PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

SEPTIEMBRE - 2003

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Nota: Deberán contestarse la cuestión o el problema de cada uno de los bloques A, B, C, D y E. Cada uno de los ejercicios será valorado entre 0 y 2 puntos.

BLOQUE A

Cuestión A.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&4\\1&2&4\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\2&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, estudiar el rango de la matriz $A-\lambda B$ en función del valor de λ.

$$Sea\ \ M=A-\lambda\cdot B=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&4\\1&2&4\end{pmatrix}-\lambda\cdot\begin{pmatrix}2&0&0\\2&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&4\\1&2&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\lambda&0&0\\2\lambda&2\lambda&0\\0&0&2\lambda\end{pmatrix}=$$

$$=\underline{\begin{pmatrix}1-2\lambda&0&0\\1-2\lambda&2-2\lambda&4\\1&2&4-2\lambda\end{pmatrix}=M}$$

$$|\,M\,|=\begin{vmatrix}1-2\lambda&0&0\\1-2\lambda&2-2\lambda&4\\1&2&4-2\lambda\end{vmatrix}=(1-2\lambda)(2-2\lambda)(4-2\lambda)-8(1-2\lambda)=$$

$$=(1-2\lambda)[(2-2\lambda)(4-2\lambda)-8]=(1-2\lambda)\left(8-4\lambda-8\lambda+4\lambda^2-8\right)=(1-2\lambda)\left(12\lambda+4\lambda^2\right)=$$

$$=4\lambda(1-2\lambda)(\lambda+3)=0\ \Rightarrow\ \underline{\lambda_1=0}\ \ ;;\ \ \underline{\lambda_2=-3}\ \ ;;\ \ \underline{\lambda_3=\frac{1}{2}}$$

$$\underline{\underline{Para\ \left\{\lambda \neq 0,\ \lambda \neq -3,\ \lambda \neq \frac{1}{2}\right\} \Rightarrow Rango\ \ A-\lambda B = 3}}$$

$$Para\ \ \lambda = 0 \ \Rightarrow\ M = A - 0 \cdot B = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M = 2}$$

$$Para\ \ \lambda = -3 \ \Rightarrow\ M = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M = 2}$$

$$Para\ \ \lambda = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow\ Rango\ \ M = 2$$

$$\underline{\underline{Para\ \left\{\lambda = 0,\ \lambda = -3,\ \lambda = \frac{1}{2}\right\} \Rightarrow Rango\ \ A-\lambda B = 2}}$$

****

Problema A.- Dado el sistema de ecuaciones $S \equiv \begin{cases} x+2y+z=A \\ x+y+z=B \\ x+y-z=C \end{cases}$ demostrar que es compatible determinado para cualquier valor de A, B y C y encontrar la solución en función de dichos valores.

Según el Teorema de Rouché-Fröbenius, para que un sistema de ecuaciones lineales de tres ecuaciones con tres incógnitas sea compatible determinado, los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada tienen que ser iguales e igual al número de incógnitas, que en este caso es tres.

El rango de la matriz de coeficientes es $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1+1+2-1-1+2 = 2 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M = 3}$$

Por ser la matriz ampliada de dimensión 3 x 4, el rango máximo que puede tener es tres. Teniendo en cuanta que las tres primeras columnas de la matriz ampliada son las tres columnas de la matriz de coeficientes, independientemente de los valores de A, B y C, el rango de la matriz ampliada es tres, lo cual demuestra lo pedido.

Aplicando la Regla de Cramer, las soluciones del sistema en función de los valores de A, B y C son los siguientes:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} A & 2 & 1 \\ B & 1 & 1 \\ C & 1 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-A+B+2C-C-A+2B}{3} = \underline{\underline{\frac{-2A+3B+C}{3} = x}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & A & 1 \\ 1 & B & 1 \\ 1 & C & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-B+A+C-B-C+A}{3} = \underline{\underline{\frac{2A-2B}{3} = y}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & A \\ 1 & 1 & B \\ 1 & 1 & C \end{vmatrix}}{3} = \frac{C+A+2B-A-B-2C}{3} = \underline{\underline{\frac{B-C}{3} = z}}$$

****

<u>BLOQUE B</u>

Cuestión B.- Explicar un procedimiento para determinar si los cuatro puntos diferentes del espacio $P_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $P_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$, $P_3(x_3,\ y_3,\ z_3)$ y $P_4(x_4,\ y_4,\ z_4)$ pertenecen a un mismo plano. Aplicar dicho procedimiento para decidir si los puntos $A(0,\ 1,\ 2)$, $B(0,\ 2,\ 3)$, $C(1,\ 1,\ 1)$ y $D(1,\ 2,\ 3)$ pertenecen o no a un mismo plano.

Los puntos $P_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $P_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$, $P_3(x_3,\ y_3,\ z_3)$ y $P_4(x_4,\ y_4,\ z_4)$ son coplanarios cuando los vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{P_1P_3}$ y $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{P_1P_4}$ sean linealmente dependientes, o sea, que el rango de la matriz que forman tenga de rango dos.

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (x_2,\ y_2,\ z_2) - (x_1,\ y_1,\ z_1) = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{P_1P_3} = P_3 - P_1 = (x_3,\ y_3,\ z_3) - (x_1,\ y_1,\ z_1) = (x_3 - x_1,\ y_3 - y_1,\ z_3 - z_1)$$

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{P_1P_4} = P_4 - P_1 = (x_4,\ y_4,\ z_4) - (x_1,\ y_1,\ z_1) = (x_4 - x_1,\ y_4 - y_1,\ z_4 - z_1)$$

Para que los puntos estén en un mismo plano tiene que cumplirse lo siguiente:

$$\underline{\underline{Rango\ \left\{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\right\} = 2\ \Rightarrow \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0}}$$

Para los puntos $A(0,\ 1,\ 2)$, $B(0,\ 2,\ 3)$, $C(1,\ 1,\ 1)$ y $D(1,\ 2,\ 3)$, seria:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 2,\ 3) - (0,\ 1,\ 2) = (0,\ 1,\ 1)$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (1,\ 1,\ 1) - (0,\ 1,\ 2) = (1,\ 0,\ -1).$$

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD} = D - A = (1,\ 2,\ 3) - (0,\ 1,\ 2) = (1,\ 1,\ 1)$$

$$Rango\ \left\{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 + 1 = 1 \neq 0\ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \left\{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\right\} = 3}$$

<u>Los puntos A(0, 1, 2), B(0, 2, 3), C(1, 1, 1) y D(1, 2, 3) no son coplanarios.</u>

****

Problema B.- Se sabe que la recta r corta perpendicularmente al plano π y que el punto A(3, 4, 0) pertenece a la recta r. Se sabe además que el vector $\overrightarrow{u} = (0,\ 1,\ 1)$ tiene como extremo y origen dos puntos del plano π y lo mismo ocurre con el vector $\overrightarrow{v} = (1,\ 0,\ 1)$. Calcular la ecuación de la recta r. ¿Son suficientes los datos anteriores para hallar la ecuación del plano π? Razonar la respuesta.

Teniendo en cuenta que si una recta es perpendicular a un plano lo es a todas las rectas contenidas en el plano, se deduce que la recta r (y como consecuencia cualquier vector director) es perpendicular al plano al que pertenecen los vectores $\overrightarrow{u}\ \ y\ \ \overrightarrow{v}$.

Sabiendo que el producto vectorial de dos vectores es otro vector perpendicular al plano que determinan los dos vectores, el vector $\overrightarrow{w}$, director de la recta r puede ser:

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i + j - k = \underline{(1,\ 1,\ -1) = \overrightarrow{w}}$$

La recta r puede determinarse por su vector director $\overrightarrow{w} = (1,\ 1,\ -1)$ y el punto $A(3,\ 4,\ 0)$ por el cual pasa.

La ecuación de r es: $\underline{\underline{r \equiv (x,\ y,\ z) = (3,\ 4,\ 0) + \lambda(1,\ 1,\ -1)}}$.

El plano π no puede determinarse por no conocer ninguno de sus puntos. Sin embargo, por ser perpendicular a r, su vector normal es el vector director de la recta r. La expresión de la ecuación de π sería de la forma: $\underline{\pi \equiv x + y - z + D = 0}$.

La ecuación anterior representa al haz de planos paralelos al que pertenece π.

****

BLOQUE C

Cuestión C.- ¿Qué significa que la recta $y = ax + b$ sea una asíntota oblicua para la función f(x)? Encontrar la asíntota oblicua para la función $f(x) = \frac{x^3 + cx^2}{3x^2 + 5}$ en función del valor de c.

Para que una recta $y = ax + b$ sea asíntota oblicua de una función, su pendiente a tiene que ser igual a la pendiente en el infinito de la función, es decir:

$$y = ax + b \quad \Rightarrow \quad a = \frac{y - b}{x} \quad \Rightarrow \quad a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - b}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \to \infty} \frac{b}{x} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} - 0 = \underline{\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a}$$

El valor de b se determina de igual forma:

$$y = ax + b \quad \Rightarrow \quad b = y - ax \quad \Rightarrow \quad \underline{b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - ax]}$$

Aplicando las fórmulas anteriores al caso planteado sería:

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^3 + cx^2}{3x^2 + 5}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + cx^2}{3x^3 + 5x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + cx}{3x^2 + 5} = \underline{\frac{1}{3} = a}$$

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3 + cx^2}{3x^2 + 5} - \frac{1}{3}x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^3 + 3cx^2 - 3x^3 - 5x}{9x^2 + 15} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{3cx^2 - 5x}{9x^2 + 15} = \frac{3c}{9} = \underline{\frac{c}{3} = b}$$

La ecuación de la recta asíntota oblicua a la función $f(x) = \frac{x^3 + cx^2}{3x^2 + 5}$ en función de c es la siguiente:

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{3}x + \frac{c}{3}}}$$

****

Problema C.- Sea f la función definida por $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$. Encontrar los valores de a, b y c para los cuales f tenga sus extremos en los puntos x = 1 y x = 2 y de forma que el punto P(1, 6) pertenezca a la gráfica de f.

$$\textit{Por pasar por } P(1,\ 6)\ \Rightarrow\ f(1)=2+a+b+c=6\ ;;\ \underline{a+b+c=4} \qquad (1)$$

$$f'(x)=6x^2+2ax+b\ \Rightarrow\ \begin{cases} f'(1)=0\ \Rightarrow\ 6+2a+b=0\ ;;\ \underline{2a+b=-6} & (2) \\ f'(2)=0\ \Rightarrow\ 6\cdot 4+4a+b=0\ ;;\ \underline{4a+b=-24} & (3) \end{cases}$$

De las ecuaciones (2) y (3):

$$\left.\begin{array}{l} 2a+b=-6 \\ 4a+b=-24 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -2a-b=6 \\ 4a+b=-24 \end{array}\right\} \Rightarrow\ 2a=-18\ ;;\ \underline{\underline{a=-9}}$$

$$2a+b=-6\ ;;\ 2\cdot(-9)+b=-6\ ;;\ -18+b=-6\ ;;\ \underline{\underline{b=12}}$$

Sustituyendo en la ecuación (1) los valores obtenidos de a y b, resulta:

$$a+b+c=4\ ;;\ -9+12+c=4\ ;;\ c=4+9-12=\underline{\underline{1=c}}$$

$$\underline{\underline{\textit{La función resultante es } f(x)=2x^3-9x^2+12x+1}}$$

****

<u>BLOQUE D</u>

Cuestión D.- Explicar el proceso para calcular la integral $I=\int \frac{ax^2+bx+c}{(x-1)(x-2)} \cdot dx$. Aplicar dicho procedimiento al cálculo de $I=\int \frac{x^2-4x+5}{(x-1)(x-2)} \cdot dx$.

En primer lugar, y si es posible, se factoriza la expresión ax^2+bx+c; siendo las raíces de la ecuación $ax^2+bx+c=0,\ x_1\ \ y\ \ x_2$ es: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Si es posible, se simplifica la fracción $\frac{a(x-x_1)(x-x_2)}{(x-1)(x-2)}$, resultando una fracción de la forma $\frac{Mx+N}{x-p}$, que se resuelve fácilmente mediante el siguiente cambio de variables: $x-p=t\ \ ;;\ \ dx=dt$.

En caso general, (no se puede simplificar), se procede del modo siguiente:

Haciendo la división, resulta $\frac{ax^2+bx+c}{(x-1)(x-2)}=A+\frac{Bx+C}{(x-1)(x-2)}$. Teniendo en cuenta que la integral de una suma de funciones es la suma de las integrales, sería:

$$I=\int \frac{ax^2+bx+c}{(x-1)(x-2)} \cdot dx=\int A\,dx+\int \frac{Bx+C}{(x-1)(x-2)} \cdot dx=Ax+\int \frac{Bx+C}{(x-1)(x-2)} \cdot dx=\underline{Ax+I_1}.$$

La integral I_1 se resuelve de la forma siguiente:

La fracción $\frac{Bx+C}{(x-1)(x-2)}$ se puede trasformar en la suma de dos fracciones elementales, de la siguiente forma: $\frac{Bx+C}{(x-1)(x-2)}=\frac{M}{x-1}+\frac{N}{x-2}$.

Para determinar los valores de M y N tenemos en cuenta que:

$$\frac{Ax+B}{(x-1)(x-2)}=\frac{M}{x-1}+\frac{N}{x-2}=\frac{M(x-2)+N(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{Mx-2M+Nx-N}{(x-1)(x-2)}=$$

$$=\frac{(M+N)x+(-2M-N)}{(x-1)(x-2)}\ \Rightarrow \begin{cases} M+N=B \\ -2M-N=C \end{cases}\ \Rightarrow\ (de\ \ aquí\ \ se\ \ obtienen\ \ M\ \ y\ \ N)$$

Sustituyendo los valores de M y N, resulta:

$$I_2 = \int \left(\frac{M}{x-1} + \frac{N}{x-2} \right) \cdot dx = \int \frac{M}{x-1} \cdot dx + \int \frac{N}{x-2} \cdot dx = M \int \frac{1}{x-1} \cdot dx + N \int \frac{1}{x-2} \cdot dx =$$

$$= \underline{M \cdot L(x-1) + N \cdot L(x-2) + K = I_2}$$

Sustituyendo: $\underline{\underline{I = Ax + M \cdot L(x-1) + N \cdot L(x-2) + K}}$

La resolución de la integral $I = \int \frac{x^2 - 4x + 5}{(x-1)(x-2)} \cdot dx$ es como sigue:

$x^2 - 4x + 5 = 0$;; $x = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} \Rightarrow x \notin R \Rightarrow$ (no se puede descomponer).

$$(x-1)(x-2) = x^2 - 2x - x + 2 = x^2 - 3x + 2$$

Efectuando la división resulta:

$$\frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x^2 - 3x + 2) + (-x + 3)}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 3x + 2} + \frac{-x+3}{x^2 - 3x + 2} = \underline{1 + \frac{-x+3}{x^2 - 3x + 2}}$$

Según lo anterior, la resolución de la integral es como sigue:

$$I = \int \frac{x^2 - 4x + 5}{(x-1)(x-2)} \cdot dx = \int \left[1 + \frac{-x+3}{(x-1)(x-2)} \right] \cdot dx = \int 1 \cdot dx + \int \frac{-x+3}{(x-1)(x-2)} \cdot dx = \underline{x + I_1 = I}$$

$$\frac{-x+3}{(x-1)(x-2)} = \frac{M}{x-1} + \frac{N}{x-2} = \frac{M(x-2) + N(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{Mx - 2M + Nx - N}{(x-1)(x-2)} =$$

$$= \frac{(M+N)x + (-2M - N)}{(x-1)(x-2)} \Rightarrow \begin{cases} M + N = -1 \\ -2M - N = 3 \end{cases} \Rightarrow -M = 2 \text{ ;; } \underline{M = -2} \text{ ;; } \underline{N = 1}$$

$$I_1 = \int \frac{-x+3}{(x-1)(x-2)} \cdot dx = \int \left(\frac{-2}{x-1} + \frac{1}{x-2} \right) \cdot dx = \int \frac{-2}{x-1} \cdot dx + \int \frac{1}{x-2} \cdot dx =$$

$$= -2 \cdot \int \frac{1}{x-1} \cdot dx + \int \frac{1}{x-2} \cdot dx = -2L|x-1| + L|x-2| + K = \underline{L\frac{|x-2|}{(x-1)^2} + K = I_1}$$

$$I = x + I_1 = \underline{\underline{x + L\frac{|x-2|}{(x-1)^2} + K = I}}$$

****

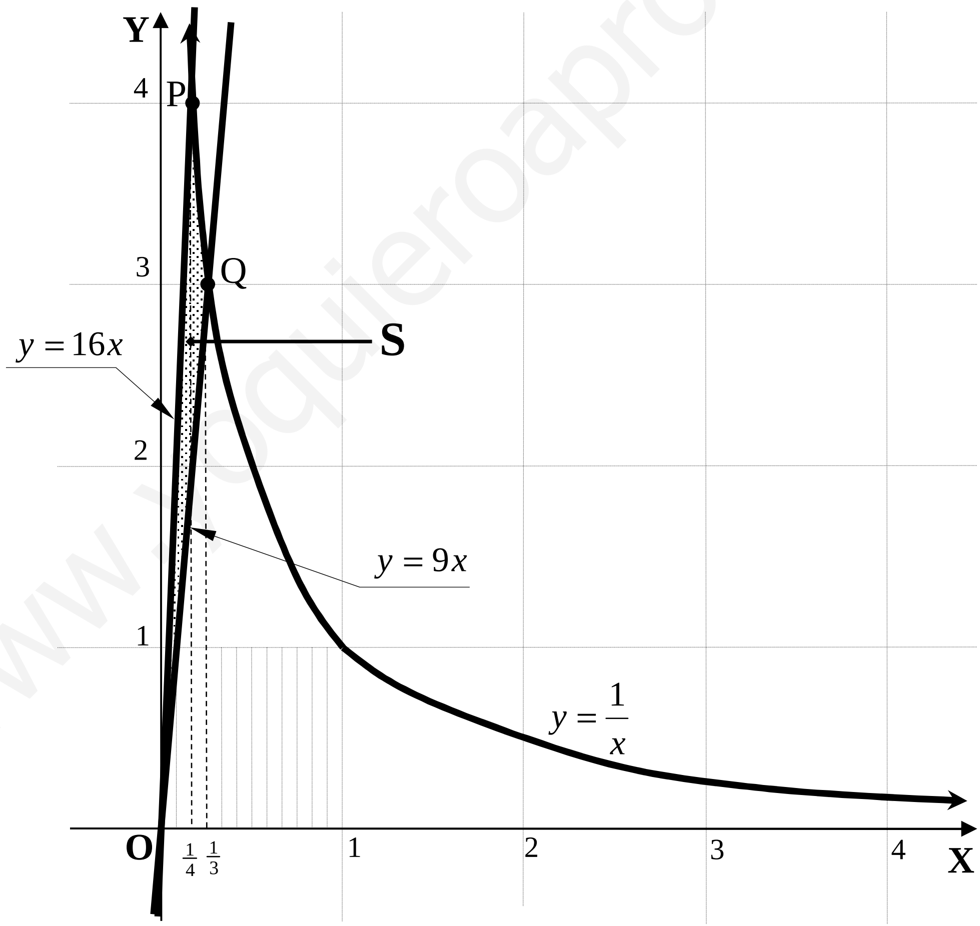
Problema D.- Trazar un esquema gráfico del recinto finito del plano limitado por las rectas $y = 16x$, $y = 9x$ y la curva $y = \frac{1}{x}$ y situado en el primer cuadrante. Calcular el área de dicho recinto.

Los puntos de corte de la curva con cada una de las rectas son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \\ y = 16x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{x} = 16x \;;;\; 16x^2 = 1 \;;;\; x^2 = \frac{1}{16} \;;;\; x = \frac{1}{4} \;\; (x > 0) \;\Rightarrow\; \underline{P\left(\frac{1}{4},\ 4\right)}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \\ y = 9x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{x} = 9x \;;;\; 9x^2 = 1 \;;;\; x^2 = \frac{1}{9} \;;;\; x = \frac{1}{3} \;\; (x > 0) \;\Rightarrow\; \underline{Q\left(\frac{1}{3},\ 3\right)}$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la siguiente:



De la observación de la figura se deduce que el área pedida es:

$$S = \int_0^{\frac{1}{4}} (16x - 9x) \cdot dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{x} - 9x\right) \cdot dx = \int_0^{\frac{1}{4}} (7x) \cdot dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{x} - 9x\right) \cdot dx =$$

$$=\left[\frac{7x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{4}}+\left[Lx-\frac{9x^2}{2}\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}=\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{1}{16}-0\right)+\left(L\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)-\left(L\frac{1}{4}-\frac{9}{32}\right)=$$

$$=\frac{7}{32}+L1-L3-\frac{1}{2}-\left(L1-L4-\frac{9}{32}\right)=\frac{7}{32}+0-L3-\frac{1}{2}-0+L4+\frac{9}{32}=\frac{16}{32}-\frac{1}{2}+L\frac{4}{3}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+L\frac{4}{3}=\underline{\underline{L\frac{4}{3}\ u^2\cong 0'2877\ u^2=S}}$$

****

BLOQUE E

Cuestión E.- En una bolsa hay monedas de dos tipos: de cinco céntimos y de dos céntimos de euro. En total hay 42 monedas y su valor total es de 1’74 euros. ¿Cuántas monedas hay de cada clase?

Supongamos que x es el número de monedas de 5 céntimos e y es el número de monedas de 2 céntimos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=42 \\ 0'05x+0'02y=1'74 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x+y=42 \\ 5x+2y=174 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -2x-2y=-84 \\ 5x+2y=174 \end{array}\right\} \Rightarrow \ 3x=90 \ \ ;; \ \ \underline{x=30}$$

$$x+y=42 \ \ ;; \ \ 30+y=42 \ \ ;; \ \ \underline{y=12}$$

<u>En la bolsa hay 30 monedas de 5 céntimos y 12 monedas de 2 céntimos.</u>

****

Problema E.- ¿Cuántas diagonales tiene un polígono regular de 20 lados? ¿Cuántas diagonales tiene un polígono regular de 40 lados?

Teniendo en cuenta que la diagonal de un polígono regular es el segmento que une dos vértices no consecutivos, en el caso de un polígono regular de n lados, el número de diagonales son las combinaciones de n elementos tomados de dos en dos, menos el n (los lados no son diagonales y unen vértices).

El número de diagonales (N) de un polígono de n lados es:

$$N = C_{n,\ 2} = \binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!}$$

En el caso de 20 lados:

$$N_{20} = C_{20,\ 2} = \binom{20}{2} = \frac{20!}{(20-2)! \cdot 2!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{18! \cdot 2} = \frac{20 \cdot 19}{2} = \underline{\underline{190\ \ diagonales = N_{20}}}$$

En el caso de 40 lados:

$$N_{40} = C_{40,\ 2} = \binom{40}{2} = \frac{40!}{(40-2)! \cdot 2!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38!}{38! \cdot 2} = \frac{40 \cdot 39}{2} = \underline{\underline{780\ \ diagonales = N_{40}}}$$

****