PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JUNIO – 2009

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Nota: En cada bloque debe contestarse o la cuestión o el problema. Cada pregunta se valorará entre 0 y 2 puntos.

BLOQUE A

Cuestión A.- Obtener las matrices A y B que cumplen las condiciones:

$$3A+2B=\begin{pmatrix}8 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix} \quad y \quad 2A-3B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -6\end{pmatrix}.$$

$$\left.\begin{array}{l} 3A+2B=\begin{pmatrix}8 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix} \\ 2A-3B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -6\end{pmatrix}\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 9A+6B=\begin{pmatrix}24 & 9\\ 15 & 12\end{pmatrix} \\ 4A-6B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -2 & -12\end{pmatrix}\end{array}\right\} \Rightarrow 13A=\begin{pmatrix}26 & 13\\ 13 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}}$$

$$3A+2B=\begin{pmatrix}8 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix} \;;;\; 3\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+2B=\begin{pmatrix}8 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix} \;;;\; 2B=\begin{pmatrix}8 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 & -3\\ -3 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}}}$$

****

Problema A.- Estudiar la compatibilidad del sistema $S \equiv \begin{cases} x - y - z = 6 \\ 2x + 4y + 2z = -\beta \\ 3x + \beta y + z = \beta \end{cases}$ en función del parámetro β. Resolver es sistema para β = 0.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & \beta & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & -\beta \\ 3 & \beta & 1 & \beta \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de β es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & \beta & 1 \end{vmatrix} = 4 - 6 - 2\beta + 12 + 2 - 2\beta = 12 - 4\beta = 0 \;\;;;\;\; 3 - \beta = 0 \;\;;;\;\; \underline{\beta = 3}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; \beta \neq 3 \;\Rightarrow Rango \;\; M = Rango \;\; M' = 3 = n^{o} \;\; incóg. \Rightarrow Compatible \;\; Determinado}}$$

$$Para \;\; \beta = 3 \;\Rightarrow\; M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 + F_2 = F_3\} \Rightarrow \underline{Rango \;\; M' = 2}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; \beta = 3 \Rightarrow Rango \;\; M = Rango \;\; M' = 2 < n^{o} \;\; incóg. \Rightarrow Compatible \;\; Indeterminado}}$$

Para β = 0 el sistema resulta: $S \equiv \begin{cases} x - y - z = 6 \\ 2x + 4y + 2z = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases}$.

De la tercera ecuación se deduce que $z = -3x$. Sustituyendo en las otras dos:

$$\left. \begin{cases} x - y - (-3x) = 6 \\ 2x + 4y + 2 \cdot (-3x) = 0 \end{cases} \begin{matrix} 4x - y = 6 \\ -4x + 4y = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow 3y = 6 \;\;;;\;\; \underline{y = 2} \;\;;;\;\; 4x - y = 6 \;\;;;\;\; 4x - 2 = 6 \;\;;;$$

$$4x = 8 \;\;;;\;\; \underline{x = 2} \;\;;;\;\; x = -3x = \underline{-6 = z}$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = -6 \end{cases}}}$$

****

BLOQUE B

Cuestión B.- Sea la recta de ecuaciones paramétricas $r \equiv \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$, y sea el plano de ecuación general $\pi \equiv x + 3y = 0$. Calcular de forma razonada la distancia entre la recta r y el plano π.

En primer lugar vamos a comprobar que la recta y el plano son paralelos; en otro caso se cortarían en un punto y la distancia sería cero.

El vector director de r es $\overrightarrow{v} = (-3,\ 1,\ -1)$ y el vector normal de π es $\overrightarrow{n} = (1,\ 3,\ 0)$.

Para que r y π sean paralelos, los vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{n}$ tienen que ser perpendiculares, es decir, que su producto escalar tiene que ser cero:

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = 0\ ;;\ (-3,\ 1,\ -1) \cdot (1,\ 3,\ 0) = -3 + 3 - 0 = 0 \ \rightarrow\ \underline{r\ \ y\ \ \pi\ \ son\ \ \perp,\ \ c.q.c.}$$

La distancia de r a π es equivalente a la distancia de cualquier punto de la recta al plano; considerando el punto de la recta P(1, 2, 1) y teniendo en cuenta que la distancia de un punto a un plano viene dada por la fórmula $d(P,\ \pi) = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$:

$$d(r,\ \pi) = d(P,\ \pi) = \frac{1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0}{\pm\sqrt{1^2 + 3^2 + 0^2}} = \frac{1+6}{\sqrt{7}} = \frac{7}{\sqrt{7}} = \underline{\underline{\sqrt{7}\ \ unid. = d(r,\ \pi)}}$$

****

Problema B.- Dados los puntos A(2, 0, 0), B(0, 2, 0) y C(0, 0, a), hallar la ecuación del plano π_a que contiene a los tres puntos. ¿Existe algún valor de a tal que dicho plano contenga al punto P(1, 1, 1)? Razonar la contestación.

Los puntos A, B y C determinan los vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 2,\ 0) - (2,\ 0,\ 0) = (-2,\ 2,\ 0)$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (0,\ 0,\ a) - (0,\ 2,\ 0) = (0,\ -2,\ a)$$

El plano π_a que determinan los puntos A, B y C puede determinarse por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ y, por ejemplo, el punto B:

$$\pi_a\left(B;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & a \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ 2ax + 4z + 2a(y-2) = 0 \ ;;\ ax + 2z + a(y-2) = 0 \ ;;$$

$ax + 2z + ay - 2a = 0.$

$$\underline{\underline{\pi_a \equiv ax + ay + 2z - 2a = 0}}$$

Para que el plano π_a contenga al punto P(1, 1, 1) tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi_a \equiv ax + ay + 2z - 2a = 0 \\ P(1,\ 1,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot 1 + a \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 2a = 0 \ ;;\ a + a + 2 - 2a = 0 \ ;;\ \underline{2 = 0\ ??}$$

<u>No existe ningún valor real de a para que el punto P pertenezca al plano π.</u>

****

BLOQUE C

Cuestión C.- Sea $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ un polinomio de tercer grado del que se sabe que f(0) = 1, f'(0) = 2 y que tiene dos extremos relativos en x = 1 y en x = 2. Calcular los valores de A, B, C y D y determinar razonadamente si los extremos son máximo o mínimo.

$$f(0) = 1 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{D = 1}}$$

$$f'(0) = 2 \;\Rightarrow\; f'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C \;\Rightarrow\; \underline{\underline{C = 2}}$$

$$\textit{Extremos relativos para } \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(1) = 0 \;\Rightarrow\; 3A + 2B + 2 = 0 \\ \\ f'(2) = 0 \;\Rightarrow\; 12A + 4B + 2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3A + 2B = -2 \\ 6A + 2B = -1 \end{array} \Big\}$$

$$\left. \begin{array}{r} -3A - 2B = 2 \\ 6A + 2B = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow 3A = 1 \;;;\; \underline{\underline{A = \frac{1}{3}}} \;;;\; 3A + 2B = -2 \;;;\; 3 \cdot \frac{1}{3} + 2B = -2 \;;;\; 2B = -3 \;;;\; \underline{\underline{B = -\frac{3}{2}}}$$

El polinomio resulta ser $\underline{f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1}$.

Veamos si los extremos relativos son máximo o mínimo, para lo cual recurrimos a la segunda derivada; si resulta positiva para los valores que anulan la primera derivada se trata de un mínimo relativo y si es negativa, de un máximo relativo:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1 \;;;\; f'(x) = x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{array} \right\} \;;;\; f''(x) = 2x - 3$$

$$f''(1) = 2 \cdot 1 - 3 = 2 - 3 = -1 < 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\textit{Máximo relativo para } x = 1}}$$

$$f''(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3 = 1 > 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\textit{Mínimo relativo para } x = 2}}$$

****

Problema C.- Sea $f(x)=x^2e^{-x}+H$. Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f. Hallar el valor de H para que el valor de f en su máximo sea igual a 1.

La función está definida para cualquier valor real de x.

$$f(x)=x^2\cdot e^{-x}=\frac{x^2}{e^x}\quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{2x\cdot e^x-x^2\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{x\cdot e^x(2-x)}{e^{2x}}=\underline{\frac{x(2-x)}{e^x}=f'(x)}$$

$$f'(x)=0\;\Rightarrow\;x(2-x)=0\;\Rightarrow\begin{cases}\underline{x_1=0}\\ \\ \underline{x_2=2}\end{cases}$$

Los valores que anulan la primera derivada de la función determinan los tres siguientes intervalos: , en los cuales el valor de la derivada es, alternativamente, positivo y negativo.

Considerando el valor sencillo x = 1, perteneciente al intervalo (0, 2), resulta:

$$f'(1)=\frac{1\cdot(2-1)}{e^1}=\frac{1}{e}>0\;\Rightarrow\;\underline{Creciente}$$

$$\underline{\underline{Decrecimiento\;\Rightarrow\;f'(x)<0\;\Rightarrow\;(-\infty,\;0)\cup(2,\;+\infty)}}$$

$$\underline{\underline{Crecimiento\;\Rightarrow\;f'(x)>0\;\Rightarrow\;(0,\;2)}}$$

Para que exista un máximo relativo debe anularse la primera derivada y la segunda derivada tiene que ser negativa para ese valor:

$$f''(x)=\frac{(2-2x)\cdot e^x-x(2-x)\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{2-2x-2x+x^2}{e^x}=\underline{\frac{x^2-4x+2}{e^x}=f''(x)}$$

$$f''(0)=\frac{2}{e^0}=\frac{2}{1}=2>0\;\Rightarrow\;\underline{Mínimo\;\;para\;\;x=0}$$

$$f''(2)=\frac{2^2-4\cdot 2+2}{e^2}=\frac{-2}{e^2}<0\;\Rightarrow\;\underline{Máximo\;\;relativo\;\;para\;\;x=2}$$

Según lo pedido tiene que ser $f(2)=1$:

$$f(2)=2^2e^{-2}+H=1\;\;;;\;\;H=1-\frac{4}{e^2}=\underline{\underline{\frac{e^2-4}{e^2}=H}}$$

****

BLOQUE D

Cuestión D.- Calcular la primitiva $I=\int x^2\, sen(2x)\, dx$ explicando el método seguido para dicho cálculo.

La integral dada tiene que resolverse por el método de "por partes", que está basado en la diferencial de un producto de funciones: $d(u\cdot v)=du\cdot v+u\cdot dv$.

Teniendo en cuenta que la integral de una suma algebraica de funciones es igual a la suma algebraica de las integrales de las funciones, podemos escribir:

$$\int d(u\cdot v)=\int du\cdot v+\int u\cdot dv$$

Sabiendo que $\int d(u\cdot v)=u\cdot v$, la expresión anterior puede ponerse de la forma:

$$\underline{\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du}$$

La expresión anterior se conoce como la del método de integración "por partes".

Aplicando la fórmula anterior podemos determinar la integral de la función dada:

$$I=\int x^2\cdot sen\ (2x)\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} u=x^2\to du=2x\,dx \\ sen\ (2x)\cdot dx=dv\to v=-\frac{1}{2}\cos\ (2x)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2\cdot\left[-\frac{1}{2}\cos\ (2x)\right]-\int -\frac{1}{2}\cos\ (2x)\cdot 2x\cdot dx=-\frac{x^2}{2}\cos\ (2x)+\int x\cdot\cos\ (2x)\cdot dx=$$

$$\underline{=-\frac{x^2}{2}\cos\ (2x)+I_1=I} \qquad (*)$$

$$I_1=\int x\cdot\cos\ (2x)\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{array}{c} u=x\to du=dx \\ \cos\ (2x)\cdot dx=dv\to v=\frac{1}{2}sen\ (2x)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cdot\frac{1}{2}sen\ (2x)-\int\frac{1}{2}sen\ (2x)\cdot dx=\frac{x}{2}sen\ (2x)-\frac{1}{2}\int sen\ (2x)\cdot dx=$$

$$=\frac{x}{2}sen\ (2x)-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\cos\ (2x)=\underline{\frac{x}{2}sen\ (2x)+\frac{1}{4}\cos\ (2x)=I_1}$$

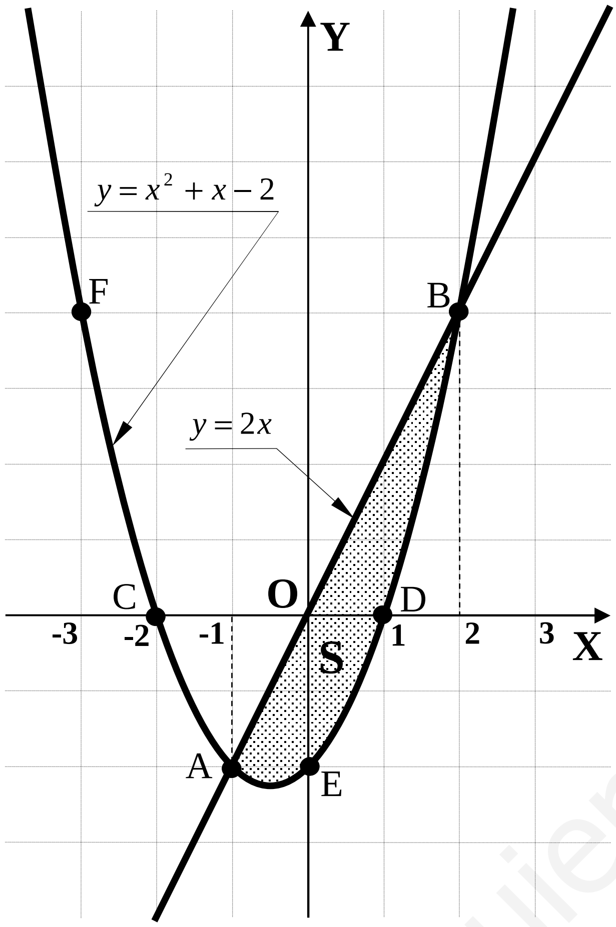
Sustituyendo en valor obtenido de I_1 en el valor de I dado en (*), queda:

$$I=-\frac{x^2}{2}\cos(2x)+\frac{x}{2}\,sen\,(2x)+\frac{1}{4}\cos(2x)+C=\frac{1}{4}\left(1-2x^2\right)\cos(2x)+\frac{x}{2}\,sen\,(2x)+C$$

$$\underline{\underline{I=\int x^2\,sen(2x)\,dx=\frac{1}{4}\left[\left(1-2x^2\right)\cos(2x)+2x\cdot sen\,(2x)\right]+C}}$$

****

Problema D.- Trazar un esquema de la región del plano limitada por la curva de ecuación $y = x^2 + x - 2$ y la recta y = 2x. Calcular el área de dicha región.



Los puntos de corte de la parábola con la recta son:

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 + x - 2 = 0 \\ y = 2x \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \ ;;$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \rightarrow \underline{A(-1,\ -2)} \\ x_2 = 2 \rightarrow \underline{B(2,\ 4)} \end{cases}$$

Los puntos de corte de la parábola con los ejes de coordenadas son:

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 + x - 2 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \ ;;$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \rightarrow \underline{C(-2,\ 0)} \\ x_2 = 1 \rightarrow \underline{D(1,\ 0)} \end{cases} \qquad \left. \begin{array}{l} y = x^2 + x - 2 \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{E(0,\ -2)}$$

Otro punto que se deduce fácilmente es F(-3, 4), que favorece la representación gráfica de la situación, que es la de la figura adjunta.

Las ordenadas correspondientes a la parábola son iguales o menores que los de la recta en el intervalo correspondiente a la superficie S que debemos calcular.

$$S = \int_{-1}^{2} 2x - \left[\left(x^2 + x - 2\right)\right] \cdot dx = \int_{-1}^{2} \left(2x - x^2 - x + 2\right) \cdot dx = \int_{-1}^{2} \left(-x^2 + x + 2\right) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} =$$

$$= \left(-\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2\right) - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 2 \cdot (-1)\right] = -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) =$$

$$= -\frac{8}{3} + 6 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = 8 - \frac{9}{3} - \frac{1}{2} = 8 - 3 - \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{9}{2}\ u^2 = S}}$$

****

BLOQUE E

Cuestión E.- Sea S la función que a cada número le hace corresponder la suma de sus dígitos, por ejemplo S(2009) = 2 + 0 + 0 + 9 = 11. Calcular el valor de $S(10^{100} - 100)$.

Para facilitar la compresión de la solución consideramos un caso más sencillo, por ejemplo: $S(10^6 - 100)$; sería:

$$\begin{array}{r} 1000000 \\ -\quad 100 \\ \hline 999900 \end{array}$$

Observemos que el número resultante está formado por (6 – 2) = 4 nueves seguidos de dos ceros.

La función $S(10^{100} - 100)$ está formada por un número de (100 – 2) = 98 nueves seguidos de dos ceros, o sea que:

$$\underline{\underline{S(10^{100} - 100) = 98 \cdot 9 = 882}}$$

****

Problema E.- Unos cuantos amigos toman el mismo menú y han de pagar 60 euros entre todos. Pero, dos de ellos no llevan dinero, por lo que los otros los invitan, teniendo que aumentar su aportación en 8 euros cada uno. ¿Cuántos amigos son? ¿Cuánto cuesta cada menú?

Sean x el número de amigos al principio e y el precio del menú.

$$\left.\begin{array}{l} x \cdot y = 60 \\ (x-2)\cdot(y+8) = 60 \end{array}\right\} \Rightarrow \; x \cdot y = (x-2)(y+8) \;\; ;; \;\; x\,y = x\,y + 8x - 2y - 16 = 0 \;\; ;; \;\; 8x - 2y = 16 \;\; ;;$$

$$4x - y = 8 \;\; ;; \;\; \underline{y = 4x - 8}$$

Sustituyendo en la expresión x · y = 60:

$$x \cdot (4x-8) = 60 \;\; ;; \;\; 4x^2 - 8x - 60 = 0 \;\; ;; \;\; x^2 - 2x - 15 = 0 .$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = 1 \pm 4 \;\Rightarrow\; x_1 = 5 \;\; ;; \;\; x_2 = -3 \; (\textit{carece de lógica})$$

$$\underline{x = 5} \;\; ;; \;\; y = 4x - 8 = 20 - 8 = \underline{12 = y}$$

<u>El número de amigos al principio era de 5 y el precio del menú es 12 euros.</u>

****