PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

JUNIO – 2005

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Nota: Deberán contestarse la cuestión o el problema de cada uno de los bloques A, B, C, D y E. Cada uno de los ejercicios será valorado entre 0 y 2 puntos.

BLOQUE A

Cuestión A.- Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Se sabe que las dos matrices tienen su determinante igual a 1. ¿Hay datos suficientes para calcular los valores de a y b? Si la contestación es afirmativa, hallar dichos valores, si no lo es, razonar el motivo.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & b & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 3 \end{vmatrix}=\underline{3a-b=1} \qquad (1)$$

$$|B|=\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a & b \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-(5a-2b)=\underline{-5a+2b=1} \qquad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} 3a-b=1 \\ -5a+2b=1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 6a-2b=2 \\ -5a+2b=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{a=3}} \;;\; 3a-b=1 \;;\; 9-b=1 \;;\; \underline{\underline{b=8}}$$

****

Problema A.- Dado el sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+z=a \\ 3x+y+az=2 \end{cases}$, discutir su compatibilidad en función del parámetro a.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \alpha \\ 3 & 1 & a & 2 \end{pmatrix}$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, para que un sistema sea incompatible es necesario que los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada sean diferentes.

El rango de M es, en función de a, el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix}=a+2+3-3-1-2a=1-a=0 \;;;\; \underline{a=1}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a\neq 1 \Rightarrow Rango\ \ M\ =Rango\ \ M'=3=n^{o}\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ Determinado}}$$

Veamos que ocurre con los rangos de M y M’ para a = 1, que hacen que el rango de M sea menor que tres:

$$Para\ \ a=1\ \ es\ \ M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Rango\ \ M\ =2} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ \ de\ \ M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2+2+3-3-1-4=-1\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ de\ \ M'=3}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ \alpha=1 \Rightarrow Rango\ \ M\ \neq Rango\ \ M' \Rightarrow Incompatible}}$$

****

BLOQUE B

Cuestión B.- Para cada valor de a los puntos P(1, 2, 3) y A(0, 1, a) son simétricos respecto a un plano π. Hallar, de forma razonada, la ecuación de dicho plano. En particular encontrar el plano para a = 2.

El plano pedido tiene como vector normal a cualquier vector $\overrightarrow{n}$ que sea combinación lineal del vector $\overrightarrow{AP}$ y contiene al punto medio M del segmento $\overline{AP}$.

$$M \Rightarrow \begin{cases} x_m = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} \\ y_m = \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \\ z_m = \frac{z_1+z_2}{2} = \frac{3+a}{2} \end{cases} \Rightarrow \underline{M\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{a+3}{2}\right)}$$

$$\overline{AP} = P - A = (1,\ 2,\ 3) - (0,\ 1,\ a) = (1,\ 1,\ 3-a) \Rightarrow \underline{\overrightarrow{n} = (1,\ 1,\ 3-a)}$$

El plano pedido es $\pi \equiv x + y + (3-a)z + D = 0$. Como este plano pasa por el punto M, tiene que satisfacer su ecuación:

$$\pi \equiv \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + (3-a)\cdot\frac{a+3}{2} + D = 0\ ;;\ 2 + \frac{9-a^2}{2} + D = 0\ ;;\ D = -2 - \frac{9-a^2}{2} = \underline{\frac{a^2-13}{2} = D}$$

$$\pi \equiv x + y + (3-a)z + \frac{a^2-13}{2} = 0\ ;;\ \underline{\underline{\pi \equiv 2x + 2y + 2(3-a)z + (a^2-13) = 0}}$$

Para a = 2, resulta:

$$\underline{\underline{\pi \equiv 2x + 2y + 2z - 9 = 0}}$$

****

Problema B.- Sea la recta r que contiene al punto P(1, -1, 2), es perpendicular al plano de ecuación $\pi \equiv 3x - 2y + z + 50 = 0$. Encontrar unas ecuaciones paramétricas de r. Hallar de forma razonada la ecuación de un plano α que contenga al punto O(0, 0, 0) y que no tenga puntos comunes con r ¿Es único dicho plano?

La recta r tiene como vector director al vector normal del plano: $\overrightarrow{n} = (3,\ -2,\ 1)$.

Unas ecuaciones paramétricas de r sen:

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}}}$$

Si el plano α que queremos hallar no tiene puntos en común con r, indica que es paralelo a la misma.

La recta r' paralela a r y que pasa por el origen es: $r' \equiv \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

El plano pedido α puede ser cualquiera de los infinitos planos cuyo eje es la recta r', excepto el plano del haz que contiene a r.

El haz de planos mencionado se puede obtener por un par de ellos que determinen a la recta r', los cuales obtenemos de la expresión de r' por unas ecuaciones continuas:

$$r' \equiv \frac{x}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1} \quad ;; \quad \left.\begin{matrix} -2x = 3y \\ x = 3z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \textit{Haz de planos}: \underline{\left.\begin{matrix} 2x + 3y = 0 \\ x - 3z = 0 \end{matrix}\right\}}$$

Un plano cualquiera puede ser: $\underline{\underline{\alpha \equiv 2x + 3y = 0}}$, uno de los infinitos que no contiene a r, como puede comprobarse, al no contener al punto P(1, -2, 1) que pertenece a r.

****

BLOQUE C

Cuestión C.- Para cada h se considera la función $f(x)=2x^3-3x^2+h$. Hallar los puntos en los que f alcanza sus valores máximo y mínimo. Encontrar h para que el valor de f en el mínimo local hallado antes sea 0.

Para que f(x) tenga máximos o mínimos relativos, su derivada tiene que ser cero:

$$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)=0\ \Rightarrow\ \underline{x_1=0}\ ;;\ \underline{x_2=1}$$

$$f''(x)=12x-6\quad\Rightarrow\quad\begin{cases} f''(0)=-6<0\ \rightarrow\ \underline{Máximo\ \ relativo\ \ para\ \ x=0} \\ f''(1)=12-6=6>0\ \rightarrow\ \underline{Mínimo\ \ relativo\ \ para\ \ x=1}\end{cases}$$

$$Máximo\ \ relativo\ \Rightarrow\ f(0)=h\quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{Máx.(0,\ h)}}$$

$$Mínimo\ \ relativo\ \Rightarrow\ f(1)=2-3+h=h-1\ \Rightarrow\quad \underline{\underline{Mín.(1,\ h-1)}}$$

Como el mínimo relativo se produce para x = 1, tiene que ser, según las condiciones del ejercicio f(1) = 0:

$$f(1)=0\Rightarrow\ 2\cdot 1^3-3\cdot 1^2+h=0\ ;;\ 2-3+h=0\ ;;\ \underline{\underline{h=1}}$$

****

Problema C.- Representar la función $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ estudiando previamente su dominio de definición y sus máximos y mínimos locales. ¿Tiene f asíntotas oblicuas? Razonar la contestación en caso negativo y calcularlas en caso afirmativo.

El dominio de una función racional es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \underline{\underline{D(f)\Rightarrow R-\{\ \}}}$$

Para estudiar los máximos y mínimos relativos calculamos sus derivadas primera y segunda:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x-1)-x^2\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\underline{\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}=f'(x)}$$

$$f''(x)=\frac{(2x-2)\cdot(x-1)^2-x(x-2)\cdot 2\cdot(x-1)\cdot 1}{(x-1)^4}=\frac{(2x-2)\cdot(x-1)-2x(x-2)}{(x-1)^3}=$$

$$=\frac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x}{(x-1)^3}=\underline{\frac{2}{(x-1)^3}=f''(x)}$$

Para que existan máximos o mínimos relativos es condición necesaria que se anule la primera derivada:

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}=0\ ;;\ x(x-2)=0\ ;;\ \underline{x_1=0}\ ;;\ \underline{x_2=2}$$

$$f''(0)=\frac{2}{(0-1)^3}=\frac{2}{-1}=-2<0\Rightarrow Máx.\ ;;\ f(0)=0\Rightarrow \underline{\underline{Máx.\to O(0,\ 0)}}$$

$$f''(2)=\frac{2}{(2-1)^3}=\frac{2}{1}=2>0\Rightarrow Mín.\ ;;\ f(2)=\frac{2^2}{2-1}=4\Rightarrow \underline{\underline{Mín.\to P(2,\ 4)}}$$

Las asíntotas de la función son las siguientes:

<u>Horizontales</u>: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$y=k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1}=\infty\Rightarrow \underline{No\ \ tiene}$$

<u>Verticales</u>: son los valores de x que anulan el denominador: $x-1=0 \Rightarrow \underline{\underline{x=1}}$

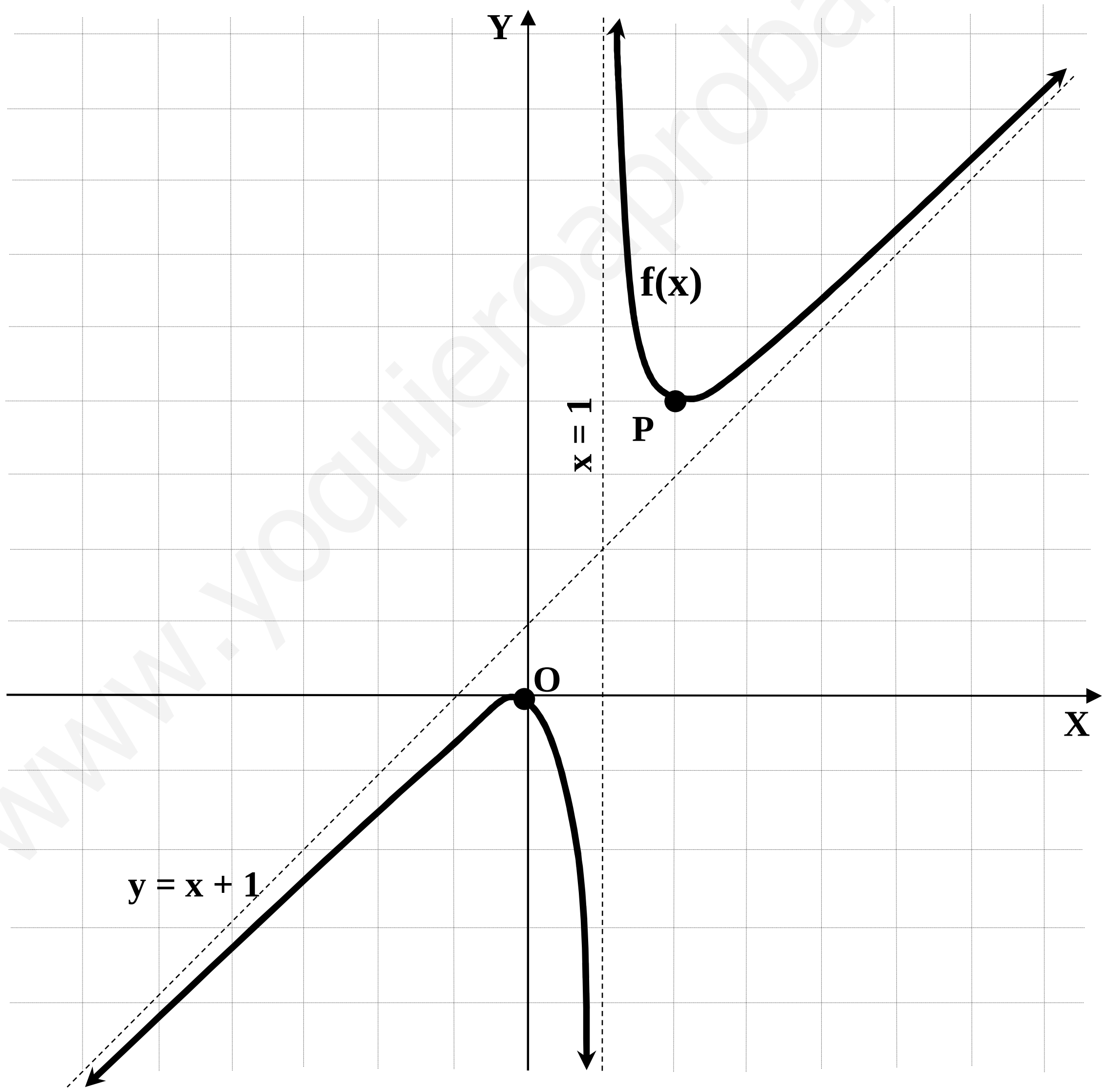
<u>Oblicuas</u>: Para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador; como en nuestro caso ocurre eso, <u>tiene asíntotas oblícuas.</u>

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = \underline{1 = m}$$

$$n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x-1} = \underline{1 = n}$$

$$Asíntota \;\; oblícua \;\Rightarrow\; \underline{\underline{y = x + 1}}$$

Con los datos anteriores, la representación gráfica de la función es, aproximadamente, la siguiente:



****

BLOQUE D

Cuestión D.- Enunciar la fórmula de Barrow, y explicar como se utiliza para el cálculo del área de una figura plana.
Usar dicha fórmula para calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4$, el eje OX y la recta x = 3.

El enunciado de la regla de Barrow es el siguiente:

Si f(x) es una función continua en el intervalo [a, b] y F(x) es una función primitiva de f(x) en dicho intervalo, entonces se verifica la siguiente igualdad:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a)$$

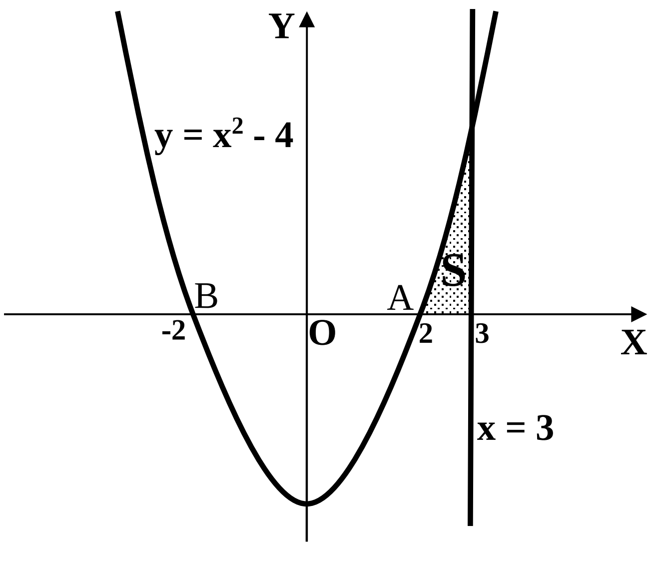
Cuando se desea calcular el área de una figura plana pueden presentarse los tres siguientes casos:

1.- Que todas las ordenadas del recinto a calcular sean positivas, en cuyo caso el área pedida se obtiene aplicando la fórmula tal como se indica en la teoría.

2.- Que todas las ordenadas del recinto a calcular sean negativas, en cuyo caso el área pedida se obtiene aplicando la fórmula tal como se indica en la teoría. Precedida del signo menos; teniendo en cuenta la propiedad de las integrales definidas que indica que si se cambian los límites de integración el valor de la integral cambia de signo, en este caso, el valor del área se obtiene cambiando entre sí los límites de integración.

3.- Que parte del recinto tenga ordenadas positivas y otra parte las tenga negativa; en este caso se tiene en cuenta lo expuesto en los casos anteriores.

La representación aproximada de la situación es la siguiente:



Los puntos de intersección de la curva con el eje de abscisas son los siguientes:

$$y^2 = x^2 - 4 = 0 \;;;\; x^2 = 4 \;;;\; x_1 = 2 \;\rightarrow\; \underline{A(2,\ 0)} \;;;\; x_2 = -2 \;\rightarrow\; \underline{B(-2,\ 0)}$$

El valor del área pedida es:

$$S = \int_2^3 \left(x^2 - 4\right) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_2^3 = \left(\frac{3^3}{3} - 4 \cdot 3\right) - \left(\frac{2^3}{3} - 4 \cdot 2\right) = 9 - 12 - \left(\frac{8}{3} - 8\right) = -3 - \frac{8}{3} + 8 =$$

$$= 5 - \frac{8}{3} = \frac{15-8}{3} = \underline{\underline{\frac{7}{3}\ u^2 = S}}$$

****

Problemaa D.- Calcular la primitiva de $\int \frac{2\,dx}{x^3 - x}$. Explicar los pasos seguidos para efectuar dicho cálculo.

Se trata de transformar la expresión $\frac{2}{x^3 - x}$ en la suma de tres fracciones simples cuyo común denominador sea el de la fracción, de la forma $\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$, siendo a, b y c las raíces de la ecuación formada al igualar a cero el denominador y los valores A, B y C se determinan por identificación de coeficientes, tal como se hace a continuación:

$$x^3 - x = 0 \;;;\; x\left(x^2 - 1\right) = 0 \;;;\; x(x-1)(x-1+) = 0 \;;;\; \underline{x_1 = 0} \;;;\; \underline{x_2 = 1} \;;;\; \underline{x_3 = -1}$$

$$\frac{2}{x^3 - x} = \frac{A}{x-0} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} = \frac{A\left(x^2-1\right) + Bx(x+1) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{Ax^2 - A + Bx^2 + Bx + Cx^2 - Cx}{x(x-1)(x+1)} = \frac{(A+B+C)x^2 + (B-C)x - A}{x(x-1)(x+1)} \Rightarrow \begin{cases} A + B + C = 0 \\ B - C = 0 \\ -A = 2 \rightarrow \underline{A = -2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} B + C = -2 \\ B - C = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2B = -2 \;;;\; \underline{B = -1} \;;;\; B - C = 0 \;;;\; C = B = \underline{-1 = C}$$

$$\int \frac{2\,dx}{x^3 - x} = \int \left(\frac{-2}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{-1}{x+1} \right) \cdot dx = -2\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= -2\,L\,x - L\,(x-1) - L\,(x´1) + K = \underline{\underline{-\,L\left[x\left(x^2-1\right)\right] + K}}$$

****

BLOQUE E

Cuestión E.- En el interior de dos cajas hay repartidas monedas de 10 céntimos, 20 céntimos y 50 céntimos de euro. En total hay 1000 monedas y su valor es de 340 euros. La primera caja contiene únicamente monedas de 10 y de 20 céntimos. La segunda caja contiene sólo 500 monedas de 50 céntimos. ¿Cuántas monedas hay de cada clase?

Sean x, y, z el número de monedas de 10, 20 y 50 céntimos, respectivamente.

$2^{a}\ \ caja \Rightarrow \underline{z = 500}\ \ ;;\ \ 500 \cdot z = 500 \cdot 0'5 = 250\ \ euros$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1000 \\ 0'1x+0'2y+0'5z=340 \end{array}\right\} \rightarrow\ z=500\ \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+500=1000 \\ 0'1x+0'2y+0'5\cdot 500=340 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=500 \\ 0'1x+0'2y+250=340 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x+y=500 \\ 0'1x+0'2y=90 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y=500 \\ x+2y=900 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x-y=-500 \\ x+2y=900 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ \ \underline{y=400}\ \ ;;\ \ x+y=500\ \ ;;\ \ x+400=500\ \ ;;\ \ \underline{x=100}$

<u>Hay 100 monedas de 10 céntimos; 400 de 20 céntimos y 500 de 50 céntimos.</u>

****

Problema E.- Demostrar que la expresión $n^3 - 3n^2 + 2n$ es múltiplo de 6 para cada número natural de n.

$$n^3 - 3n^2 + 2n = n\left(n^2 - 3n + 2\right)$$

Descomponiendo factorialmente la expresión $n^2 - 3n + 2$:

$$n^2 - 3n + 2 = 0 \ ;; \ n = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = 2 \\ n_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{n^2 - 3n + 2 = (n-1)(n-2)}$$

$$n^3 - 3n^2 + 2n = n\left(n^2 - 3n + 2\right) = n(n-1)(n-2)$$

Como podemos observar, siendo n un número natural, la expresión dada es el producto de tres números naturales consecutivos y en tres números consecutivos, necesariamente, hay un múltiplo de tres y, por supuesto algún número par.

El producto de tres números naturales, donde uno de ellos es par, otro es múltiplo de tres y el tercero es indiferente, siempre resultará un múltiplo de 6, por lo tanto, podemos asegurar que:

$$\underline{\underline{n^3 - 3n^2 + 2n = \dot{6}, \ \forall n \in N \ \ (n \geq 3), \ \ c.q.d.}}$$

****