PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

SEPTIEMBRE – 2006

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Nota: En cada bloque debe contestarse la cuestión o el problema. Cada uno de los ejercicios será valorado entre 0 y 2 puntos.

BLOQUE A

Cuestión A.- La matriz cuadrada B es el resultado de efectuar en la matriz cuadrada A las transformaciones que se describen a continuación:

Primero se cambian entre sí la fila segunda y la tercera. Luego se multiplica por -2 a la segunda columna. Finalmente se suma a la primera fila la segunda fila multiplicada por 5 más la cuarta fila multiplicada por -3.

Si se sabe que el determinante de la matriz A vale 5, calcular razonadamente el valor del determinante de la matriz B.

Al cambiar entre sí las filas segunda y tercera, el valor del determinante cambia de signo. Cuando se multiplica la segunda columna por dos, el valor del determinante resulta multiplicado por dos. Cuando a una línea se suma el valor de otra línea paralela multiplicado por cualquier valor real, el valor del determinante no varía.

Siendo $|A| = 5$, resulta:

$$|B| = -5 \cdot 2 = \underline{\underline{-10 = |B|}}$$

****

Problema A.- Discutir la compatibilidad del siguiente sistema $S \equiv \begin{cases} x - y + z = a \\ x + y - z = 1 \\ 3x - 3y + az = a \end{cases}$ en función del parámetro a.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & a \end{pmatrix} \quad y \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & a & a \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & a \end{vmatrix} = a - 3 + 3 - 3 - 3 + a = 2a - 6 = 0 \;\;;;\;\; \underline{a = 3}$$

$$\underline{\underline{Para\;\; a \neq 0 \Rightarrow Rango\;\; M = Rango\;\; M' = 3 = n^{o}\;\; incóg. \Rightarrow Compatible\;\; Determinado}}$$

Para a = 3 la matriz ampliada es $M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, que tiene opuestas las columnas segunda y tercera, por lo que para determinar su rango se puede prescindir de una de ellas:

$$Rango\;\; M' \;\Rightarrow\; \{C_1,\; C_2,\; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 9 - 3 - 9 + 3 + 3 = -12 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\;\; M' = 3}$$

$$\underline{\underline{Para\;\; a = 3 \Rightarrow Rango\;\; M \neq Rango\;\; M' \;\Rightarrow\;\; Incompatible}}$$

****

BLOQUE B

Cuestión B.- Sea el plano $\pi \equiv 2x + 3y + 4z = a$ y r la recta que contiene al punto $P(1,\ 1,\ -1)$ y tiene como vector director a $\overrightarrow{v} = (1,\ 2,\ -2)$. ¿Existe algún valor de a para el cual la recta esté contenida en el plano? Razonar la contestación en caso negativo. En caso afirmativo encontrar el valor de a.

Para que el plano π contenga a la recta r es necesario que contenga a todos sus puntos, o lo que es lo mismo: basta que contenga a dos puntos de r.

La ecuación vectorial de r es $r \equiv (x,\ y,\ z) = (1,\ 1,\ -1) + \lambda(1,\ 2,\ -2)$; por ejemplo, para $\lambda = 1$ se obtiene el punto Q(2, 3, -3).

Para que el plano π contenga a los puntos P y Q tiene que satisfacerse su ecuación para ellos:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x + 3y + 4z = a \\ P(1,\ 1,\ -1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 + 3 - 4 = a \ ;;\ \underline{a = 1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x + 3y + 4z = a \\ Q(2,\ 3,\ -3) \end{array}\right\} \Rightarrow 4 + 9 - 12 = a \ ;;\ \underline{a = 1}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a = 1\ \ el\ \ plano\ \ \pi\ \ contiene\ \ a\ \ la\ \ recta\ \ r}}$$

****

Problema B.- Calcular la ecuación cartesiana de la recta r cuya expresión paramétrica es $r \equiv \begin{cases} x = 1 - 3\alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 2 + 2\alpha \end{cases}$. ¿Existe algún valor de v tal que el punto $P(v,\ v,\ v)$ pertenezca a la recta r? Razonar la respuesta.

La expresión cartesiana o por dos ecuaciones implícitas de r es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - 3\alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 2 + 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = -3y + 3 \\ 2x - 2 = -3z + 6 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x + 3y - 4 = 0 \\ 2x + 3z - 8 = 0 \end{cases}}}$$

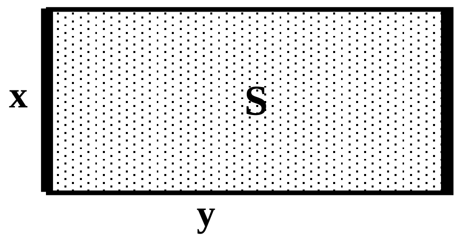
Para que el punto P(v, v, v) pertenezca a r tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 1 - 3\alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 2 + 2\alpha \end{cases} \\ P(v,\ v,\ v) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} v = 1 - 3\alpha \\ v = 1 + \alpha \\ v = 2 + 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 - 3\alpha = 1 + \alpha \ \rightarrow \ \alpha = 0 \\ \\ 1 + \alpha = 2 + 2\alpha \ \rightarrow \ \alpha = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{P \notin r,\ \forall \alpha \in R}}$$

****

BLOQUE C

Cuestión C.- Se quiere poner marco a una ventana rectangular cuya superficie es de 8 metros cuadrados. Los marcos verticales cuestan 300 euros el metro y los horizontales a 150 euros el metro. Hallar las dimensiones de la ventana para que el marco cueste lo menos posible.



$$S = x \cdot y = 8 \;\;;;\;\; \underline{y = \frac{8}{x}}$$

$$Coste = C(x) = 300x + 150y = 300x + 150 \cdot \frac{8}{x} =$$

$$= 300x + \frac{1200}{x} = 300\left(x + \frac{4}{x}\right) = \underline{300 \cdot \frac{x^2+4}{x} = C(x)}$$

Para que el coste sea mínimo, su derivada tiene que ser cero:

$$C'(x) = 300 \cdot \frac{2x \cdot x - 1 \cdot (x^2+4)}{x^2} = 300 \cdot \frac{2x^2 - x^2 - 4}{x^2} = \underline{300 \cdot \frac{x^2-4}{x^2} = C'(x)}$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \;\;;;\;\; x^2 = 4 \;\;;;\;\; x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \quad (-2 \;\; carece \;\; de \;\; sentido) \;\;;;\;\; \underline{x = 2}$$

$$y = \frac{8}{x} = \frac{8}{2} = \underline{4 = y}$$

$$\underline{\underline{Las \;\; \text{dim}ensiones \;\; del \;\; cuadro \;\; deben \;\; ser \;\; de \;\; 4 \;\; metros \;\; de \;\; ancho \;\; por \;\; 2 \;\; metros \;\; de \;\; alto.}}$$

Justificación de que se trata de un mínimo:

$$C''(x) = 300 \cdot \frac{2x \cdot x^2 - 2x \cdot (x^2-4)}{x^4} = \frac{2x^2 - 2x^2 + 8}{x^3} = \underline{\frac{8}{x^3} = C''(x)}$$

$$C''(2) = \frac{8}{2^3} = 1 > 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Mínimo, \;\; c.q.j.}}$$

****

Problema C.- Estudiar las asíntotas y los máximos y mínimos de la siguiente función: $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$.

Por ser $f(-x)=-f(x)$ se trata de una función simétrica con respecto al origen cuyo dominio es: $D(f)\Rightarrow R-\{1,\ -1\}$.

Las asíntotas pueden ser horizontales, verticales u oblicuas.

Las asíntotas horizontales son de la forma y = k, o sea, son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a valer más infinito o menos infinito.

La función $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$ no tiene asíntotas horizontales por lo siguiente:

$$\underset{x\to+\infty}{lím}\ f(x)=\underset{x\to+\infty}{lím}\ \frac{x^3}{x^2-1}=+\infty$$

$$\underset{x\to-\infty}{lím}\ f(x)=\underset{x\to-\infty}{lím}\ \frac{x^3}{x^2-1}=\underset{x\to-\infty}{lím}\ \frac{x}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{-\infty}{1-0}=-\infty$$

Como se observa, ambos límites son infinito.

Las asíntotas horizontales son de la forma x = k; son los valores finitos de x para los cuales la función toma valor infinito, o sea, son los valores de x que anulan el denominador.

La función $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$ tiene como <u>asíntotas verticales las rectas x = 1 y x = -1.</u>

Las asíntotas oblicuas son de la forma y = mx + n, siendo:

$$m=\underset{x\to\infty}{lím}\ \frac{f(x)}{x}=\underset{x\to\infty}{lím}\ \frac{x^3}{x\left(x^2-1\right)}=\underset{x\to\infty}{lím}\ \frac{x^3}{x^3-x}=\underline{1=m}$$

$$n=\underset{x\to\infty}{lím}\ [f(x)-mx]=\underset{x\to\infty}{lím}\ \left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\underset{x\to\infty}{lím}\ \frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}=\underset{x\to\infty}{lím}\ \frac{x}{x^2-1}=\underline{0=n}$$

La función $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$ tiene como <u>asíntota oblicua la recta y = x.</u>

Existe un máximo relativo para los valores reales de x que anulan la primera derivada y hacen negativa a la segunda derivada y, existe un mínimo relativo para los valores reales de x que anulan la primera derivada y hacen positiva a la segunda derivada

$$f'(x)=\frac{3x^2\cdot(x^2-1)-x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2}=\underline{\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=f'(x)}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=0\ ;;\ x^4-3x^2=0\ ;;\ x^2(x^2-3)=0\Rightarrow\underline{x_1=0}\ ;;\ \underline{x_2=\sqrt{3}}\ ;;\ \underline{x_3=-\sqrt{3}}$$

$$f''(x)=\frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2-(x^4-3x^2)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}=\frac{(4x^3-6x)(x^2-1)-4x(x^4-3x^2)}{(x^2-1)^3}=$$

$$=\frac{4x^5-4x^3-6x^3+6x-4x^5+12x^3}{(x^2-1)^3}=\frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}=\underline{\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}=f''(x)}$$

$$f''(x)=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}\Rightarrow f''(0)=\frac{0}{(-1)^3}=0\Rightarrow\underline{\textit{Ni máximo ni mínimo relativo para }x=0}$$

$$f''(x)=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}\Rightarrow f''(\sqrt{3})=\frac{2\sqrt{3}(3+3)}{(3-1)^3}=\frac{12\sqrt{3}}{8}>0\Rightarrow\underline{\textit{Mínimo relativo para }x=\sqrt{3}}$$

$$f(\sqrt{3})=\frac{(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3})^2-1}=\frac{3\sqrt{3}}{3-1}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\underline{\underline{\textit{Mínimo relativo}: A\left(\sqrt{3},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}}$$

Por simetría con respecto al origen:

$$\underline{\underline{\textit{Máximo relativo}: B\left(-\sqrt{3},\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}}$$

****

BLOQUE D

Cuestión D.- Calcular la primitiva siguiente en función de a y b: $I = \int x^2\, e^{ax+b} \cdot dx$.

$$I = \int x^2\, e^{ax+b} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 \to du = 2x \cdot dx \\ e^{ax+b} \cdot dx = dv \to v = \dfrac{e^{ax+b}}{a} \quad (*) \end{array} \right\} \Rightarrow I = x^2 \cdot \frac{e^{ax+b}}{a} - \int \frac{e^{ax+b}}{a} \cdot 2x \cdot dx =$$

$$= \frac{x^2 \cdot e^{ax+b}}{a} - \frac{2}{a} \int x\, e^{ax+b} \cdot dx = \underline{\frac{x^2 \cdot e^{ax+b}}{a} - \frac{2}{a} \cdot I_1 = I \quad (1)}$$

$$I_1 = \int x\, e^{ax+b} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = x \to du = dx \\ e^{ax+b} \cdot dx = dv \to v = \dfrac{e^{ax+b}}{a} \end{array} \right\} \Rightarrow I_1 = x \cdot \frac{e^{ax+b}}{a} - \int \frac{e^{ax+b}}{a} \cdot dx =$$

$$= \frac{x \cdot e^{ax+b}}{a} - \frac{1}{a} \int e^{ax+b} \cdot dx = \frac{x \cdot e^{ax+b}}{a} - \frac{1}{a} \cdot \frac{e^{ax+b}}{a} = \underline{\frac{e^{ax+b}}{a^2}(ax-1) = I_1}$$

Sustituyendo en la expresión (1) el valor obtenido de I_1 resulta:

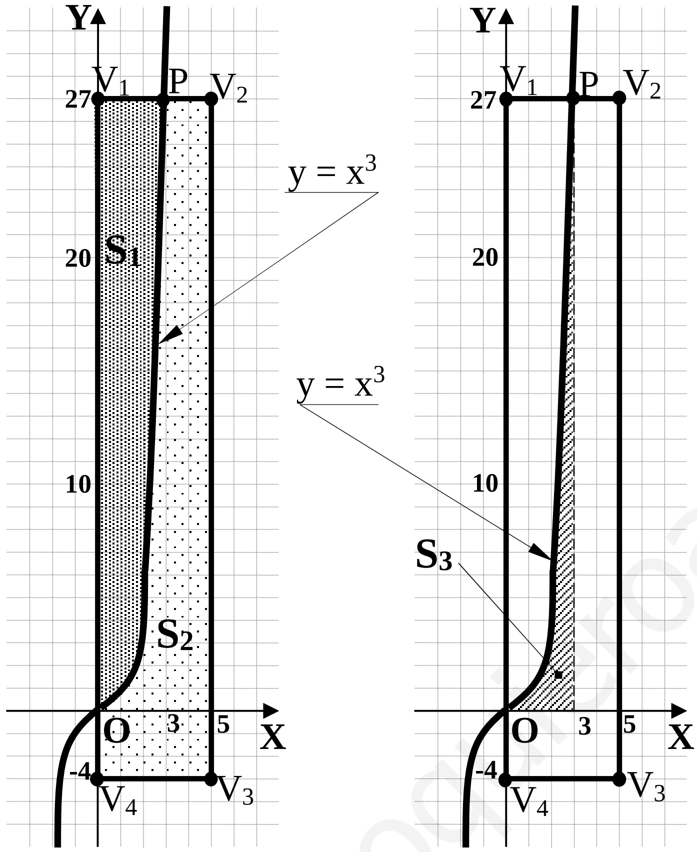
$$I = \frac{x^2 \cdot e^{ax+b}}{a} - \frac{2}{a} \cdot \frac{e^{ax+b}}{a^2}(ax-1) = \underline{\underline{\frac{e^{ax+b}}{a^3}\left(a^2x^2 - 2ax + 2\right) + C = I}}$$

$$(*) \qquad v = \int e^{ax+b} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} ax + b = t \\ adx = dt \end{array} \right\| \to dx = \frac{1}{a} \cdot dt \right\} \Rightarrow v = \frac{1}{a} \cdot \int e^t \cdot dt = \frac{e^t}{a} = \underline{\frac{e^{ax+b}}{a} = v}$$

****

Problema D.- Se considera el rectángulo de vértices $V_1(0,\ 27)$, $V_2(5,\ 27)$, $V_3(5,\ -4)$ y $V_4(0,\ -4)$. La curva $y = x^3$ divide a dicho rectángulo en dos zonas. Trazar un esquema gráfico y calcular el área de cada zona.

Teniendo en cuenta que la curva $y = x^3$ es simétrica con respecto al origen y que para x = 3 la función es y = 27, la representación gráfica de la situación es la siguiente:



El punto P de corte de la curva con el lado superior del rectángulo es P(3, 27).

El valor de la superficie S_3 de la segunda de las figuras es la siguiente:

$$S_3 = \int_0^3 x^3 \cdot dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^3 = \frac{3^4}{4} - 0 = \frac{81}{4}\ u^2$$

Las superficies S_1 y S_2 en que divide la curva al rectángulo pueden determinarse en función de la superficie S_3 de las formas siguientes:

La superficie S_1 es equivalente a la de un rectángulo de base 3 y de altura 27 unidades, menos el valor de la superficie S_3:

$$S_1 = 3 \cdot 27 - S_3 = 81 - \frac{81}{4} = \frac{4 \cdot 81 - 81}{4} = \frac{81 \cdot 3}{4} = \frac{243}{4} = \underline{\underline{60'75\ u^2 = S_1}}$$

La superficie S_2 es equivalente a la superficie del rectángulo dado, menos la superficie S_3 calculada:

$$S_2 = 5 \cdot (27 + 4) - S_2 = 5 \cdot 31 - \frac{243}{4} = 155 - \frac{243}{4} = \frac{4 \cdot 155 - 243}{4} = \frac{620 - 243}{4} = \frac{377}{4} =$$

$$= \underline{\underline{94'25\ u^2 = S_2}}$$

****

BLOQUE E

Cuestión E.- Una persona dio una vuelta a un campo de forma cuadrada. Por el primer lado caminó a 4 km/h, por el segundo caminó a 5 km/h, por el tercero trotó a 10 km/h y por el cuarto corrió a 20 km/h. ¿Cuál fue la velocidad promedio de la vuelta completa?

Sabiendo que la velocidad viene dada por la fórmula $v = \frac{e}{t}$, de donde se deduce que el tiempo es $t = \frac{e}{v}$, y suponiendo que la longitud del lado es L, el tiempo que invierte en cada uno de los lados son los siguientes: $t_1 = \frac{L}{4}$;; $t_2 = \frac{L}{5}$;; $t_3 = \frac{L}{10}$;; $t_4 = \frac{L}{20}$.

Teniendo en cuenta que la velocidad media es igual al espacio total recorrido por el tiempo total invertido en recorrerlo, es:

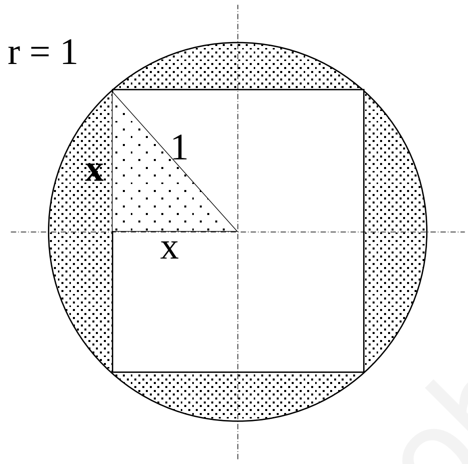
$$v_m = \frac{e_{total}}{t_{total}} = \frac{4L}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4} = \frac{4L}{\frac{L}{4} + \frac{L}{5} + \frac{L}{10} + \frac{L}{20}} = \frac{4L}{L\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}\right)} = \frac{4}{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}} =$$

$$= \frac{4}{\frac{5+4+2+1}{20}} = \frac{4 \cdot 20}{12} = \frac{20}{3} = \underline{\underline{6'67\ km/h = v_m}}$$

****

Problema E.- Se inscribe un cuadrado en un círculo de radio 1. Calcular el área comprendida entre la circunferencia y el cuadrado.

Es evidente que la superficie pedida, que es la sombreada de la figura, es la diferencia entre la superficie del círculo de lado 1 y la superficie del cuadrado cuyo lado se deduce del triángulo rectángulo punteado de la figura.



$$x^2 + x^2 = 1^2 \;\;;;\;\; 2x^2 = 1 \;\;;;\;\; x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \;\;;;\;\; \ell = 2x = \underline{\sqrt{2} = \ell}$$

$$S = S_{CÍRCULO} - S_{CUADRADO} = \pi r^2 - \ell^2 = \pi \cdot 1^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = \pi - 2 = \underline{\underline{1'14\ u^2 = S}}$$

****