PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

SEPTIEMBRE – 2005

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Nota: Deberán contestarse la cuestión o el problema de cada uno de los bloques A, B, C, D y E. Cada uno de los ejercicios será valorado entre 0 y 2 puntos.

BLOQUE A

Cuestión A.- Para cada a se considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$. Determinar:

a) Encontrar el valor de a para el cual el determinante de A vale 9.

b) Con el valor de a encontrado antes, calcular la matriz M = A^2 + A.

----

a)

$$|A|=9 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix}=9 \;;;\; a^3+1=9 \;;;\; a^3=8=2^3 \;;;\; \underline{\underline{a=2}}$$

b)

$$Para \;\; a=2 \Rightarrow M=A^2+A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0+2+2 & 0+0+4 & 0+1+0 \\ 0+0+1 & 2+0+2 & 4+0+0 \\ 0+4+0 & 1+0+0 & 2+2+0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}=M}}$$

****

Problema A.- Dado el sistema $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ x+Ay+3z=0 \\ x+y+z=A \end{cases}$, discutir su compatibilidad en función del parámetro A. Resolver en los casos en que sea compatible indeterminado.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes :

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & A & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;\; y \;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & A & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & A \end{pmatrix}$$

$$|\,M\,|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & A & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=A+3+6-3A-3-2=4-2A=2(2-A)=0 \;\;;;\;\; \underline{A=2}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; A\neq 2 \;\Rightarrow\; Rango\,M = Rango \;M'=3=n^{o} \;Incóg. \Rightarrow\; Compatible \;\; Determinado}}$$

Para $A=2$ resulta $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Bigg\} \Rightarrow \underline{L_1=L_2}$

.

Para A = 2 los rangos de ambas matrices son iguales a dos.

$$\underline{\underline{Para \;\; A=2 \;\Rightarrow\; Rango\,M = Rango \;M'=2<n^{o} \;Incóg. \Rightarrow\; Compatible \;\; Indeterminado}}$$

Resolvemos para A = 2:

El sistema resulta $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$. Despreciando la primera ecuación resulta el sistema equivalente: $\left.\begin{array}{r} x+2y+2z=0 \\ x+y+z=2 \end{array}\right\}$.

Haciendo $\underline{z=\lambda}$ resulta: $\left.\begin{array}{l} x+2y=-2\lambda \\ x+y=2-\lambda \end{array}\right\} \;\; \left.\begin{array}{r} x+2y=-2\lambda \\ -x-y=-2+\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{y=-2-\lambda}$.

$x+y=2-\lambda \;\;;;\;\; x-2-\lambda=2-\lambda \;\;;;\;\; \underline{x=4}$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=4 \\ y=-2-\lambda \quad ;; \quad \forall\lambda\in R \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

****

BLOQUE B

Cuestión B.- Encontrar las condiciones que deben satisfacer a y b para que el punto $Q(2,\ a,\ b)$ esté en el mismo plano que los puntos A(1, 3, 1), B(1, 0, -1) y C(0, 0, 2).

Los puntos A, B y C determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ 0,\ -1) - (1,\ 3,\ 1) = (0,\ -3,\ -2)$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (0,\ 0,\ 2) - (1,\ 3,\ 1) = (-1,\ -3,\ 1)$$

El plano π que contiene a los puntos A, B y C es el que tiene como vectores directores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ y contiene a uno cualquiera de los puntos dados, por ejemplo A:

$$\pi(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-1 \\ 0 & -3 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ -3(x-1) + 2(y-3) - 3(z-1) - 6(x-1) = 0 \ ;;$$

$$-3x + 3 + 2y - 6 - 3z + 3 - 6x + 6 = 0 \ ;;\ \underline{\pi \equiv 9x - 2y + 3z - 6 = 0}$$

Para que el punto Q(2, a, b) pertenezca al plano π tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 9x - 2y + 3z - 6 = 0 \\ Q(2,\ a,\ b) \end{array}\right\} \Rightarrow 9 \cdot 2 - 2a + 3b - 6 = 0 \ ;;\ 18 - 2a + 3b - 6 = 0 \ ;;$$

$$\textit{La relación pedida es}: \ \underline{\underline{2a - 3b = 12}}$$

****

Problema B.- Se considera la recta de ecuaciones paramétricas $r \equiv \begin{cases} x = 1+3t \\ y = -1+t \\ z = 2-4t \end{cases}$. Hallar su ecuación como intersección de dos planos (ecuaciones cartesianas). ¿Existe algún valor de s tal que el punto P(1, 2s, s) pertenezca a la recta? Razonar la respuesta tanto en caso afirmativo como en caso negativo.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+3t \\ y = -1+t \\ z = 2-4t \end{cases} \;\;;;\;\; t = \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-4} \;\;\Rightarrow\;\; \begin{cases} x-1 = 3y+3 \\ -4x+4 = 3z-6 \end{cases}$$

Una solución puede ser: $\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} \alpha \equiv x-3y-4=0 \\ 4x+3z-10=0 \end{cases}}}$

Para que el punto $P \in r$ tiene que satisfacer su ecuación:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+3t \\ y = -1+t \\ z = 2-4t \end{cases} \;\;;;\;\; t = \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-4} \;\;\Rightarrow\;\; P(1,\ 2s,\ s) \Rightarrow \frac{1-1}{3} = \frac{2s+1}{1} = \frac{s-2}{-4} \;\;\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \dfrac{2s+1}{1} \;\;;;\;\; 0 = 2s+1 \;\;;;\;\; \underline{s = -\dfrac{1}{2}} \\ \\ 0 = \dfrac{s-2}{-4} \;\;;;\;\; 0 = s-2 \;\;;;\;\; s = 2?? \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{\textit{El punto } P \notin r,\ \ \forall s \in R}}$$

****

BLOQUE C

Cuestión C.- Enunciar el Teorema de Rolle. Dado el intervalo $[0,\ 5]$ y dada la función $f(x) = x^2 - Ax$, encontrar el valor de A para que se pueda aplicar el Teorema de Rolle al intervalo anterior y aplicarlo en ese caso.

El teorema de Rolle se puede enunciar diciendo:

Si f(x) es una función continua en el intervalo [a, b] y derivable en (a, b) y si se cumple que f(a) = f(b), existe al menos un punto $c \in (a,\ b)$ tal que f'(x) = 0.

La función $f(x) = x^2 - Ax$ es continua y derivable en todo su dominio, que es R, independientemente del valor de A, por lo tanto, es aplicable el Teorema de Rolle en el intervalo $[0,\ 5]$.

Aplicando el Teorema:

$$f(x) = x^2 - Ax \;\Rightarrow\; \left.\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(5) = 25 - 5A = 0 \end{cases}\right\} \;\Rightarrow\; f(0) = f(5) \;\Rightarrow\; 25 - 5A = 0 \;;;\; \underline{\underline{A = 5}}$$

$$f(x) = x^2 - 5x \;\Rightarrow\; f'(x) = 2x - 5 = 0 \;\Rightarrow\; 2x = 5 \;;;\; \underline{\underline{x = \frac{5}{2}}}$$

****

Problema C.- Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^4 e^{-x}$. Como consecuencia calcular los máximos y mínimos locales de f y representar su gráfica.

$$f'(x) = 4x^3 e^{-x} + x^4 \cdot (-1) \cdot e^{-x} = 4x^3 e^{-x} - x^4 e^{-x} = \frac{4x^3 - x^4}{e^x} = \underline{\frac{x^3(4-x)}{e^x} = f'(x)}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^3(4-x)}{e^e} = 0 \;\;;;\;\; x^2(4 - x = 0) \;\Rightarrow\; \underline{x_1 = x_2 = 0} \;\;;;\;\; \underline{x_3 = 4}$$

$$Para \;\Rightarrow \begin{cases} x < 0 \;\rightarrow\; f'(x) < 0 \;\Rightarrow\; Decreciente \\ 0 < x < 4 \;\rightarrow\; f'(x) > 0 \;\Rightarrow\; Creciente \\ x > 4 \;\rightarrow\; f'(x) < 0 \;\Rightarrow\; Decreciente \end{cases}$$

$$\underline{\underline{Creciente \Rightarrow (0,\; 4)}} \;\;;;\;\; Decreciente: \underline{\underline{(-\infty,\; 0) \cup (4,\; +\infty)}}$$

$$f''(x) = \frac{(12x^2 - 4x^3)e^x - (4x^3 - x^4)e^x}{(e^x)^2} = \frac{12x^2 - 4x^3 - 4x^3 + x^4}{e^x} = \underline{\frac{x^4 - 8x^3 + 12x^2}{e^x} = f''(x)}$$

$$f''(0) = 0 \;\Rightarrow\; ?? \qquad (*)$$

$$f''(4) = \frac{4^4 - 8 \cdot 4^3 + 12 \cdot 4^2}{e^4} = \frac{256 - 512 + 192}{e^4} = \frac{448 - 512}{e^4} = \frac{-64}{e^4} < 0 \Rightarrow \underline{Máximo}$$

$$f(4) = 4^4 \cdot e^{-4} = \frac{4^4}{e^4} \cong 4'7 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Máx.(4,\; 4'7)}}$$

(*) El caso que nos ocupa es muy especial; tratándose de una función continua en su dominio, que es R, ocurre que, según el estudio del crecimiento y decrecimiento, para valores de x menores que cero la función es decreciente y para valores de x mayores que cero es creciente, lo cual significa, necesariamente, que la función tiene un mínimo relativo para x = 0; sin embargo el valor de la segunda derivada se anula para x = 0. En este caso tiene que recurrirse al siguiente Teorema: “Si una función f(x) es n veces derivable en un punto x = a, y con la derivada enésima continua en dicho punto, si se cumple que: $f'(a) = f''(a) = \cdots\cdots = f^{n-1)}(a) = 0 \;\; y \;\; f^{n)}(a) \neq 0$.En este caso se cumple que:

1.- Si n es impar, la función f es creciente en a cuando $f^{n)}(a) > 0$ y es decreciente cuando $f^{n)}(a) < 0$.

2.- Si n es par, la función f presenta un máximo relativo en el punto a cuando $f^{n)}(a) < 0$ y presenta un mínimo relativo cuando $f^{n)}(a) > 0$”.

Calculamos, pues, las siguientes derivadas.

$$f'''(x)=\frac{\left(4x^3-24x^2+24x\right)e^x-\left(x^4-8x^3+12x^2\right)e^x}{\left(e^x\right)^2}=$$

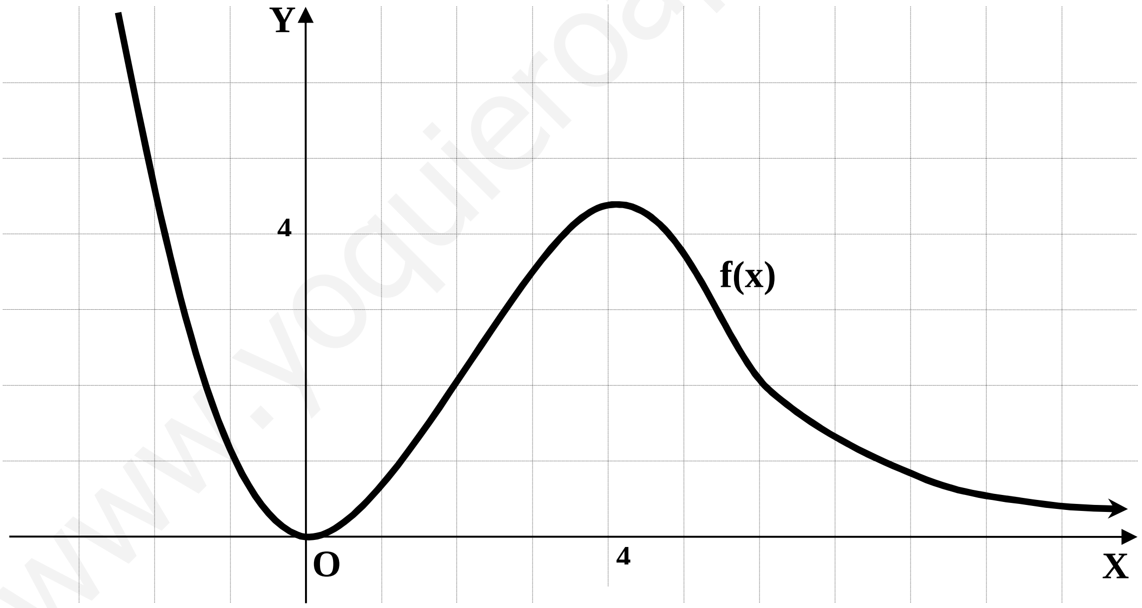
$$=\frac{4x^3-24x^2+24x-x^4+8x^3-12x^2}{e^x}=\underline{\frac{-x^4+12x^3-36x^2+24x}{e^x}=f'''(x)}$$

$$f^{IV)}(x)=\frac{\left(-4x^3+36x^2-72x+24\right)e^x-\left(-x^4+12x^3-36x^2+24x\right)e^x}{\left(e^x\right)^2}=$$

$$=\frac{-4x^3+36x^2-72x+24+x^4-12x^3+36x^2-24x}{e^x}=\underline{\frac{x^4-16x^3+72x^2-96x+24}{e^x}=f^{IV)}(x)}$$

Como puede comprobarse, la cuarta derivada (que es par) no se anula para el valor de x = 0, por lo tanto, según el teorema anterior, la función tiene un mínimo relativo en el origen.

La representación gráfica, aproximada, es la siguiente:



****

<u>**BLOQUE D**</u>

Cuestión D.- Calcular la primitiva de $I = \int \frac{x^2 - A^2}{x^2 + A^2} \cdot dx$ en función del parámetro A, donde se supone que A > 0. Explicar los pasos seguidos para dicho cálculo.

En primer lugar, como se trata de una expresión racional de igual grado en numerador y denominador se puede hacer la división de la forma siguiente:

$$\frac{x^2 - A^2}{x^2 + A^2} = \frac{x^2 + A^2 - A^2 - A^2}{x^2 + A^2} = \frac{x^2 + A^2}{x^2 + A^2} + \frac{-2A^2}{x^2 + A^2} = 1 - \frac{2A^2}{x^2 + A^2}$$

La integral sería ahora:

$$I = \int \frac{x^2 - A^2}{x^2 + A^2} \cdot dx = \int \left(1 - \frac{2A^2}{x^2 + A^2}\right) \cdot dx = \int dx - 2A^2 \int \frac{1}{x^2 + A^2} \cdot dx = \underline{x - 2A^2 \cdot I_1 = I} \quad (*)$$

La integral $I_1 = \int \frac{1}{x^2 + A^2} \cdot dx$ tiene la expresión de $\int \frac{1}{x^2 + 1} \cdot dx = arc\ \ tag\ \ x$. Para transformarla exactamente en esta forma, multiplicamos y dividimos por A^2, con lo cual resulta:

$$I_1 = \frac{1}{A^2} \int \frac{A^2}{x^2 + A^2} \cdot dx = \frac{1}{A^2} \int \frac{1}{\frac{x^2 + A^2}{A^2}} \cdot dx = \frac{1}{A^2} \int \frac{1}{\frac{x^2}{A^2} + 1} \cdot dx = \frac{1}{A^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{A}\right)^2 + 1} \cdot dx.$$

Haciendo el cambio de variable $\frac{x}{A} = t$;; $dx = A \cdot dt$, resulta:

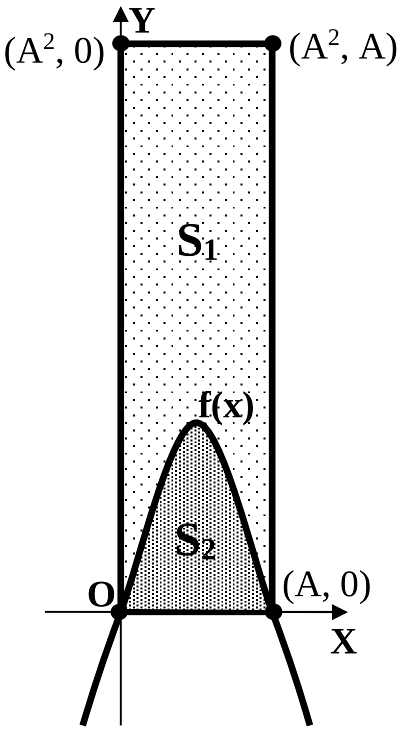
$$I_1 = \frac{1}{A^2} \int \frac{1}{t^2 + 1} \cdot A \cdot dt = \frac{1}{A} \int \frac{1}{t^2 + 1} \cdot dt = \frac{1}{A} \cdot arc\ tag\ t + C = \underline{\frac{1}{A} \cdot arc\ tag \frac{x}{A} + C = I_1}$$

Sustituyendo este valor en la expresión (*), resulta finalmente:

$$I = x - 2A^2 \cdot \left(\frac{1}{A} \cdot arc\ tag \frac{x}{A}\right) + C = \underline{\underline{x - 2A\ arc\ tag \frac{x}{A} + C = I}}$$

****

Problema D.- El rectángulo de vértices $V_1(0,\ 0)$, $V_2(A,\ 0)$, $V_3(0,\ A^2)$ y $V_4(A,\ A^2)$ queda dividido en dos recintos por la curva de ecuación $f(x)=x(A-x)$. Trazar un esquema de ambos recintos y calcular su área.



La expresión de la función en forma polinómica es:

$f(x)=-x^2+Ax$, cuyas dos primeras derivadas son:

$f'(x)=-2x+A$;; $f''(x)=-2<0 \Rightarrow \underline{Máximo}$.

Los puntos de corte de la función con el eje OX son O(0, 0) y P(A, 0).

La representación aproximada de la situación es la que se detalla en la figura adjunta.

El área S del rectángulo es: $S = A \cdot A^2 = \underline{A^3 = S}$.

La superficie S_1 limitada por la función y el eje OX es la siguiente:

$$S_1 = \int_0^A \left(-x^2+Ax\right)\cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{Ax^2}{2}\right]_0^A = \left(-\frac{A^3}{3}+\frac{A\cdot A^2}{2}\right)-\left(-\frac{0^3}{3}+\frac{A\cdot 0^2}{2}\right)=$$

$$=\frac{A^3}{2}-\frac{A^3}{3}-0=\frac{3A^3-2A^3}{6}=\underline{\underline{\frac{A^3}{6}=S_1}}$$

La superficie S_2 es la diferencia del rectángulo y la superficie anterior:

$$S_2 = S - S_1 = A^3-\frac{A^3}{6}=\frac{6A^3-A^3}{6}=\underline{\underline{\frac{5A^3}{6}=S_2}}$$

****

BLOQUE E

Cuestión E.- Un número se dice capicúa si se lee igual al derecho que al revés. Por ejemplo 121 es un número capicúa.

a) Calcular cuántos números de cinco cifras son capicúas.

b) ¿Cuántos de ellos son mayores que 56266?

----

a)

Los números de cinco cifras capicúas son de la forma: ABCBA, pudiéndose repetir los números; es decir, que los dos últimos números son, obligatoriamente iguales a los dos primeros colocados en orden inverso, por lo tanto, habrá tantos capicúas como números con repetición se puedan tomar de tres en tres, o sea:

$$N = VR_{10,\ 3} = 10^3 = \underline{1000 = N}$$

Son capicúas 1000 números de los que tienen cinco cifras.

b)

Serán mayores los que comiencen por las siguientes cifras:

$$\left.\begin{array}{l} 5\ 6\ 3\ \_\ \_ \\ 5\ 6\ 4\ \_\ \_ \\ 5\ 6\ 5\ \_\ \_ \\ 5\ 6\ 6\ \_\ \_ \\ 5\ 6\ 7\ \_\ \_ \\ 5\ 6\ 8\ \_\ \_ \\ 5\ 6\ 9\ \_\ \_ \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{n_1 = 7}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5\ 7\ \_\ \_\ \_ \\ 5\ 8\ \_\ \_\ \_ \\ 5\ 9\ \_\ \_\ \_ \end{array}\right\} \Rightarrow n_2 = 3 \cdot VR_{10,\ 1} = 3 \cdot 10^1 = \underline{30 = n_2}$$

$$\left.\begin{array}{l} 6\ A\ B\ \_\ \_ \\ 7\ A\ B\ \_\ \_ \\ 8\ A\ B\ \_\ \_ \\ 9\ A\ B\ \_\ \_ \end{array}\right\} \Rightarrow n_3 = 4 \cdot VR_{10,\ 2} = 4 \cdot 10^2 = 400 = n_3$$

$$N = n_1 + n_2 + n_3 = 7 + 30 + 400 = \underline{437 = N}$$

Hay 437 capicúas mayores que 56266.

****

Problema E.- Dos ciclistas corren por un velódromo a velocidades constantes. Cuando corren en sentidos opuestos se encuentran cada 10 segundos, mientras que cuando van en el mismo sentido, un ciclista alcanza al otro cada 170 segundos. ¿Cuál es la velocidad de cada ciclista? Se sabe que la pista tiene una longitud de 170 metros.

Cuando van en el sentidos opuestos:

$$(v_1 + v_2) \cdot 10 = 170 \;\; ;; \;\; \underline{v_1 + v_2 = 17} \qquad (*)$$

Cuando van en el mismo sentido, cada 170 segundos el ciclista más rápido habrá recorrido exactamente la longitud de la pista más que el ciclista menos veloz:

$$170 \cdot v_1 = 170 \cdot v_2 + 170 \;\; ;; \;\; \underline{v_1 = v_2 + 1}$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido para v_1 resulta:

$$(v_2 + 1) + v_2 = 17 \;\; ;; \;\; 2v_2 = 16 \;\; ;; \;\; \underline{v_2 = 8} \;\; ;; \;\; \underline{v_1 = 9}$$

Las velocidades de los ciclistas son de 8 m/s y 9 m/s.

****