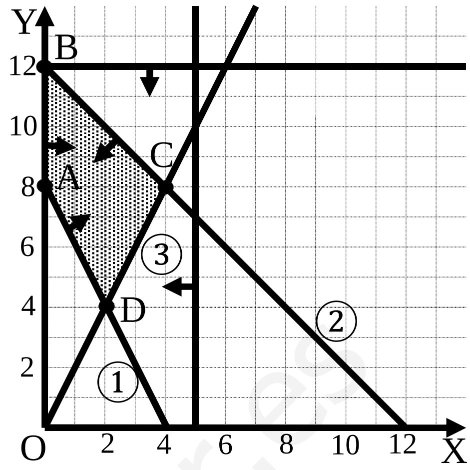
Los vértices de la zona factible, que es abierta, son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 8 \\ 2x + y = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A(0,8)}.$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 12 \\ x + y = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{B(0,12)}.$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + y = 8 \\ x + y = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{C(4,8)}.$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + y = 8 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{D(2,4)}.$$



$b)$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(0,8) = 120 \cdot 0 + 80 \cdot 8 = 0 + 640 = 640.$$

$$B \Rightarrow f(0,12) = 120 \cdot 0 + 80 \cdot 12 = 0 + 960 = 960.$$

$$C \Rightarrow f(4,8) = 120 \cdot 4 + 80 \cdot 8 = 480 + 640 = 1.120.$$

$$D \Rightarrow f(2,4) = 120 \cdot 2 + 80 \cdot 4 = 240 + 320 = \underline{560}.$$

$$\underline{El\ gasto\ es\ minimo\ utilizando\ 2\ autobuses\ y\ 4\ microbuses}\ .$$

$$\underline{El\ gasto\ mínimo\ es\ de\ 560\ euros}.$$

****

2º) Dos curvas representadas por las funciones $f(x) = \frac{A}{x+9}$ y $g(x) = \frac{Bx}{x^2+6x+a}$ dependen de los parámetros desconocidos A, B y a. Responder:

a) ¿Qué valores de A y B hacen que las curvas $f(x)$ y $g(x)$ pasen por el punto $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$ y tomen valores iguales en el punto $x = 5$, es decir, $f(5) = g(5)$?

b) Calcula los máximos y mínimos de $f(x)$ y $g(x)$.

c) Indica los dominios de definiciones de $f(x)$ y $g(x)$.

----

a)

$$f(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{A}{1+9} \Rightarrow 2A = 10 \Rightarrow \underline{A = 5}.$$

$$g(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{B \cdot 1}{1^2+6\cdot 1+a};\ \frac{1}{2} = \frac{B}{7+a};\ 2B = 7 + a \Rightarrow \boldsymbol{2B - a = 7}. \quad (1)$$

$$f(5) = g(5) \Rightarrow \frac{5}{5+9} = \frac{B \cdot 5}{5^2+6\cdot 5+a};\ \frac{1}{14} = \frac{B}{25+30+a};\ \frac{1}{14} = \frac{B}{55+a};$$

$55 + a = 14B$; $\boldsymbol{14B - a = 55}$. (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} 2B - a = 7 \\ 14B - a = 605 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -2B + a = -7 \\ 14B - a = 55 \end{array}\right\} \Rightarrow 12B = 48 \Rightarrow \underline{B = 4},\ \underline{a = 1}.$$

b)

Para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada para ese punto.

$$f'(x) = \frac{-5}{(x+9)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-5}{(x+9)^2} = 0, x \notin R.$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ no\ tiene\ máximos\ ni\ mínimos.}$$

$$g'(x) = \frac{4\cdot(x^2+6x+1) - 4x\cdot(2x+6)}{(x^2+6x+1)^2} = 4 \cdot \frac{x^2+6x+1-2x^2-6x}{(x^2+6x+1)^2} = 4 \cdot \frac{-x^2+1}{(x^2+6x+1)^2}.$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow = 4 \cdot \frac{-x^2+1}{(x^2+6x+1)^2} = 0;\ -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x_1 = -1, x_2 = 1}.$$

La condición anterior para que una función tenga extremos relativos no es suficiente; para que existe el extremo relativo es necesario que no se anule su segunda derivada para los valores que anulan la primera. Si resulta positiva la segunda derivada, la función tiene un máximo y, si es negativa, un máximo relativo.

$$g''(x) = 4 \cdot \frac{-2x \cdot (x^2+6x+1)^2 + (x^2-1) \cdot [2 \cdot (x^2+6x+1) \cdot (2x+6)]}{(x^2+6x+1)^4} =$$

$$= 4 \cdot \frac{-2x \cdot (x^2+6x+1) + 2(x^2-1)(2x+6)}{(x^2+6x+1)^3} = 8 \cdot \frac{-x^3-6x^2-x+2(2x^3+6x^2-2x-6)}{(x^2+6x+1)^3} =$$

$$= 8 \cdot \frac{-x^3-6x^2-x+4x^3+12x^2-4x-12}{(x^2+6x+1)^3} = 8 \cdot \frac{6x^2-5x-12}{(x^2+6x+1)^3}.$$

$$g''(-1) = 8 \cdot \frac{6+5-12}{(1-6+1)^3} = \frac{-8}{(-6)^3} > 0 \Rightarrow \boldsymbol{M\acute{\imath}nimo\ relativo\ para\ x = -1}.$$

$$g(-1) = \frac{-4}{1-6+1} = \frac{-4}{-4} = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{M\acute{\imath}nimo:\ A(-1, 1)}.$$

$$g''(1) = 8 \cdot \frac{6-5-12}{(1+6+1)^3} = 8 \cdot \frac{-11}{(8)^3} < 0 \Rightarrow \boldsymbol{M\acute{a}ximo\ relativo\ para\ x = 1}.$$

$$g(1) = \frac{4}{1+6+1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{M\acute{a}ximo:\ B\left(1, \frac{1}{2}\right)}.$$

$c)$

El dominio de definición de una función racional es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$f(x) = \frac{5}{x+9} \Rightarrow x + 9 = 0 \Rightarrow x = -9.$$

$$\underline{D(f) \Rightarrow R - \{-9\}}.$$

$$g(x) = \frac{4x}{x^2+6x+1} \Rightarrow x^2 + 6x + 1 = 0; \ \ x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-4}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{32}}{2} =$$

$$= \frac{-6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -3 \pm 2\sqrt{2}.$$

$$\underline{D(f) \Rightarrow R - \left\{-3 - 2\sqrt{2}, -3 + 2\sqrt{2}\right\}}.$$

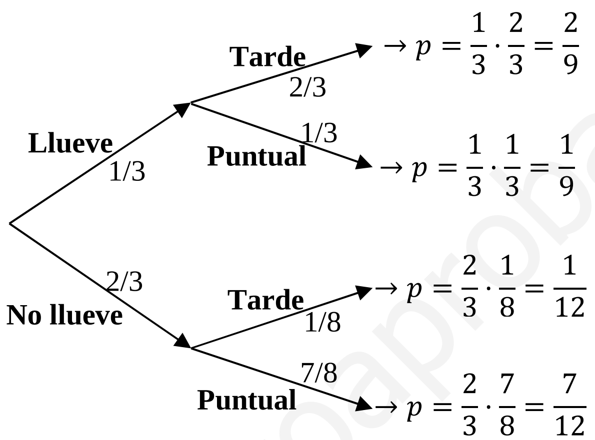
****

3º) En mi ciudad llueve uno de cada tres días. Cuando llueve se producen atascos y la probabilidad de llegar tarde al trabajo es de 2/3. En cambio, cuando no llueve la probabilidad de llegar tarde al trabajo es de 1/8. Responder:

a) ¿Cuál es la probabilidad de llegar tarde al trabajo?

b) Hoy he llegado tarde al trabajo, ¿cuál es la probabilidad de que haya llovido?

c) Sabiendo que ayer llovió y hoy no lo ha hecho, ¿cuál es la probabilidad de que haya llegado al trabajo uno de los dos días tarde y el otro puntual?



a)

$$P = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{9} + \frac{1}{12} = \frac{8+3}{36} = \underline{\frac{11}{36}}.$$

b)

$$P = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{9}+\frac{1}{12}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{11}{36}} = \underline{\frac{8}{11}}.$$

c)

Primera forma: considerando la probabilidad de llegar tarde el día de lluvia y puntual el día de no lluvia más la probabilidad de llevar puntual el día de lluvia y tarde el día de no lluvia:

$$P = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{14}{24} + \frac{1}{24} = \frac{15}{24} = \underline{\frac{5}{8}}.$$

Segunda forma: por el suceso contrario. Lo pedido es equivalente a la unidad menos la suma de las probabilidades de llegar tarde los dos días más la probabilidad de llegar puntual los dos días:

$$P = 1 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8}\right) = 1 - \left(\frac{2}{24} + \frac{7}{24}\right) = 1 - \frac{9}{24} = \frac{24-9}{24} = \frac{15}{24} = \underline{\frac{5}{8}}.$$

****

4º) En unas pruebas clasificatorias de salto de longitud para una olimpiada la media de los primeros 400 intentos es de 7,75 m. Se sabe que los saltos se comportan como una variable aleatoria que sigue una distribución normal con varianza $\sigma^2 = 0{,}36\ m^2$.

a) Construye un intervalo, de un 95 % de confianza, para la media μ de los saltos de la población.

b) ¿Cuál sería el mínimo tamaño muestral necesario para que pueda decirse que la verdadera media de los saltos está a menos de 4 cm de la media muestral, con un nivel de confianza del 90 %?

----

a)

$1-\alpha = 0{,}95 \ \rightarrow\ \alpha = 1-0{,}95 = 0{,}05 \ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = \mathbf{1,96}.$

$(1-0{,}025 = 0{,}9750 \ \rightarrow z = 1{,}96).$

Siendo $\overline{x} = 7{,}75, \sigma = 0{,}6\ y\ n = 400$, se aplica la fórmula adecuada que nos da el intervalo de confianza pedido, que es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(7{,}75 - 1{,}96 \cdot \frac{0{,}6}{\sqrt{400}}, 7'75 + 1{,}96 \cdot \frac{0{,}6}{\sqrt{400}}\right);$$

$(7{,}75 - 1{,}96 \cdot 0'03, 7'75 + 1{,}96 \cdot 0{,}03);\ (7{,}75 - 0'0588, 7'75 + 0{,}0588).$

$\underline{Intervalo\ de\ confianza: (7'69, 7'81)}.$

b)

$E = 4\ cm = 0{,}04\ m, \sigma = 6.$

$1-\alpha = 0{,}90 \ \rightarrow\ \alpha = 1-0{,}90 = 0{,}10 \ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}05} = \mathbf{1,645}.$

$(1-0{,}05 = 0{,}9500 \ \rightarrow z = 1{,}645).$

Sabiendo que el error es: $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$:

$$n = \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1{,}645 \cdot 0{,}6}{0{,}04}\right)^2 = \left(\frac{0{,}987}{0{,}04}\right)^2 = 24{,}675^2 = 608{,}8.$$

$\underline{La\ muestra\ debe\ ser\ como\ mínimo\ de\ 609\ saltos}.$

****

OPCIÓN B

1º) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -1 & 4\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}2 & u\\ v & -2\end{pmatrix}$.

$a)$ Determinar los valores de los parámetros a, β, μ y v para que se cumpla la igualdad matricial: $A\cdot\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\cdot B^t + C\cdot\begin{pmatrix}0 & a\\ \beta & 0\end{pmatrix} = D$, siendo B^t la matriz traspuesta de B.

$b)$ Siendo A^{-1} la matriz inversa de A, encontrar los valores de las constantes a y b que verifiquen: $A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = B\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$.

$a)$

$$B^t=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}.$$

$$A\cdot\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\cdot B^t + C\cdot\begin{pmatrix}0 & a\\ \beta & 0\end{pmatrix} = D;$$

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & a\\ \beta & 0\end{pmatrix} = D;$$

$$\begin{pmatrix}2a & -\beta\\ -3a & 3\beta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -2\alpha\\ 4\beta & -\alpha\end{pmatrix} = D;$$

$$\begin{pmatrix}-2\beta & -2a-2\beta\\ 6\beta & 3a+6\beta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -2\alpha\\ 4\beta & -\alpha\end{pmatrix} = D;\ \begin{pmatrix}-2\beta & -4a-2\beta\\ 10\beta & 2a+6\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & u\\ v & -2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}-2\beta=2\\ 10\beta=v\\ -4\alpha-2\beta=u\\ 2\alpha+6\beta=-2\end{Bmatrix}\Rightarrow\ \underline{\beta=-1};\ \underline{v=-10};\ \underline{a=2},\underline{u=-6}.$$

$b)$

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 3\end{pmatrix};\ \ |A|=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -3 & 3\end{vmatrix}=6-3=3.$$

$$Adj.\,de\ A^t=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{A^{-1}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{3} & \mathbf{1}\\ \mathbf{3} & \mathbf{2}\end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=B\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2b\\ -a+2b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix};$$

$A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2b+1\\ -a+2b+2\end{pmatrix}\Rightarrow$ Multiplicando por la izquierda los dos términos por A, resulta:

$$A \cdot A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 2b+1 \\ -a+2b+2 \end{pmatrix}; \;\; I \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 2b+1 \\ -a+2b+2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2b+1 \\ -a+2b+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4b+2+a-2b-2 \\ -6b-3-3a+6b+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b+a \\ 3-3a \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 2b+a \\ b = 3-3a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{b = 0}, \underline{a = 1}.$$

****

2º) Para financiar el viaje de fin de curso un instituto propone la venta de camisetas. Se ha hecho un estudio previo y se sabe que el número de camisetas NC que se vendan dependerá del precio x (en euros) según la función $NC(x) = 180 - 10x$, $0 \leq x \leq 18$.

a) ¿Cuántas camisetas se venderían a 10 euros? Interpreta el aumento o disminución del número de camisetas vendidas por cada euro que aumente o disminuya el precio.

b) Obtén la función que expresa los ingresos por la venta. ¿Para qué precio los ingresos son máximos? ¿Cuántas camisetas se venderían en este caso?

c) El almacén que suministra camisetas nos cobra en total $C(z) = 4z + 50$ euros por un pedido de z camisetas. Obtén el coste total pagado al almacén por las camisetas vendidas en función del precio de venta x. Obtén la función de beneficio (en función de x) y el precio x para conseguir el máximo beneficio.

----

a)

$$NC(10) = 180 - 10 \cdot 10 = 180 - 100 = 80.$$

$$\underline{A\ 10\ euros\ se\ venderían\ 80\ camisetas}.$$

La función NC es una recta afín de pendiente negativa por lo cual las coordenadas de sus puntos son inversamente proporcionales.

$$\underline{El\ aumento\ del\ precio\ disminuye\ las\ camisetas\ vendidas\ y\ viceversa}.$$

b)

La función ingresos $I(x)$ se obtiene multiplicando las camisetas vendidas por el precio de las camisetas:

$$I(x) = x \cdot NC(x) = x \cdot (180 - 10x) = -10x^2 + 180x.$$

$$\underline{I(x) = -10x^2 + 180x}.$$

Por ser la función de ingresos una parábola cóncava ($\cap$) tiene máximo.

Una función ingresos presenta su máximo absoluto para los valores que anulan su primera derivada:

$$I'(x) = -20x + 180 = 0 \Rightarrow -20(x - 9) = 0 \ \Rightarrow \boldsymbol{x = 9}.$$

$$\underline{Los\ ingresos\ son\ máximos\ cuando\ el\ precio\ de\ las\ camisetas\ es\ de\ 9\ euros}.$$

$$I(9) = -10 \cdot 9^2 + 180 \cdot 9 = 9 \cdot (-90 + 180) = 9 \cdot 90 = 810.$$

$$\underline{El\ ingreso\ máximo\ es\ de\ 810\ euros}.$$

$c)$

El coste de x camisetas es $NC(x) = 180 - 10x$, por consiguiente, el almacén nos cobra por x camisetas:

$$C(x) = 4 \cdot (180 - 10x) + 50 = 720 - 40x + 50 = \mathbf{770 - 40}\boldsymbol{x}.$$

Como los beneficios son los ingresos menos el coste, la función beneficios es la siguiente:

$$B(x) = I(x) - C(x) = -10x^2 + 180x - (770 - 40x) =$$

$$= -10x^2 + 180x - 770 + 40x = -10x^2 + 220x - 770.$$

$$\underline{B(x) = -10x^2 + 220x - 770}.$$

Al igual que la función ingresos, la función beneficios es también una parábola cóncava (∩) , por lo que tiene máximo.

$$B'(x) = -20x + 220 = 0 \Rightarrow -20(x - 11) = 0 \ \Rightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{11}.$$

$$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ cuando\ el\ precio\ de\ las\ camisetas\ es\ de\ 11\ euros}.$$

****

3º) Un bingo ha sustituido el clásico dado en forma de cubo por uno nuevo en forma de dodecaedro. En las 12 caras del dado se alternan los números 1, 2, 3, 4 y 5. El 1 aparece en una cara, el 2 en una cara, el 3 en dos caras, el 4 en tres caras y el 5 en cinco caras. Si el dado está equilibrado, es decir, la probabilidad de que al lanzarlo salga cualquier cara es la misma, calcula:

a) Se le lanza dos veces el dado, ¿cuál es la probabilidad de que salgan dos números impares?

b) Si se lanza tres veces el dado, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los números aparecidos sea 6?

----

a)

El espacio muestral es el siguiente: $E = \begin{Bmatrix} \mathbf{11}, 12, \mathbf{13}, 14, \mathbf{15} \\ 21, 22, 23, 24, 25 \\ \mathbf{31}, 32, \mathbf{33}, 34, \mathbf{35} \\ 41, 42, 43, 44, 45 \\ \mathbf{51}, 52, \mathbf{53}, 54, \mathbf{55} \end{Bmatrix}$.

Si los sucesos fueran equiprobables la solución se obtendría aplicando la regla de Laplace; pero como no es así, la probabilidad pedida es la suma de las probabilidades de los sucesos favorables, que son los marcados en negrita.

Las probabilidades de obtener los diferentes números son las siguientes:

$P1 = P2 = \frac{1}{12}, P3 = \frac{2}{12}, P4 = \frac{3}{12}, P5 = \frac{5}{12}$.

Son equiprobables los sucesos: $13 \rightarrow 31, 15 \rightarrow 51, 35 \rightarrow 53$.

La probabilidad pedida $\{11, \overbrace{13, 31}, \overbrace{15, 51}, 33, \overbrace{35, 53}, 55\}$ es la siguiente:

$$P = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} + 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{2}{12} + 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{5}{12} + \frac{2}{12} \cdot \frac{2}{12} + 2 \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{5}{12} + \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} =$$

$$= \frac{1+4+10+4+20+25}{12^2} = \frac{64}{124} = \frac{16}{31} \cong 0{,}516.$$

$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ salgan\ dos\ número\ impares\ es\ P = \frac{16}{31} \cong 0{,}516.}$

b)

Los casos favorables son las permutaciones de los sucesos: $\{114, 123, 222\}$.

$114 \rightarrow P_3^2 = \frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3, que\ son: 114, 141, 114$. (equiprobables).

$123 \rightarrow P_3 = 3! = 6, que\ son: 123, 132, 213, 231, 312, 321$. (equiprobables).

$222 \rightarrow P_3^3 = \frac{3!}{3!} = \frac{6}{6} = 1, que\ es: 222.$

La probabilidad pedida es la siguiente:

$$P = 3 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{12} + 6 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{2}{12} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} = \frac{9+12+1}{12^3} = \frac{22}{12 \cdot 144} = \frac{11}{6 \cdot 144} =$$

$$= \frac{11}{864} \cong 0{,}0127.$$

$$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ sumen\ 6\ es\ P = \frac{11}{864} \cong 0{,}0127.}$$

****

4º) La estación meteorológica de una ciudad indica que la temperatura máxima de los días de agosto sigue una distribución normal de media 28º C y desviación típica 4º C. Se pide:

a) La probabilidad de que un día de agosto la temperatura máxima alcanzada sea mayor que 32º C.

b) En el mes de agosto de un año concreto, ¿cuál es el número de días en que se espera una temperatura máxima inferior a 25º C?

c) La probabilidad de que un día de agosto la temperatura máxima esté entre 28ºC y 32º C.

d) ¿Cuál es, con una probabilidad del 95 %, el valor que no será superado por la temperatura máxima de un día de agosto?

$$n = 31 \ \rightarrow \ \overline{X} = 28 \rightarrow \sigma = 4.$$

a)

$$p\left(\overline{X} > 32\right) = p\left(\frac{\overline{X}-28}{4} > \frac{32-28}{4}\right) = p(Z > 1) = 1 - p(Z \leq 1) =$$

$$= 1 - 0{,}8413 = \underline{0{,}1587}.$$

$$\underline{La\ probabilidad\ que\ la\ temperatura\ sea\ mayor\ de\ 35°\ algún\ día\ es\ 0{,}1587.}$$

b)

La probabilidad de que algún día la temperatura sea menor de 25º es:

$$p\left(\overline{X} < 25\right) = p\left(\frac{\overline{X}-28}{4} < \frac{25-28}{4}\right) = p(Z < -0{,}75) = 1 - 0{,}7743 = 0{,}2266.$$

Como agosto tiene 31 días, la probabilidad pedida es:

$$P = 0{,}2266 \cdot 31 = 7{,}02\ días \cong 7\ días.$$

$$\underline{La\ probabilidad\ que\ la\ temperatura\ sea\ menor\ de\ 25°\ es\ de\ 7\ días.}$$

c)

$$p\left(28 \leq \overline{X} \leq 32\right) = p\left(\frac{28-28}{4} \leq \frac{\overline{X}-28}{4} \leq \frac{32-28}{4}\right) = p(0 \leq Z \leq 1) =$$

$$= p(Z \leq 1) - p(Z \leq 0) = 0{,}8413 - 0{,}5 = \underline{0{,}3413}.$$

$$\underline{Probabilidad\ que\ la\ temperatura\ sea\ 28° \leq t \leq 32\ es\ 0{,}3413.}$$

$d)$

$$p(\overline{X} < t) = 0{,}95 \Rightarrow p\left(\frac{\overline{X}-28}{4} \leq \frac{t-28}{4}\right) = 0{,}95.$$

Mirando en el interior de la tabla dada de las áreas limitadas por la curva $N(0, 1)$, con el valor de 0,95 se obtiene: 1,645.

$$\frac{t-28}{4} = 1{,}645;\ \ t - 28 = 6{,}58\ \Rightarrow t = 34{,}58.$$

$\underline{Con\ probabilidad\ del\ 95\ \%\ la\ temperatura\ no\ será\ mayor\ de\ 35{,}58°C.}$

****