PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JULIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas. Está permitido el uso de calculadoras científicas que no sean programables.

OPCIÓN A

1º) Sean las cuatro inecuaciones lineales:

$$(i)\ \ 4y - x \geq 4;\ \ (ii)\ \ 2y - x \leq 6;\ \ (iii)\ \ y - x \leq 1;\ \ (iv)\ \ 2y + x \leq 8.$$

a) Dibuja en el plano XY el recinto limitado por las inecuaciones dadas. ¿Qué inecuación es superflua? (su ausencia no altera dicho recinto).

b) ¿Cuál es el máximo de la función $f(x, y) = 3x - 2y$ en el recinto definido en el apartado anterior?

----

a)

$$1 \Rightarrow 4y - x \geq 4 \Rightarrow y \geq \frac{x+4}{4} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$$

x	0	4
y	1	2

$$2 \Rightarrow 2y - x \leq 6 \Rightarrow y \leq \frac{x+6}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$$

x	0	4
y	3	5

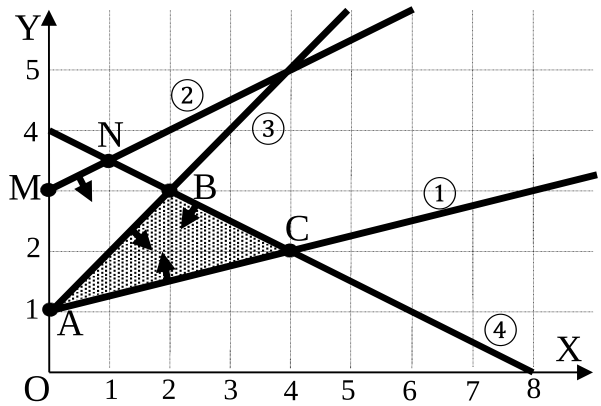
$$3 \Rightarrow y - x \leq 1 \Rightarrow y \leq x + 1 \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$$

x	0	4
y	1	5

$$4 \Rightarrow 2y + x \leq 8 \Rightarrow y \leq \frac{8-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$$

x	0	8
y	4	0

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.



Como se aprecia en la figura:

$\underline{La\ inecuación\ supérflua\ es\ la\ 2.}$

Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{matrix} 4y - x = 4 \\ y - x = 1 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -x + 4y = 4 \\ x - y = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3y = 3;\ y = 1 \Rightarrow A(0, 1).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{matrix} y - x = 1 \\ 2y + x = 8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3y = 9;\ y = 3 \Rightarrow B(2, 3).$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{matrix} 4y - x = 4 \\ 2y + x = 8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 6y = 12;\ y = 2 \Rightarrow C(4, 2).$$

b)

La función de objetivos es $f(x, y) = 3x - 2y$.

El valor de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(0, 1) = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = 0 - 2 = -2.$$

$$B \Rightarrow f(2, 3) = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 6 - 6 = 0.$$

$$C \Rightarrow f(4, 2) = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 12 - 4 = 8.$$

$$\underline{El\ máximo\ se\ alcanza\ en\ el\ punto\ C(4, 2)}.$$

****

2º) En el periódico local se publican al mes x anuncios de un gimnasio, para captar abonados, siendo $0 \leq x \leq 14$. El precio por anuncio es de 300 euros. El número de abonados se estima mediante la función $A(x) = -x^2 + 28x$, y cada uno paga mensualmente 100 euros. Además del gasto en anuncios, el gimnasio gasta mensualmente 12.000 euros en mantenimiento. El balance mensual, $f(x)$, son las cuotas de socios menos los gastos.

a) ¿Cuál es el menor número de anuncios a contratar para eliminar las pérdidas y conseguir que el negocio sea rentable?

b) ¿Cuántos anuncios deben contratarse para maximizar las ganancias y a cuántos euros ascienden dichas ganancias?

----

a)

$Ingresos \Rightarrow I(x) = 100 \cdot A(x) = -100x^2 + 2.800x.$

$Gastos \Rightarrow G(x) = 300 \cdot x + 12.000 = 300x + 12.000.$

$Balance \Rightarrow f(x) = I(x) - G(x) = -100x^2 + 2.800x - (300x + 12.000) =$

$= -100x^2 + 2.800x - 300x - 12.000 = -100x^2 + 2.500x - 12.000.$

$f(x) = 0 \Rightarrow -100x^2 + 2.500x - 12.000 = 0;\ \ x^2 - 25x + 120 = 0;$

$x = \frac{25 \pm \sqrt{625-480}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{125}}{2} = \frac{25 \pm 5\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_1 = 6{,}91;\ x_2 = 18{,}09 \notin [0, 14].$

Por ser $f(x)$ una parábola cóncava es $f(x) > 0, \forall x > 6{,}91.$

Como $x \in N$:

$\underline{El\ menor\ número\ de\ anuncios\ que\ hace\ rentable\ el\ gimnasio\ es\ 7.}$

b)

Una función polinómica tiene un máximo relativo cuando se anula su primera derivada y es negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$f'(x) = -200x + 2.500.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -200x + 2.500 = 0;\ -2x + 25 = 0 \Rightarrow x = \frac{25}{2} = 12{,}5.$

Como $x \in N$:

$\underline{El\ mayor\ beneficio\ se\ obtiene\ con\ 12\ anuncios\ mensuales.}$

Nota: Teniendo en cuenta que $f(x)$ es una parábola cóncava $(\cap)$ cuyo eje es la recta $x = 12{,}5$, también es solución considerar 13 anuncios, por ser $f(12) = f(13)$.

$$f(12) = -100 \cdot 12^2 + 2.500 \cdot 12 - 12.000 =$$

$$= -14.400 + 30.000 - 12.000 = 30.000 - 26.400 = 3.600.$$

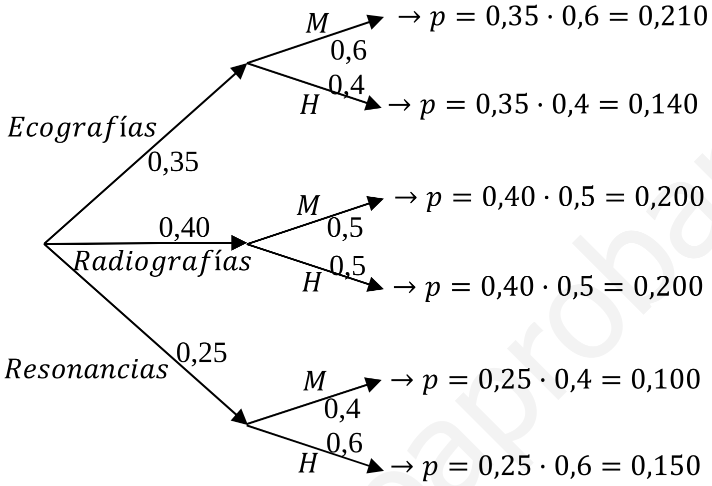
$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ mensual\ es\ de\ 3.600\ euros.}$$

****

3º) En una clínica se realizan únicamente tres tipos de servicios: ecografías, en el 35 % de los casos, radiografías, en el 40 % y resonancias magnéticas en el 25 %. El 60 % de las ecografías son de mujeres, el 50 % de las radiografías son de mujeres y el 60 % de las resonancias son de hombres. Si se elige un paciente al azar se pide:

a) La probabilidad de que el paciente elegido haya sido mujer.

b) Si el paciente elegido ha sido una mujer, probabilidad de que el servicio realizado sea una ecografía.



a)

$$P = P(M) = P(Ec) \cdot P(M/Ec) + P(Ra) \cdot P(M/Ra) + P(Re) \cdot P(M/Re) =$$

$$= 0{,}35 \cdot 0{,}6 + 0{,}40 \cdot 0{,}5 + 0{,}25 \cdot 0{,}4 = 0{,}210 + 0{,}200 + 0{,}100 = \underline{0{,}510}.$$

b)

$$P = P(Ec/M) = \frac{P(Ec \cap M)}{P(M)} = \frac{P(Ec) \cdot P(M/Ec)}{P(Ec) \cdot P(M/Ec) + P(Ra) \cdot P(M/Ra) + P(Re) \cdot P(M/Re)} =$$

$$= \frac{0{,}35 \cdot 0{,}6}{0{,}35 \cdot 0{,}6 + 0{,}40 \cdot 0{,}5 + 0{,}25 \cdot 0{,}4} = \frac{0{,}210}{0{,}210 + 0{,}200 + 0{,}100} = \frac{0{,}210}{0{,}510} = \underline{0{,}4118}.$$

****

4º) El número de viajes realizados mensualmente por los usuarios habituales de la línea de autobuses Donostia-Bilbao sigue una distribución normal de desviación típica $\sigma = 10$. Si seleccionamos una muestra de 625 usuarios, resulta que la media de viajes realizados por los viajeros es de 16 viajes. Contestar:

a) ¿Cuál es el intervalo de confianza para la media μ de viajes mensuales en toda la población para un nivel de significación del 4 %?

b) ¿Cuál es el intervalo de confianza para la media μ de viajes mensuales en toda la población para un nivel de confianza del 98 %?

----

a)

$\alpha = 0{,}04 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}02} = \mathbf{2{,}055}$. $\qquad (1 - 0{,}02 = 0{,}9800 \ \rightarrow z = 2{,}055)$.

Datos: $\overline{x} = 16;\ \ n = 625;\ \ \sigma = 10;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}055$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(16 - 2{,}055 \cdot \frac{10}{\sqrt{625}};\ 16 + 2{,}055 \cdot \frac{10}{\sqrt{625}}\right);$

$(16 - 2{,}055 \cdot 0{,}4;\ 16 + 2{,}055 \cdot 0{,}4);\ \ (16 - 0{,}822;\ 16 + 0{,}822);$

$$\underline{I.C._{96\,\%}\ (15{,}178;\ 16{,}822).}$$

b)

Para un nivel de confianza del 98 % es:

$1 - \alpha = 0{,}98 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0{,}98 = 0{,}02 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}01} = \mathbf{2{,}33}$.
$1 - 0{,}01 = 0{,}99 \ \rightarrow z = 2{,}33)$.

Datos: $\overline{x} = 16;\ \ n = 625;\ \ \sigma = 10;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}33$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(16 - 2{,}33 \cdot \frac{10}{\sqrt{625}};\ 16 + 2{,}33 \cdot \frac{10}{\sqrt{625}}\right);\ \ (16 - 2{,}33 \cdot 0{,}4;\ 16 + 2{,}33 \cdot 0{,}4);$

$(16 - 0{,}932;\ 16 + 0{,}932);$

$$\underline{I.C._{98\,\%}\ (15{,}068;\ 16{,}932).}$$

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\end{pmatrix}\ y\ C=\begin{pmatrix}14 & -6\\ -9 & -11\end{pmatrix}$, encontrar las componentes de las matrices de dimensión 2×2, $M=\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}, H=\begin{pmatrix}f & g\\ h & i\end{pmatrix}$ para que se cumplan las siguientes igualdades matriciales:

$a)\ A\cdot M\cdot B=C.$ $\qquad$ $b)\ A\cdot H\cdot B^{-1}=C.$

$a)$

$$A\cdot M\cdot B=C \Rightarrow \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & -6\\ -9 & -11\end{pmatrix};$$

$$=\begin{pmatrix}2p & 2q\\ -r & -s\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & -6\\ -9 & -11\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}2p-4q & 6p+4q\\ -r+2s & -3r-2s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & -6\\ -9 & -11\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}2p-4q=14\\ 6p+4q=-6\end{array}\right\}\\ \left.\begin{array}{r}-r+2s=-9\\ -3r-2s=-11\end{array}\right\}\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{r}8p=8\\ -4r=-20\end{array}\right\}\Rightarrow \underline{p=1, q=-3, r=5, s=-2}.$$

$b)$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\end{pmatrix};\ \ |B|=\begin{vmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\end{vmatrix}=2+6=8;\ \ B^t=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 2\end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ B^t=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\tfrac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

$$A\cdot H\cdot B^{-1}=C\Rightarrow\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}f & g\\ h & i\end{pmatrix}\cdot\tfrac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & -6\\ -9 & -11\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}2f & 2g\\ -h & -i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}112 & -48\\ -72 & -88\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}4f+4g & -6f+2g\\ -2h-2i & 3h-i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}112 & -48\\ -72 & -88\end{pmatrix}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}4f+4g=112\\ -6f+2g=-48\end{array}\right\}\\ \left.\begin{array}{r}-2h-2i=-72\\ 3h-i=-88\end{array}\right\}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}f+g=28\\ 3f-g=24\end{array}\right\}\\ \left.\begin{array}{r}h+i=36\\ 3h-i=-88\end{array}\right\}\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{r}4f=52\\ 4h=-52\end{array}\right\}\Rightarrow \underline{f=13, g=15, h=-13, i=49}.$$

****

2º) Sean el polinomio $p(x) = 2x^3 + bx^2 + c$ y la parábola $q(x) = -x^2 + 6x + 10$.

a) Determinar los coeficientes de las incógnitas $b\ y\ c$ para que dos de los puntos de corte entre $p(x)\ y\ q(x)$ tengan por abscisas $x = 0\ y\ x = 6$. Dibujar un esbozo de la gráfica de las funciones $p(x)\ y\ q(x)$.

b) Calcular el área de la región limitada por las curvas $p(x)\ y\ q(x)$ en el intervalo $0 \leq x \leq 6$, sabiendo que en su interior no hay ningún punto de corte de $p(x)\ y\ q(x)$.

----

a)

Si dos de los puntos de corte entre $p(x)\ y\ q(x)$ tienen por abscisas $x = 0\ y\ x = 6$, éstas son dos raíces de la función que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) \Rightarrow p(x) = q(x) \Rightarrow 2x^3 + bx^2 + c = -x^2 + 6x + 10.$$

$$f(x) = 2x^3 + (b+1)x^2 - 6x + (c - 10).$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow (c - 10) = 0 \ \Rightarrow \ \underline{c = 10}.$$

$$f(6) = 0 \Rightarrow 2 \cdot 6^3 + (b+1) \cdot 6^2 - 6 \cdot 6 = 0; \ \ 2 \cdot 6 + (b+1) - 1 = 0;$$

$$12 + b + 1 - 1 = 0 \ \Rightarrow \ \underline{b = -12}.$$

El polinomio resulta $p(x) = 2x^3 - 12x^2 + 10$, cuyo máximo y mínimo relativo son los siguientes:

$$p'(x) = 6x^2 - 24x. \qquad\qquad p''(x) = 12x - 24.$$

$$p'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 24x = 0; \ \ 6x(x - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4.$$

$$p''(0) = -24 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$p(0) = 10 \ \Rightarrow Máximo\ relativo: A(0, 10).$$

$$p''(4) = 12 \cdot 4 - 24 = 48 - 24 = 24 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 4.$$

$$p(4) = 2 \cdot 4^3 - 12 \cdot 4^2 + 10 = 2 \cdot 64 - 12 \cdot 16 + 10 = 128 - 192 + 10 =$$

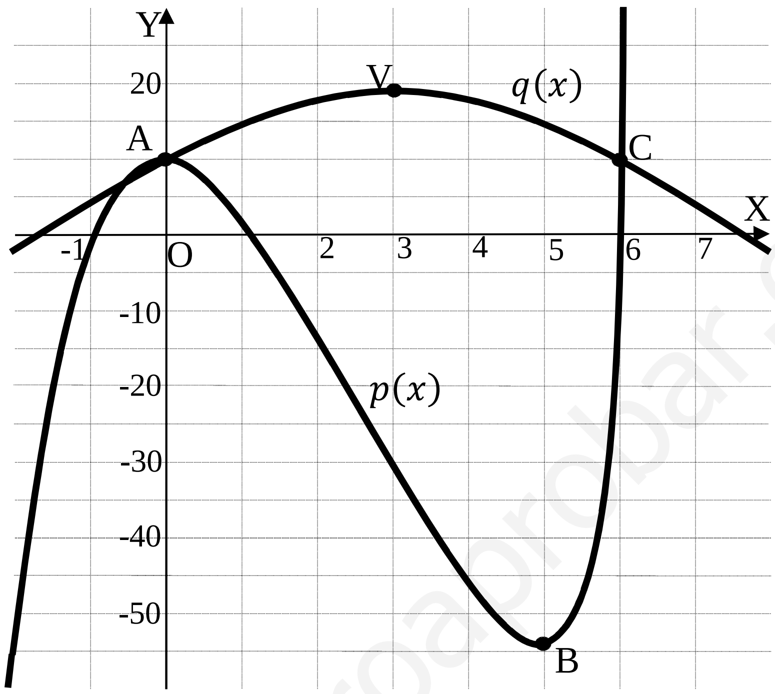
$$= 138 - 192 = -54 \ \Rightarrow Mínimo\ relativo: B(4, -54).$$

La parábola $q(x) = -x^2 + 6x + 10$, que es cóncava $(\cap)$, pasa por los puntos $A(0, 10)$ y $C(6, 10)$ y su vértice, máximo absoluto, es el siguiente:

$q'(x) = -2x + 6 = 0;\ -x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3.$

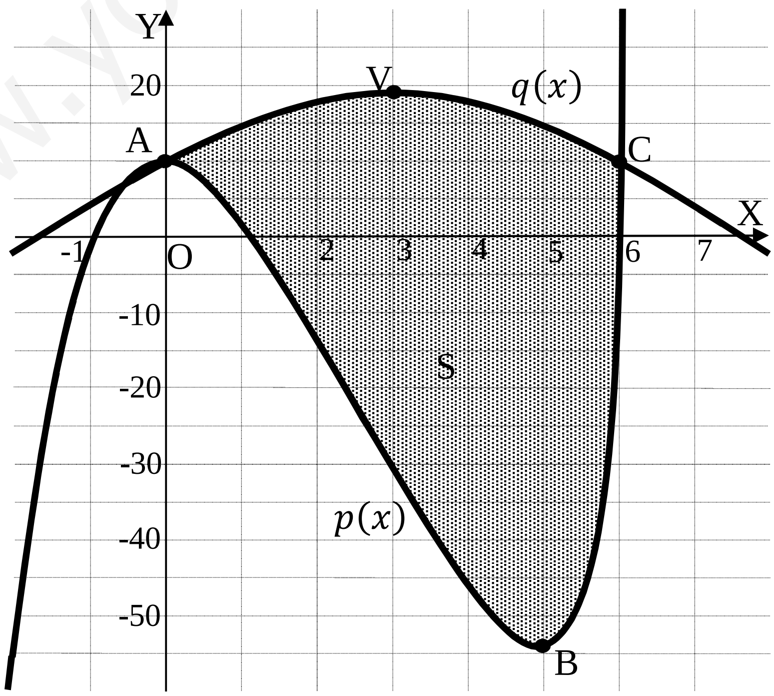
$q(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 + 10 = -9 + 18 + 10 = 19 \Rightarrow V(3, 19).$

La representación gráfica, aproximada, del polinomio y la parábola son los que aparecen en la figura siguiente.



$b)$

De la observación de la figura siguiente se deduce la superficie a calcular, teniendo en cuenta que en el intervalo $(0, 6)$ todas las ordenadas de la parábola son mayores que las correspondientes ordenadas del polinomio.



$q(x) - p(x) = -x^2 + 6x + 10 - (2x^3 - 12x^2 + 10) =$

$$= -x^2 + 6x + 10 - 2x^3 + 12x^2 - 10 = -2x^3 + 11x^2 + 6x.$$

$$S = \int_0^6 [q(x) - p(x)] \cdot dx = \int_0^6 (-2x^3 + 11x^2 + 6x) \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{-2x^4}{4} + \frac{11x^3}{3} + \frac{6x^2}{2}\right]_0^6 = \left[-\frac{x^4}{2} + \frac{11x^3}{3} + 3x^2\right]_0^6 = \left(-\frac{6^4}{2} + \frac{11 \cdot 6^3}{3} + 3 \cdot 6^2\right) - 0 =$$

$$= 6^2 \cdot \left(-\frac{6^2}{2} + \frac{11 \cdot 6}{3} + 3\right) = 36 \cdot (-18 + 22 + 3) = 36 \cdot 7 = 252.$$

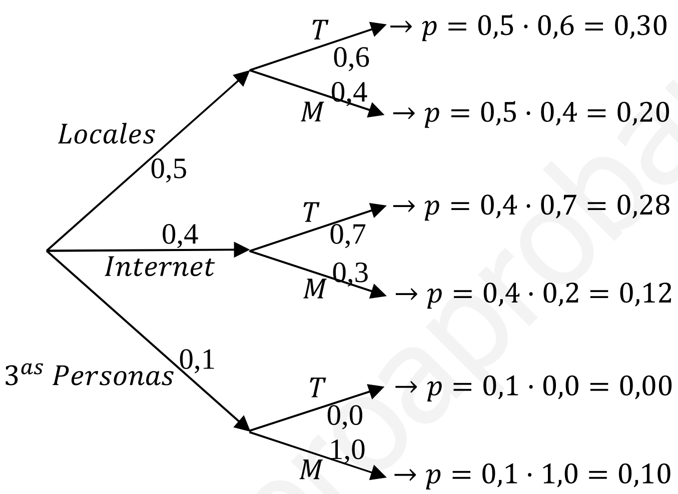
$$\underline{S = 252\, u^2}.$$

****

3º) Una familia hace sus compras de la siguiente manera: el 50 % en tiendas locales, el 40 % por Internet y, el resto, a través de terceras personas. En las tiendas pagan en el 60 % de los casos con tarjeta y en el resto en metálico. En Internet pagan en el 70 % de los casos con tarjeta y en el resto en metálico (contra reembolso). Si compran a través de una tercera persona, siempre pagan en metálico. Si se elige una compra al azar:

a) Calcular la probabilidad de que ésta se haya pagado en metálico.

b) Si una compra se ha pagado con tarjeta, calcular la probabilidad de que ésta se haya hecho en una tienda.



a)

$$P = P(M) = P(L) \cdot P(M/L) + P(I) \cdot P(M/I) + P(3p) \cdot P(M/3p) =$$

$$= 0{,}5 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 1{,}0 = 0{,}20 + 0{,}12 + 0{,}10 = \underline{0{,}42}.$$

b)

$$P = P(L/T) = \frac{P(L \cap T)}{P(T)} = \frac{P(L) \cdot P(T/L)}{P(L) \cdot P(T/L) + P(I) \cdot P(T/I) + P(3p) \cdot P(T/3p)} =$$

$$= \frac{0{,}5 \cdot 0{,}6}{0{,}5 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}0} = \frac{0{,}30}{0{,}30 + 0{,}28 + 0{,}00} = \frac{0{,}30}{0{,}58} = \underline{0{,}5172}.$$

****

4º) Se desea estimar la proporción de personas que son miopes, para lo cual, se toma una muestra de n individuos.

a) El porcentaje de miopes en esa muestra es del 32 %. Calcular el tamaño mínimo de la muestra para que, con un nivel de confianza del 92 %, el error cometido en la estimación de la proporción en toda la población p no supere el 3 %.

b) En una muestra de 625 personas la proporción de miopes es del 30 %. Calcular el intervalo de confianza correspondiente a un nivel de significación del 2 % para la proporción p de miopes de la población.

----

a)

Nivel de confianza del 92 %.

$1-\alpha=0{,}92 \ \rightarrow \ \alpha=1-0{,}92=0{,}08 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}04}=\mathbf{1{,}75}$.
$(1-0{,}04=0{,}9600 \ \rightarrow z=1{,}75)$.

$Datos$: $p=0{,}32$; $q=1-0{,}32=0{,}68$; $E=0{,}03$; $z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}75$.

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}} \ \Rightarrow \ \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sqrt{p\cdot q}}{E} \ \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sqrt{p\cdot q}}{E}\right)^2=$

$=\left(1{,}75\cdot\frac{\sqrt{0{,}32\cdot 0{,}68}}{0{,}03}\right)^2=\left(1{,}75\cdot\frac{\sqrt{0{,}2176}}{0{,}03}\right)^2=\left(1{,}75\cdot\frac{0{,}4665}{0{,}03}\right)^2=(1{,}75\cdot 15{,}5492)^2=$

$=27{,}2111^2=740{,}044.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ es\ de\ 741\ individuos}.$

b)

$\alpha=0{,}02 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=\mathbf{2{,}055}$. $\qquad (1-0{,}02=0{,}9800 \ \rightarrow z=2{,}055)$.

Datos: $n=625$; $p=0{,}3$; $q=0{,}7$; $z_{\frac{\alpha}{2}}=2{,}055$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n, es la siguiente: $\left(p-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}, p+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right)$.

$\left(0'3-2{,}055\cdot\sqrt{\frac{0{,}3\cdot 0{,}7}{625}};\ 0'3+2{,}055\cdot\sqrt{\frac{0{,}3\cdot 0{,}7}{625}}\right);$

$(0'3-2{,}055\cdot 0{,}0183;\ 0'3+2{,}055\cdot 0{,}0183);\ \ (0'3-0{,}0377;\ 0'3+0{,}0377).$

$$\underline{I.C._{98\,\%} = (0'2623;\ 0'3377)}.$$

****