PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JUNIO – 2019

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas. Está permitido el uso de calculadoras científicas que no presenten ninguna de las siguientes prestaciones: pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, derivada e integrales y almacenamiento de datos alfanuméricos.

OPCIÓN A

1º) Una pastelería fabrica dos tipos de tartas. La tarta de tipo A se elabora con 1 kg de masa y 1,5 kg de chocolate, y se vende a 24 euros. La de tipo B se vende a 30 euros y se elabora con 1,5 kg de masa y 1 kg de chocolate, tal como aparece en la siguiente tabla:

	Masa	Chocolate
A	1 kg	1,5 kg
B	1,5 kg	1 kg

Si la pastelera sólo dispone de 300 kg de cada ingrediente, ¿cuántas tartas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo ingreso? Calcula el valor de dicho ingreso.

Sean x e y el número de tartas de los tipos A y B que se fabrican en la pastelería, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} x+1{,}5y \le 300 \\ 1{,}5x+y \le 300 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2x+3y \le 600 \\ 3x+2y \le 600 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\}.$

$(1) \Rightarrow 2x+3y \le 600 \Rightarrow y \le \frac{600-2x}{3} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	300
y	200	0

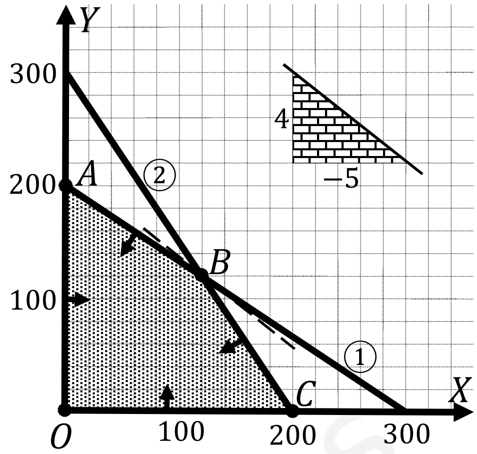
$(2) \Rightarrow 3x+2y \le 600 \Rightarrow y \le \frac{600-3x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	200
y	300	0

La función de objetivos es $f(x,y) = 24x + 30y$.

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ 2x + 3y = 600 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0, 200).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 600 \\ 3x + 2y = 600 \end{array}\right\} \begin{array}{r} 6x + 9y = 1.800 \\ -6x - 4y = -1.200 \end{array}\Bigg\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5y = 600;\;\; y = 120;\;\; 2x + 360 = 600;$$

$$2x = 240 \Rightarrow x = 120 \Rightarrow B(120, 120).$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 3x + 2y = 600 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 200 \Rightarrow C(200, 0).$$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(0, 200) = 24 \cdot 0 + 30 \cdot 200 = 0 + 6.000 = 6.000.$$

$$B \Rightarrow f(120, 120) = 24 \cdot 120 + 30 \cdot 120 = 2.880 + 3.600 = 6.480.$$

$$C \Rightarrow f(200, 0) = 24 \cdot 200 + 30 \cdot 0 = 4.800 + 0 = 4.800.$$

El valor máximo se produce en el punto $B(120, 120)$.

$$\underline{Obtiene\ el\ máximo\ beneficio\ fabricando\ 120\ tartas\ de\ cada\ tipo.}$$

$$\underline{El\ máximo\ beneficio\ es\ de\ 6.480\ euros.}$$

****

2º) Se considera la curva $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

a) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

b) Determinar los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión.

c) Encontrar los puntos de corte con el eje OX. Realizar la representación gráfica de la función.

d) Calcular el área del recinto finito delimitado por la curva y el eje de abscisas OX.

----

a)

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente, en ese punto.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3 \cdot (x^2 - 4x + 3).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3 \cdot (x^2 - 4x + 3) = 0;\; x^2 - 4x + 3 = 0;\; x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3.$$

Teniendo en cuenta que $f(x)$ es continua en R por ser una función polinómica, los valores que anulan la primera derivada dividen el dominio de la función en tres intervalos crecientes o decrecientes de forma alternativa.

Teniendo en cuenta que, por ejemplo, $f'(0) = 9 > 0$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (-\infty, 1) \cup (3, +\infty).}$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (1,3).}$$

b)

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo es que se anule su primera derivada. Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: según que sea negativa o positiva para los valores que anulan la primera derivada se trata de un máximo o de un mínimo, respectivamente.

$$f''(x) = 6x - 12.$$

$$f''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = -6 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 1.$$

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 1 - 6 + 9 = 4.$$

$\underline{Máximo\ relativo: A(1,4).}$

$$f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 18 - 12 = 6 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 3.$$

$$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 27 - 54 + 27 = 0.$$

$\underline{Mínimo\ relativo: B(3,0).}$

Para que una función tenga un punto de inflexión es condición necesaria que se anula su segunda derivada y sea distinta de cero la tercera derivada para los valores que anulen la segunda.

$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2. \qquad f'''(x) = 6 \neq 0 \Rightarrow P.I. para\ x = 2.$$

$$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 = 8 - 24 + 18 = 2.$$

$\underline{Punto\ de\ inflexión: C(2,2).}$

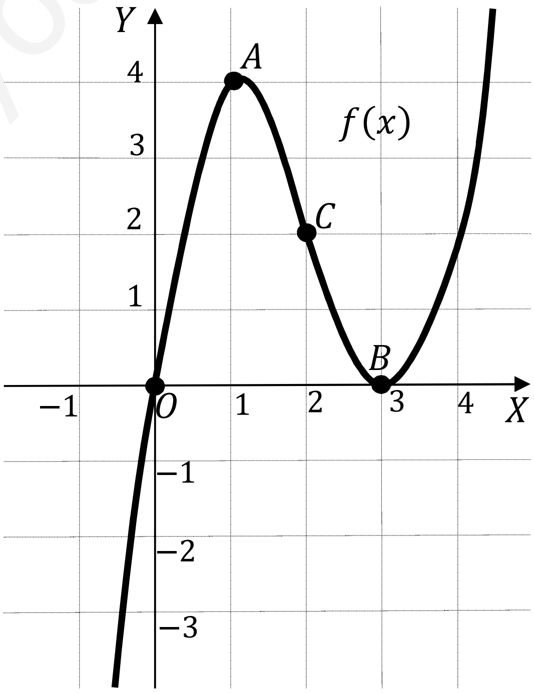
$c)$

Los puntos de corte de una función con el eje de abscisas son los que tienen como abscisa las raíces que anulan la función:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0;\ \ x(x^2 - 6x + 9) = x(x-3)^2 = 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3.$$

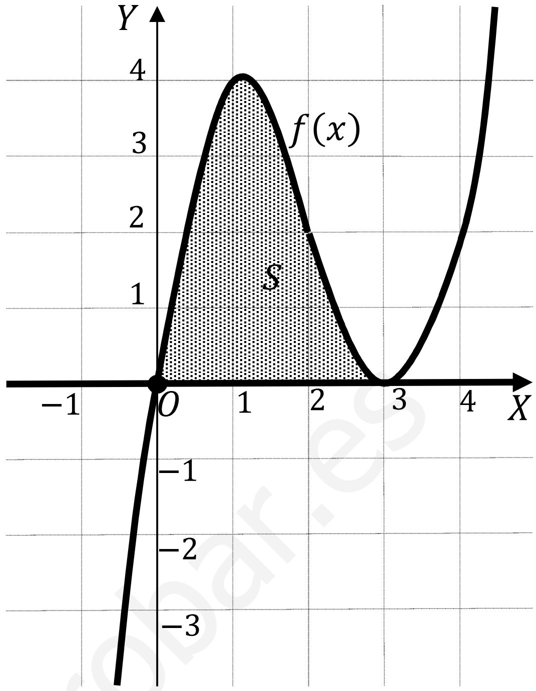
$\underline{Los\ puntos\ de\ corte\ con\ el\ eje\ OX\ son\ O(0,0)\ y\ B(3,0).}$



La representación gráfica es la que se indica en la figura.

$d)$

La superficie a calcular es la que se indica en la siguiente figura; su valor es el siguiente:



$$S = \int_0^3 f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2}\right]_0^3 = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9x^2}{2}\right]_0^3 =$$

$$= \left(\frac{3^4}{4} - 2 \cdot 3^3 + \frac{9 \cdot 3^2}{2}\right) - 0 = \frac{81}{4} - 54 + \frac{81}{2} =$$

$$= \frac{81 - 4 \cdot 54 + 81 \cdot 2}{4} = \frac{81 - 216 + 162}{4} = \frac{243 - 216}{4} = \frac{27}{4}.$$

$$\underline{S = \frac{27}{4}\,u^2 = 6{,}75\,u^2.}$$

****

3º) Sean A y B dos sucesos tales que $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{3}$, y la probabilidad de la unión de ambos sucesos es $\frac{3}{4}$. Calcular:

a) La probabilidad de que ocurra el suceso A, condicionada a que se ha producido el suceso B.

b) La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.

c) La probabilidad de que ocurra el suceso A y no ocurra el suceso B.

d) La probabilidad de que ocurra solo uno de los dos sucesos.

----

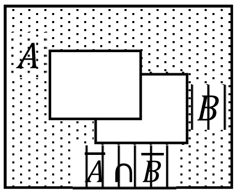
a)

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}=\frac{6+4-9}{12}=\frac{1}{12}.$$

$$P=P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{12}=\underline{\frac{1}{4}=0{,}25}.$$

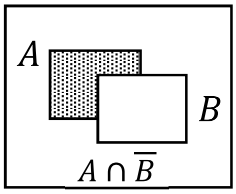
b)



$$P=P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=$$

$$=1-\frac{3}{4}=\underline{\frac{1}{4}=0{,}25}.$$

c)



$$P=P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{12}=\frac{6-1}{12}=\underline{\frac{5}{12}}.$$

d)

$$P=P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=$$

$$=P(A)+P(B)-2\cdot P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-2\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{3+2-1}{6}=\frac{4}{6}=\underline{\frac{2}{3}}.$$

****

4º) En una población se toma una muestra aleatoria de 500 personas y se les pregunta si son aficionados al deporte o no. De ellas 350 respondieron que sí son aficionadas al deporte y el resto que no. Con esta información se pide:

a) Estimar, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de personas de la población que son aficionadas al deporte. Calcular, además, el error máximo para dicha confianza.

b) Interpretar los resultados obtenidos.

----

a)

Se trata de calcular el intervalo de confianza para la proporción con el nivel de confianza indicado.

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1-\alpha=0{,}95 \;\rightarrow\; \alpha=1-0{,}95=0{,}05 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$$
$$(1-0{,}025=0{,}9750 \;\rightarrow z=1{,}96).$$

Datos: $n=500$; $p=\frac{350}{500}=0{,}7$; $q=1-0{,}7=0{,}3$; $z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q $y\ n$, es la siguiente: $\left(p-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}, p+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0{,}7-1{,}96\cdot\sqrt{\frac{0{,}7\cdot 0{,}3}{500}};\ 0{,}7+1{,}96\cdot\sqrt{\frac{0{,}7\cdot 0{,}3}{500}}\right);$$

$$(0{,}7-1{,}96\cdot 0{,}0205;\ 0{,}7+1{,}96\cdot 0{,}0205);\ \ (0{,}7-0{,}0402;\ 0{,}7+0{,}0402)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow I.C._{95\,\%}=(0{,}6598;\ 0{,}7402).$$

$$\underline{Les\ gusta\ el\ deporte\ entre\ el\ 66\ \%\ y\ el\ 74\ \%, aproximadamente.}$$

El error máximo cometido es la mitad del valor del intervalo de confianza:

$$E=\frac{0{,}7402-0{,}6598}{2}=\frac{0{,}0804}{2}=0{,}0402\Rightarrow\ \underline{E\cong 4\ \%}.$$

b)

El resultado debe interpretarse que, de cada 100 personas de esa comunidad les gusta el deporte a un número de personas comprendido entre 66 y 74 personas, con un error máximo del 4 %.

****

OPCIÓN B

1º) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}\ y\ C=\begin{pmatrix}10&11\\4&7\end{pmatrix}$.

a) Determina la matriz inversa de $I+B$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

b) Calcular las matrices $X\ e\ Y$ que verifican que: $\left.\begin{array}{r}AX+BY=C\\AX=Y\end{array}\right\}$.

----

a)

$$I+B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}.$$

La inversa de $(I+B)$ se obtiene por el método de Gauss-Jordan.

$$(I+B/I)=\left(\begin{array}{cc|cc}2&0&1&0\\1&3&0&1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_1\leftrightarrow F_2\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&0&1\\2&0&1&0\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{F_2\rightarrow F_2-2F_1\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&0&1\\0&-6&1&-2\end{array}\right)\Rightarrow\left\{F_2\rightarrow -\tfrac{1}{6}F_2\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&0&1\\0&1&-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{F_1\rightarrow F_1-3F_2\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{1}{2}&0\\0&1&-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\end{array}\right).$$

$$\underline{(I+B)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}3&0\\-1&2\end{pmatrix}.}$$

b)

$$\left.\begin{array}{r}AX+BY=C\\AX=Y\end{array}\right\}\Rightarrow Y+BY=C;\ \ I\cdot Y+B\cdot Y=C;\ \ (I+B)\cdot Y=C;$$

$$(I+B)^{-1}\cdot(I+B)\cdot Y=(I+B)^{-1}\cdot C;\ \ I\cdot Y=(I+B)^{-1}\cdot C\Rightarrow Y=(I+B)^{-1}\cdot C.$$

$$Y=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}3&0\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10&11\\4&7\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}30&33\\-2&3\end{pmatrix}.$$

$$AX=Y;\ \ A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot Y;\ \ I\cdot X=A^{-1}\cdot Y\Rightarrow X=A^{-1}\cdot Y.$$

La inversa de A también se obtiene por el método de Gauss-Jordan.

$$(A/I)=\left(\begin{array}{cc|cc}2&0&1&0\\0&1&0&1\end{array}\right)\Rightarrow\left\{F_1\rightarrow\tfrac{1}{2}F_1\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&1\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

$$X=A^{-1}\cdot Y=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}30&33\\-2&3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}30&33\\-2&3\end{pmatrix}=$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 & 33 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 30 & 33 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{Solución: X = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 30 & 33 \\ -4 & 6 \end{pmatrix};\ \ Y = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 30 & 33 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.}$$

****

2º) a) Hallar la función polinómica de segundo grado cuyo gráfico pasa por el punto $O(0,0)$, y tiene un máximo en el punto $P(1,1)$.

b) Halla el área del recinto finito delimitado por la curva obtenida y el eje OX.

----

a)

Sea la función $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Por pasar por $O(0,0) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow \underline{c = 0}$.

La función resulta $f(x) = ax^2 + bx$.

Por pasar por $P(1,1) \Rightarrow f(1) = 1$:

$f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 = a + b = 1$.   (1)

Por tener un máximo en $P(1,1) \Rightarrow f'(1) = 0$:

$f'(x) = 2ax + b$.

$f'(1) = 2a + b = 0$.   (2)

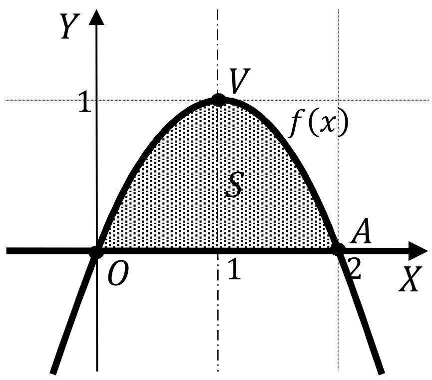
Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} a + b = 1 \\ 2a + b = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -a - b = -1 \\ 2a + b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{a = -1}. \qquad -1 + b = 1 \Rightarrow \underline{b = 2}.$$

$$\underline{La\ función\ es\ f(x) = -x^2 + 2x.}$$

b)

La superficie a calcular es la siguiente:



$$S = \int_0^2 (-x^2 + 2x) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right]_0^2 =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^2 = \left(-\frac{2^3}{3} + 2^2\right) - 0 = -\frac{8}{3} + 4 =$$

$$= \frac{-8+12}{3} = \frac{4}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{4}{3}\ u^2.}$$

****

3º) Se dispone de dos urnas diferentes: A y B. La urna A contiene 3 bolas blancas y 5 bolas negras, mientras que la urna B contiene 10 bolas negras. Se toma al azar una bola de cada una de las urnas al mismo tiempo y se intercambian (es decir, la bola extraída de la urna A se introduce en la urna B y la bola extraída de la urna B se introduce en la urna A). Si a continuación se extrae una bola de la urna A, ¿cuál es la probabilidad de que sea negra?

Como quiera que la urna A recibe una bola negra, la probabilidad pedida es la siguiente:

$$P \Rightarrow \begin{Bmatrix} Sale\ blanca\ y\ recibe\ negra \Rightarrow \frac{3}{8} \cdot \frac{6}{8} = \frac{18}{64} \\ Sale\ negra\ y\ recibe\ negra \Rightarrow \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{64} \end{Bmatrix} \Rightarrow P = \frac{18}{64} + \frac{25}{64} = \frac{43}{64}.$$

$$\underline{P = \frac{43}{64} = 0{,}6719.}$$

****

4º) En una determinada ciudad el gasto anual en transporte público realizado por las familias sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 75 euros. Se toma una muestra aleatoria de 100 familias, de la que se obtiene un gasto medio de 250 euros.

a) Calcular entre qué valores estará el gasto medio de la población con un nivel de confianza del 99 %.

b) ¿Qué tamaño debería tener la muestra para que el error máximo sea de 10 euros con un nivel de confianza del 99 %?

----

a)

Para un nivel de confianza del 99 % es:

$1-\alpha = 0{,}99 \;\rightarrow\; \alpha = 1-0{,}99 = 0{,}01 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}005} = 2{,}575.$
$(1-0{,}005 = 0{,}9950 \;\rightarrow z = 2{,}575).$

Datos: $n = 100;\; \overline{x} = 250;\; \sigma = 75;\; z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}575.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\; \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(250 - 2{,}575 \cdot \frac{75}{\sqrt{100}};\; 250 + 2{,}575 \cdot \frac{75}{\sqrt{100}}\right);$$

$(250 - 2{,}575 \cdot 7{,}5;\; 250 + 2{,}575 \cdot 7{,}5);\;\; (250 - 19{,}3125;\; 250 + 19{,}3125) \Rightarrow$

$\Rightarrow I.C._{99\,\%} = (230{,}6875;\; 269{,}3125).$

$\underline{El\ gasto\ mensual\ medio\ por\ familia\ está\ entre\ 240\ y\ 269\ euros.}$

b)

Datos: $\sigma = 75;\; z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}575;\; E = 10.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2{,}575 \cdot \frac{75}{10}\right)^2 =$

$= (2{,}575 \cdot 7{,}5)^2 = 19{,}3125^2 = 372{,}97.$

$\underline{En\ la\ muestra\ deben\ seleccionarse\ al\ menos\ 373\ familias.}$

****