PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

SEPTIEMBRE - 2002

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Nota: Deberán contestarse la cuestión o el problema de cada uno de los bloques A, B, C, D y E. Cada uno de los ejercicios será valorado entre 0 y 2 puntos.

BLOQUE A

Cuestión A.- Sean A y B las matrices que siguen:

$$A=\begin{pmatrix} 2x & 2 & 3+x \\ 2 & x & 5 \\ 10 & 6 & x+5 \end{pmatrix} \;;;\; B=\begin{pmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & x & 4 \\ 5 & 6 & x \end{pmatrix}.$$

Sabiendo que el determinante de B vale 7, utilizar las propiedades de los determinantes para calcular el valor del determinante de A.

$$A=\begin{pmatrix} 2x & 2 & 3+x \\ 2 & x & 4+1 \\ 10 & 6 & x+5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x & 2 & 3 \\ 2 & x & 4 \\ 10 & 6 & x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2x & 2 & x \\ 2 & x & 1 \\ 10 & 6 & 5 \end{pmatrix};;$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 2x & 2 & 3 \\ 2 & x & 4 \\ 10 & 6 & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2x & 2 & x \\ 2 & x & 1 \\ 10 & 6 & 5 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & x & 4 \\ 5 & 6 & x \end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix} x & 2 & x \\ 1 & x & 1 \\ 5 & 6 & 5 \end{vmatrix}=2\cdot 7+2\cdot 0=\underline{\underline{14=|A|}}$$

Nota: El valor del último determinante es cero por tener dos columnas iguales.

****

Problema A.- Se considera el sistema S dado por: $S \equiv \begin{cases} x - y + z = a \\ x - z = -a \\ 2x - y = 0 \end{cases}$. Discutir la compatibilidad en función del valor de a. Resolver en los casos de compatibilidad.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} ;;\ M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 & -a \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ;; \quad |M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 + 2 - 1 = 0$$

$$Para\ \ a \neq 0 \ \Rightarrow\ \ \underline{\underline{Rango\ \ de\ \ M \neq Rango\ \ \ \Rightarrow\ \ Incompatible}}$$

$$Para\ a = 0 \ \Rightarrow\ Rango\ M\ = Rango\ M' = 2 < n^{o}\ incógnitas\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Compatible\ \ Indeterminado}}$$

Para a = 0 resulta el sistema: $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

De la segunda ecuación: x = z. Haciendo z = k, resulta:

$$\underline{\underline{\begin{cases} x = k \\ y = 2k \\ z = k \end{cases}}} \quad \forall k \in R,\ (k \neq 0)$$

Dando valores a k se obtienen las infinitas soluciones del sistema.

****

BLOQUE B

Cuestión B.- Se π el plano de ecuación: $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ y sea P un punto exterior al mismo dado por P(a, b, c). Describir el proceso para calcular el punto simétrico de P respecto a π.

En primer lugar tendremos en cuenta que un vector normal (perpendicular) al plano π es $\overrightarrow{v} = (A,\ B,\ C)$.

La ecuación de la recta r que pasando por P es perpendicular a π es la que tiene como vector director a $\overrightarrow{v}$ y pasa por P; en forma de ecuaciones paramétricas es:

$$r \equiv \begin{cases} x = a + Ak \\ y = b + Bk \\ z = c + Ck \end{cases}$$

El punto de intersección de r con π es $Q(q_1,\ q_2,\ q_3)$. El punto simétrico de P con respecto a π es P'(x, y, z) que se obtiene teniendo en cuenta que:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'} \Rightarrow [(q_1 - a),\ (q_2 - b),\ (q_3 - c)] = [(x - q_1),\ (y - q_2),\ (z - q_3)] \Rightarrow \begin{cases} x = 2q_1 - a \\ y = 2q_2 - b \\ z = 2q_3 - c \end{cases}$$

El punto pedido es: $\underline{\underline{Q(2q_1 - a,\ 2q_2 - b,\ 2q_3 - c)}}$

****

Problema B.- Encontrar la ecuaciones paramétricas de la recta que contiene al punto $P(2, 1, 3)$ y cuyo vector de dirección es perpendicular a los vectores $\overrightarrow{v} = (1,\ 2,\ 0)$ y $\overrightarrow{w} = (1,\ 1,\ 2)$. Escribir la ecuación de la recta en forma continua. ¿Pertenece el punto $Q(1,\ 2,\ 3)$ a la recta?

El producto vectorial de dos vectores es otro $\overrightarrow{n}$ vector perpendicular al plano que forman los vectores, por lo tanto, es perpendicular a los mismos:

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4i + k - 2k + 2j = 4i + 2j - k \quad \Rightarrow \quad \underline{\overrightarrow{n} = (4,\ 2,\ 1)}$$

La recta pedida es la que tiene como vector director a $\overrightarrow{n}$ y pasa por el punto P; sus ecuaciones paramétricas son:

$$r\left(P;\ \overrightarrow{n}\right) \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} P(2,\ 1,\ 3) \\ \\ \overrightarrow{n} = (4,\ 2,\ 1) \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 4k \\ y = 1 + 2k \\ z = 3 - k \end{array} \right.}}$$

La expresión de r por unas ecuaciones continuas es:

$$\underline{\underline{r \equiv \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-1}}}$$

Veamos si el punto Q pertenece a r; tiene que satisfacer sus ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{c} r \equiv \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-3}{-1} \\ Q(1,\ 2,\ 3) \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{1-2}{4} \neq \frac{2-1}{2} \neq \frac{3-3}{-1} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{Q \notin r}}$$

****

BLOQUE C

Cuestión C.- Encontrar la ecuación de la recta tangente para la función $f(x)=x^4+16$ en un punto cualquiera x = a. ¿Existe algún valor de a para el cual dicha recta tangente tenga de pendiente 1?¿Existe algún valor de a para el cual dicha recta tangente pase por el punto exterior a la curva O(0, 0)? Razonar las contestaciones si son negativas o realizar los cálculos en caso de ser afirmativas.

$$f(x)=x^4+16 \;\;\Rightarrow\;\; y=f(a)=a^4+16 \;\;\Rightarrow\;\; \underline{P(a,\; a^4+16)}$$

$$f'(x)=4x^3 \;\;\Rightarrow\;\; m=f'(a)=\underline{4a^3=m}$$

La ecuación de una recta que pasa por un punto conocida la pendiente es:

$$y-y_0=m(x-x_0) \;\;\Rightarrow\;\; y-(a^4+16)=4a^3(x-a) \;\;;;\;\; y-a^4-16=4a^3x-4a^4 \;\;;;$$

$$\underline{\underline{t \equiv 4a^3x-y+(16-a^4)=0}}$$

Para que la pendiente sea 1 tiene que cumplirse:

$$m=1 \;\;\Rightarrow\;\; 4a^3=1 \;;;\; a^3=\frac{1}{4} \;;;\; a=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}}=\underline{\underline{\frac{\sqrt[3]{2}}{2}=a}}$$

Para que la recta r pase por el punto O(0, 0) tiene que cumplirse que:

$$16-3a^4=0 \;;;\; 3a^4=16 \;;;\; a=\sqrt[4]{\frac{16}{3}}=\frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{3}}=\frac{2}{\sqrt[4]{3}}=\frac{2\sqrt[4]{3^3}}{3}=\underline{\underline{\frac{2\cdot\sqrt[4]{27}}{3}=a}}$$

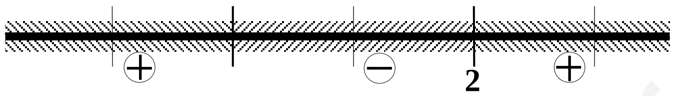
****

Problema C.- Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos locales y las asíntotas de la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$. Trazar su gráfica.

$$f(x)=\frac{x^2}{e^x} \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{x\cdot e^x(2-x)}{e^{2x}}=\underline{\frac{x(2-x)}{e^x}=f'(x)}$$

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; x(2-x)=0 \;\Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1=0} \\ \underline{x_2=2} \end{cases}$$

El signo de f'(x) depende del numerador, ya que, el denominador es siempre positivo.



$$\underline{\underline{f'(x)>0 \;\Rightarrow\; Creciente \;\Rightarrow\; (-\infty,\, 0)\cup(2,\, \infty)}}$$

$$\underline{\underline{f'(x)<0 \;\Rightarrow\; Decreciente \;\Rightarrow\; (0,\, 2)}}$$

$$f''(x)=\frac{(2-2x)\cdot e^x - x(2-x)\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{2-2x-2x+x^2}{e^x}=\underline{\frac{x^2-4x+2}{e^x}=f''(x)}$$

$$f''(0)=\frac{2}{e^0}=\frac{2}{1}=2>0 \;\Rightarrow\; Mínimo \;\Rightarrow\; f(0)=0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Mín(0,\, 0)}}$$

$$f''(2)=\frac{2^2-4\cdot 2+2}{e^2}=\frac{-2}{e^2}<0 \;\Rightarrow\; f(2)=\frac{2^2}{e^2}=\frac{4}{e^2}\cong 0'54 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Máx(2,\, 0'54)}}$$

Para que exista P. I. es condición necesaria que $f''(x)=0$, pero no es suficiente; para que exista P. I. es necesario que $f'''(x)\neq 0$.

$$f''(x)=0 \;\Rightarrow\; x^2-4x+2=0 \;;;\; x=\frac{4\pm\sqrt{16-8}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{4\pm 2\sqrt{2}}{2}=2\pm\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1=2+\sqrt{2}} \\ \underline{x_2=2-\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$f'''(x)=\frac{(2x-4)\cdot e^x-(x^2-4x+2)\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{2x-4-x^2+4x-2}{e^x}=\underline{\frac{-x^2+6x-6}{e^x}=f'''(x)}$$

$$f'''\left(2+\sqrt{2}\right)\neq 0 \;\Rightarrow\; P.\,I. \;\Rightarrow\; f\left(2+\sqrt{2}\right)=\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}{e^{2+\sqrt{2}}}\cong 0'38 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{P.\,I\,(3'41,\, 0'38)}}$$

$$f'''\left(2-\sqrt{2}\right)\neq 0 \;\Rightarrow\; P.\,I. \;\Rightarrow\; f\left(2-\sqrt{2}\right)=\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{e^{2-\sqrt{2}}}\cong 0'24 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{P.\,I\,(0'59,\, 0'24)}}$$

Asíntotas horizontales: son los valores finitos que toma y cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$y = k = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{Aplicando\ \ L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{Aplicando\ \ de\ \ nuevo\ \ L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

Asíntota horizontal : y = 0 (Eje X)

Asíntotas verticales: son los valores de x que anulan el denominador:

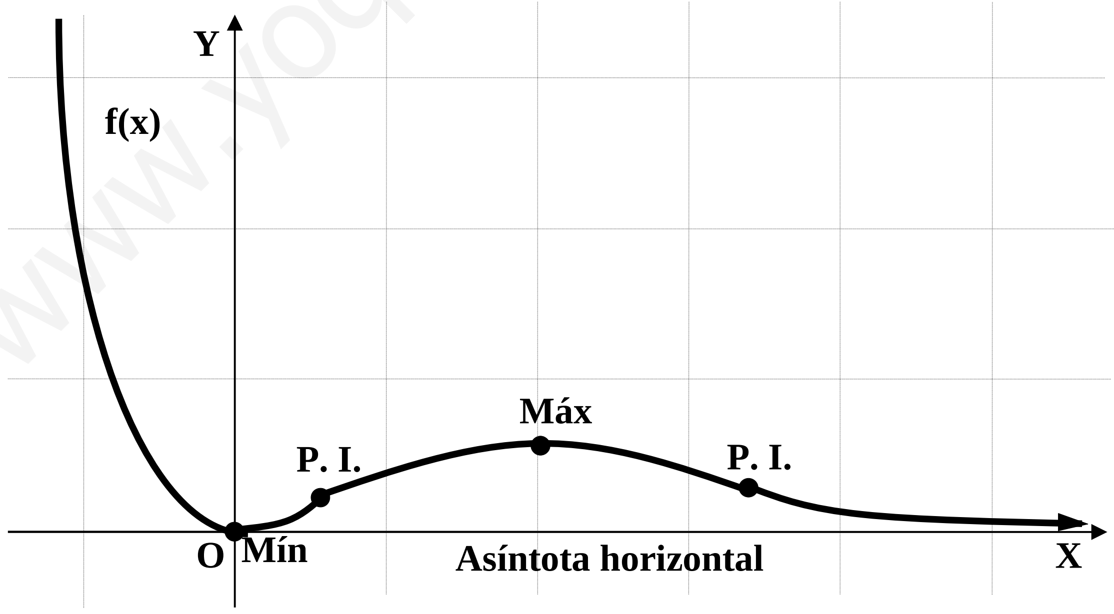
$\underline{\underline{e^x \neq 0,\ \forall x \in R\ \ \Rightarrow\ \ No\ \ tiene}}$.

Asíntotas oblicuas.

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{e^x}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = \underline{0 = m}$$

No tiene asíntotas verticales.

La representación gráfica es, aproximadamente, la que sigue:



****

BLOQUE D

Cuestión D.- Describir en qué consiste el método de integración por partes. Utilizar dicho método para encontrar una primitiva de la función $f(x) = x \cdot \cos(3x)$.

El método de integración por partes está basado en la diferencial (derivada) de un producto, teniendo en cuenta que si u y v son dos funciones de x se cumple que:

$$d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$$

Teniendo en cuenta que la integral de una suma algebraicas de funciones es igual a la suma algebraica de las integrales de las funciones, podemos escribir:

$$\int d(u \cdot v) = \int du \cdot v + \int u \cdot dv$$

Teniendo en cuenta que $\int d(u \cdot v) = u \cdot v$, la expresión anterior puede ponerse de la forma:

$$\underline{\underline{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}}$$

La expresión anterior es la que se conoce como la del método de integración por partes.

Aplicando la fórmula anterior podemos determinar la integral de la función dada:

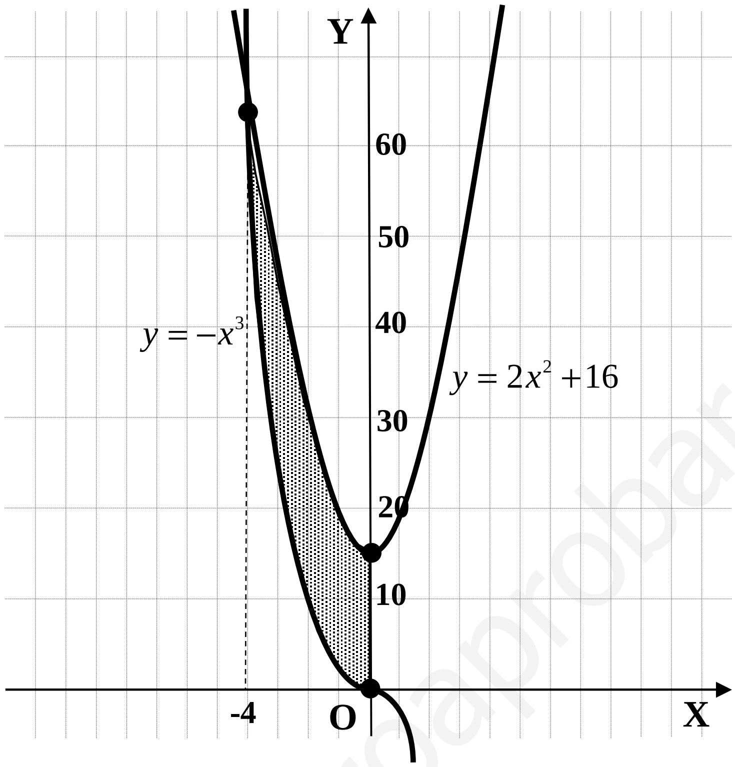
$$I = \int x \cdot \cos(3x) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = x \to du = dx \\ \cos(3x) \cdot dx = dv \to v = \frac{1}{3} sen\,(3x) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = x \cdot \frac{1}{3} sen\,(3x) - \int \frac{1}{3} sen\,(3x) \cdot dx = \frac{x}{3} \cdot sen\,(3x) - \frac{1}{3} \int sen\,(3x) \cdot dx =$$

$$= \frac{x}{3} \cdot sen\,(3x) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \cos(3x) + C = \underline{\underline{\frac{1}{9}[3x \cdot sen\,(3x) + \cos(3x)] + C = I}}$$

****

Problema D.- La curva $y=-x^3$, el eje OY y la curva $y-16-2x^2$ limitan un recinto finito del plano. Trazar un esquema de dicho recinto y calcular su área haciendo uso del cálculo integral.



El punto de corte de ambas funciones es:

$$\left.\begin{array}{l} y=-x^3 \\ y=2x^2+16 \end{array}\right\} \Rightarrow -x^3=2x^2+16 \;;;\; x^3+2x^2+16=0$$

Resolviendo por Ruffini se obtiene la única raíz real, que es x = 4.

La parábola es fácil representar ya que es simétrica con respecto a Y; corta al eje Y en el punto P(0, 16).

Con los datos anteriores ya podemos obtener el área pedida, que es la sombreada en la figura.

$$A=\int_{-4}^{0}\left(x^2+16\right)\cdot dx-\int_{-4}^{0}-x^3\ \cdot dx=\int_{-4}^{0}\left(x^2+16\right)\cdot dx+\int_{-4}^{0}x^3\ \cdot dx=\int_{-4}^{0}\left(x^3+x^2+16\right)\cdot dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x3}{3}+16x\right]_{-4}^{0}=0-\left(64-\frac{64}{3}+64\right)=\underline{\underline{\frac{64}{3}\ u^2=A}}$$

****

BLOQUE E

Cuestión E.- Se sabe que los lados de un triángulo tienen longitud entera cuando se expresan en centímetros, y que el perímetro del triángulo es de 8 centímetros. Llamando S al área del triángulo, calcular todos los valores posibles de S.

Supongamos que los lados son a, b y c y que $a \geq b \geq c$. Los casos que pueden presentarse son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} a = 6 \ cm \\ b = 1 \ cm \\ c = 1 \ cm \end{array}\right\} \Rightarrow$$ No se puede construir debido a que: $a > b + c$.

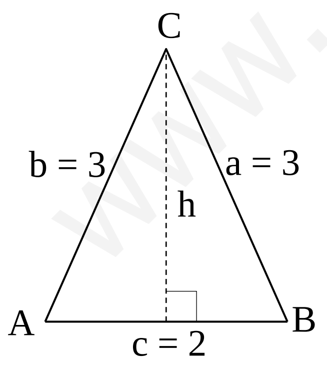
$$\left.\begin{array}{l} a = 5 \ cm \\ b = 2 \ cm \\ c = 1 \ cm \end{array}\right\} \Rightarrow$$ No se puede construir debido a que: $a > b + c$.

$$\left.\begin{array}{l} a = 4 \ cm \\ b = 3 \ cm \\ c = 1 \ cm \end{array}\right\} \Rightarrow$$ No se puede construir debido a que: $a = b + c$.

$$\left.\begin{array}{l} a = 4 \ cm \\ b = 2 \ cm \\ c = 2 \ cm \end{array}\right\} \Rightarrow$$ No se puede construir debido a que: $a = b + c$.

$$\left.\begin{array}{l} a = 3 \ cm \\ b = 3 \ cm \\ c = 2 \ cm \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Es el único caso que se puede construir, por lo tanto la solución es única.

Se trata de un triángulo isósceles cuyos datos se obtienen a continuación:



Por el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{9-1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \ cm = h$$

$$S = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \ cm^2 = S$$

$$sen \ A = sen \ B = \frac{h}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0'9428 \ \Rightarrow A = B = 70^{\circ} \ 31' \ 44''$$

$$C = 180^{\circ} - (A + B) = 180^{\circ} - 141^{\circ} \ 3' \ 28'' = 38^{\circ} \ 56' \ 32'' = C$$

****

Problema E.- Dos alumnos de segundo curso discuten sobre el valor de la potencia enésima de la matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}$. Uno afirma que para cada n natural se verifica que $A^n=\begin{bmatrix}1 & 3(2^n-1)\\ 0 & 2^n\end{bmatrix}$ y el otro dice que la verdadera fórmula de A^n es $A^n=\begin{bmatrix}1 & 3^n\\ 0 & 2^n\end{bmatrix}$. ¿Alguno de ellos está en lo cierto? Razonar la cuestión.

$$A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 9\\ 0 & 4\end{bmatrix}=\underline{\begin{bmatrix}1 & 3(2^2-1)\\ 0 & 2^2\end{bmatrix}}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{bmatrix}1 & 9\\ 0 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 21\\ 0 & 8\end{bmatrix}=\underline{\begin{bmatrix}1 & 3(2^3-1)\\ 0 & 2^3\end{bmatrix}}$$

$$A^4=A^3\cdot A=\begin{bmatrix}1 & 9\\ 0 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 21\\ 0 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 45\\ 0 & 16\end{bmatrix}=\underline{\begin{bmatrix}1 & 3(2^4-1)\\ 0 & 2^4\end{bmatrix}}$$

. . . .

$$\underline{\underline{A^n=\begin{bmatrix}1 & 3(2^n-1)\\ 0 & 2^n\end{bmatrix}}}$$

Por lo anterior se deduce que tiene razón el primero de los alumnos.

****