PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JUNIO – 2011 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas. El examen consta de cinco ejercicios. Se podrán utilizar calculadoras no programables.

OPCIÓN A

1º) Se considera el sistema de ecuaciones lineales $S \equiv \begin{cases} x+2y+3z=-1 \\ 2x+5y+4z=-2 \\ x+3y+m^2z=m \end{cases}$, se pide:

a) Discutir su compatibilidad en función del parámetro m.

b) Resolver el sistema para m = 0.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & m^2 \end{pmatrix} \quad y \quad M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & m^2 & m \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de m es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & m^2 \end{vmatrix}=5m^2+18+8-15-12-4m^2=m^2-1=0 \Rightarrow \underline{m_1=-1} \;;;\; \underline{m_2=1}.$$

$$\underline{\underline{Para \begin{Bmatrix} m\neq -1 \\ m\neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M'=3=n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ Determinado}}$$

$$Para\ m=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_4=-C_1\} \Rightarrow \underline{Rango\ de\ M'=2}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ m=-1 \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M' = 2 < n^{o}\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ Indeterminado}}$$

$$Para\ \ m=1 \ \Rightarrow\ M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ \ de\ \ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5-6-4+5+6-4 = 10-8 = 2 \neq 0 \ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M' = 3}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ m=1 \Rightarrow Rango\ M = 2\ \ ;;\ \ Rango\ M' = 3 \Rightarrow Incompatible}}$$

b)

Para m = 0 el sistema es $S \equiv \begin{cases} x+2y+3z=-1 \\ 2x+5y+4z=-2 \\ x+3y=0 \end{cases}$, que es compatible determinado.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+3z=-1 \\ 2x+5y+4z=-2 \\ x+3y=0 \end{array}\right\} \to x=-3y \quad \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -3y+2y+3z=-1 \\ -6y+5y+4z=-2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -y+3z=-1 \\ -y+4z=-2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} y-3z=1 \\ -y+4z=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{z=-1}}\ ;;\ y-3z=1\ ;;\ y=1+3z=1-3=\underline{\underline{-2=y}}\ ;;\ x=-3y=\underline{\underline{6=x}}.$$

****

2º) Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -4 + 3t \\ z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - y = -6 \end{cases}$. Hallar la ecuación de la recta t perpendicular a las rectas r y s y tal que contenga al punto P(3, -1, 2).

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (1,\ 3,\ 0)$.

Un vector director de s es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que determinan s:

$$\overrightarrow{v_s}' = (1,\ 1,\ -2) \wedge (1,\ -1,\ 0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2j - k - k - 2i = (-2i - 2j - 2k) \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_s} = (1,\ 1,\ 1)}.$$

Un vector director de t es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores directores de las rectas r y s.

$$\overrightarrow{v_t} = (1,\ 3,\ 0) \wedge (1,\ 1,\ 1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3i + k - 3k - j = (3i - j - 2k) = \underline{(3,\ -1,\ -2) = \overrightarrow{v_t}}.$$

La expresión de t dada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas es:

$$\underline{\underline{t \equiv \begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}}}$$

****

3º) Sea f la función $f(x)=x^2 e^{-2x}$.

a) Estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Estudiar sus máximos y mínimos y trazar un bosquejo de su gráfica.

----

a)

La función $f(x)=x^2 e^{-2x}$ es continua en su dominio, que es R.

Una función es creciente o decreciente en un punto según que su primera derivada sea positiva o negativa para ese punto, respectivamente.

$$f(x)=\frac{x^2}{e^{2x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{2x \cdot e^{2x}-x^2 \cdot 2e^{2x}}{e^{4x}}=\frac{2x-2x^2}{e^{2x}}=\underline{\frac{2x(1-x)}{e^{2x}}=f'(x)}.$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 2x(1-x)=0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1=0} \\ \underline{x_2=1} \end{cases}.$$

Las raíces de la primera derivada dividen el dominio de f en los siguientes intervalos: $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ 1)$ y $(1,\ +\infty)$, en los cuales la función f es creciente o decreciente de forma alternativa, por lo cual, basta con determinar la condición de crecimiento o decrecimiento en uno de ellos para determinar el crecimiento o decrecimiento de la función.

Por ejemplo, para x = 2 es: $f'(2)=\frac{2 \cdot 2 \cdot (1-2)}{e^{2 \cdot 2}}=\frac{-4}{e^4}<0 \Rightarrow$ decreciente para x = 2.

$$\underline{\underline{Crecimiento:\ f'(x)>0 \Rightarrow (0,\ 1)}}$$

$$\underline{\underline{Decrecimiento:\ f'(x)<0 \Rightarrow (-\infty,\ 0)\cup(1,\ +\infty)}}$$

b)

Una función tiene un máximo o un mínimo relativo para los valores que anulan la primera derivada; para diferenciar entre máximos y mínimos relativos se recurre a la segunda derivada: según sea positiva o negativa para los valores que anulan la primera derivada, se trata de un mínimo o de un máximo, respectivamente.

$$f''(x)=\frac{(2-4x) \cdot e^{2x}-2x(1-x) \cdot 2e^{2x}}{e^{4x}}=\frac{2-4x-4x(1-x)}{e^{4x}}=\frac{2-4x-4x+4x^2}{e^{4x}}=\underline{\frac{2(2x^2-4x+1)}{e^{4x}}}.$$

$$f''(0)=\frac{2(2 \cdot 0^2-4 \cdot 0+1)}{e^{4 \cdot 0}}=\frac{2}{e^0}=\frac{2}{1}=2>0 \Rightarrow \text{\underline{Mínimo relativo para x = 0.}}$$

$$f(0)=\frac{0}{e^0}=0 \Rightarrow \underline{\underline{Mínimo:\ O(0,\ 0)}}.$$

$$f''(1)=\frac{2\left(2\cdot 1^2-4\cdot 1+1\right)}{e^{4\cdot 1}}=\frac{-2}{e^4}<0 \Rightarrow$$ <u>Máximo relativo para x = 1.</u>

$$f(0)=\frac{1^2}{e^{2\cdot 1}}=\frac{1}{e^2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{Máximo:\ A\left(1,\ \frac{1}{e^2}\right)}}.$$

Teniendo en cuenta que $f(x)=\frac{x^2}{e^{2x}}\geq 0,\ \forall x\in R$ y que el eje OX es una asíntota horizontal, por ser:

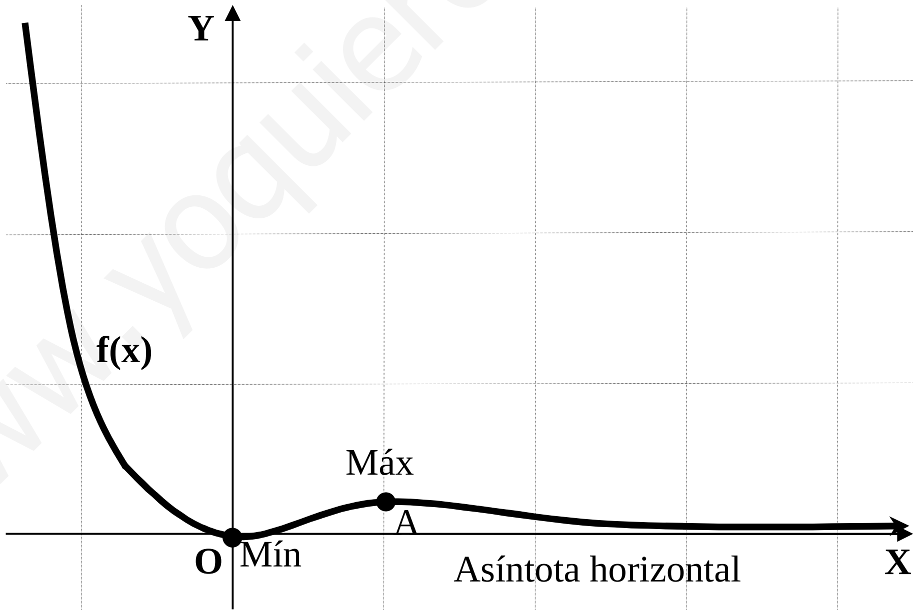
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{2x}}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Indet.\Rightarrow L´Hopital\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2e^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{2x}}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Indet.\Rightarrow L´Hopital\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2e^{2x}}=\frac{1}{\infty}=\underline{0},$$

Para x < 0 la función tiene una rama parabólica, por ser:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^{2x}}=\frac{\infty}{e^{-\infty}}=\infty\cdot\infty=\underline{\infty}.$$

La representación gráfica es, aproximadamente, la que sigue:



****

4º) Calcular las siguientes integrales indefinidas $I_1 = \int x\,L\,x \cdot dx$ e $I_2 = \int x\,sen(2x) \cdot dx$, explicando método seguido para el cálculo.

$$I_1 = \int x \cdot L\,x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = L\,x \rightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ x \cdot dx = dv \rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow I_1 = L\,x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot L\,x - \frac{1}{2}\int x \cdot dx = \frac{x}{2} \cdot L\,x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \underline{\underline{\frac{x}{4}(2\,L\,x - x) + C = I_1}}\,.$$

$$I_2 = \int x \cdot sen\,(2x) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = x \rightarrow du = dx \\ sen\,(2x) \cdot dx = dv \rightarrow v = -\frac{1}{2}\cos\,(2x) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_2 = x \cdot \left[-\frac{1}{2}\cos\,(2x)\right] - \int -\frac{1}{2}\cos\,(2x) \cdot dx = -\frac{x}{2}\cos\,(2x) + \frac{1}{2}\int \cos\,(2x) \cdot dx =$$

$$= \underline{-\frac{x}{2}\cos\,(2x) + \frac{1}{2}A = I_2} \qquad (*)$$

$$A = \int \cos(2x) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2x = t \\ dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right\} \Rightarrow A = \frac{1}{2}\int \cos t \cdot dt = \frac{1}{2}sen\,t + C = \underline{\frac{1}{2}sen\,(2x) + C = A}\,.$$

Sustituyendo el valor obtenido de A en (*) queda:

$$I_2 = -\frac{x}{2}\cos\,(2x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\,sen\,(2x) + C = \underline{\underline{\frac{1}{4}\left[sen\,(2x) - 2x\cos\,(2x)\right] + C = I_2}}\,.$$

****

5º) La suma de 30 múltiplos consecutivos de 7 es igual a 9.345. ¿Cuál es el primer y último número de esta serie de múltiplos? Razonar la respuesta.

Los múltiplos sucesivos de un número constituyen una progresión aritmética de diferencia 7.

Sabiendo que la suma de los n términos de una progresión aritmética viene dada por la fórmula: $S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$; por otra parte, la fórmula del término n-ésimo de una progresión aritmética es $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$.

Sustituyendo la expresión del término n-ésimo en la fórmula de la suma, resulta:

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n = \underline{\frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n = S_n}.$$

De la última expresión se conocen todos los elementos, excepto a_1, que se obtiene despejándolo de la última fórmula: $\underline{a_1 = \frac{\frac{2S_n}{n} - (n-1) \cdot d}{2}}$.

Considerando que: $\begin{cases} S_n = 9.345 \\ n = 30 \\ d = 7 \end{cases} \Rightarrow a_1 = \frac{\frac{2 \cdot 9.345}{30} - (30-1) \cdot 7}{2} = \frac{623 - 203}{2} = \underline{210 = a_1}$.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 210 + 29 \cdot 7 = 210 + 203 = \underline{413 = a_n}.$$

<u>El primer múltiplo de 7 es 210 y el último, 413.</u>

****

OPCIÓN B

1º) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Contestar razonadamente a la siguiente pregunta: ¿existe algún valor de $\alpha \in R$ tal que A no tenga inversa para ese valor?

b) Calcular, en caso de que sea posible, la matriz inversa de A^2 para α = 0.

----

a)

La condición necesaria y suficiente para que una matriz no tenga inversa es que su determinante sea cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-\alpha^2-1=0 \;;;\; \alpha^2+1=0 \Rightarrow \underline{\alpha \notin R}.$$

No existe ningún valor real de α para el cual la matriz A no tenga inversa.

b)

$$\alpha=0 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}}.$$

Obtenemos la inversa de A^2 mediante el método de Gauss-Jordan:

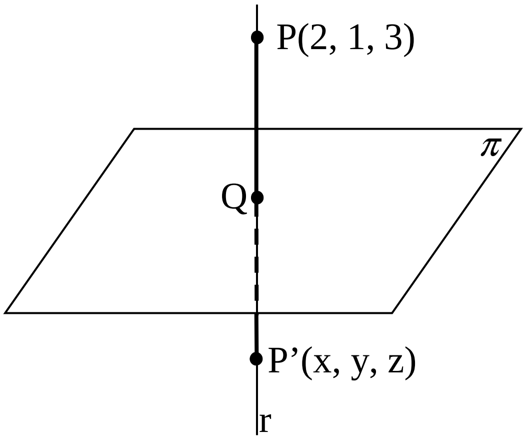
$$(A/I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2+2F_1 \\ F_3 \to F_3-4F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \to F_3+F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2+F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{(A^2)^{-1}=A^{-2}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}}.$$

****

2º) Sea el plano $\pi \equiv x - y + z = 0$ y sea el punto P(2, 1, 3). Calcular el punto simétrico de P respecto a π, explicando el proceso seguido para dicho cálculo.



Un vector normal de π es $\overrightarrow{n} = (1,\ -1,\ 1)$.

La recta r es la que pasa por el punto P y es perpendicular al plano, por lo tanto su vector director es el vector normal del plano π; su expresión por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente: $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$.

El punto Q, intersección del plano π con la recta r, tiene que satisfacer las ecuaciones de ambos, por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x - y + z = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow (2+\lambda) - (1-\lambda) + (3+\lambda) = 0 \ ;;\ 2 + \lambda - 1 + \lambda + 3 + \lambda = 0 \ ;;\ 3\lambda + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\lambda = -\frac{4}{3}} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \\ y = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} \\ z = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{Q\left(\frac{2}{3},\ \frac{7}{3},\ \frac{5}{3}\right)}.$$

Para que P' sea el punto simétrico de P con respecto a π, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'} \Rightarrow Q - P = P' - Q \ ;;\ \left(\frac{2}{3},\ \frac{7}{3},\ \frac{5}{3}\right) - (2,\ 1,\ 3) = (x,\ y,\ z) - \left(\frac{2}{3},\ \frac{7}{3},\ \frac{5}{3}\right) ;;$$

$$\left(\frac{2}{3} - 2,\ \frac{7}{3} - 1,\ \frac{5}{3} - 3\right) = \left(x - \frac{2}{3},\ y - \frac{7}{3},\ z - \frac{5}{3}\right) \ ;;\ \left(-\frac{4}{3},\ \frac{4}{3},\ -\frac{4}{3}\right) = \left(x - \frac{2}{3},\ y - \frac{7}{3},\ z - \frac{5}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x - \frac{2}{3} = -\frac{4}{3} \ \rightarrow\ \underline{x = -\frac{2}{3}} \\ y - \frac{7}{3} = \frac{4}{3} \ \rightarrow\ \underline{y = -\frac{11}{3}} \\ z - \frac{5}{3} = -\frac{4}{3} \ \rightarrow\ \underline{z = \frac{1}{3}} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{P'\left(-\frac{2}{3},\ -\frac{11}{3},\ \frac{1}{3}\right)}}.$$

****

3º) Sea $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Encontrar los valores de α, b y c de forma que la gráfica de f contenga al punto P(0, 1) y las rectas tangentes a f en los puntos x = 0 y x = 1 sean ambas paralelas a la recta y = 3x + 5.

Si $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ contiene a P(0, 1) es: $f(0)=1 \Rightarrow \underline{\underline{c=1}}$.

La pendiente a una función en un punto es igual que el valor de su derivada en ese punto. Por otra parte, la recta $y=3x+5$ tiene de pendiente m = 3.

$$f'(x)=3x^2+2ax+b \Rightarrow \begin{cases} f'(0)=3 \Rightarrow \underline{\underline{b=3}} \\ \\ f'(1)=3 \Rightarrow 3\cdot 1^2+2a\cdot 1+3=3 \;;;\; 2a+3=0 \;;;\; \underline{\underline{a=-\frac{3}{2}}} \end{cases}.$$

****

4º) Sean f y g las funciones $f(x)=x^2+3x+2$ y $g(x)=-x^2-3x+10$.

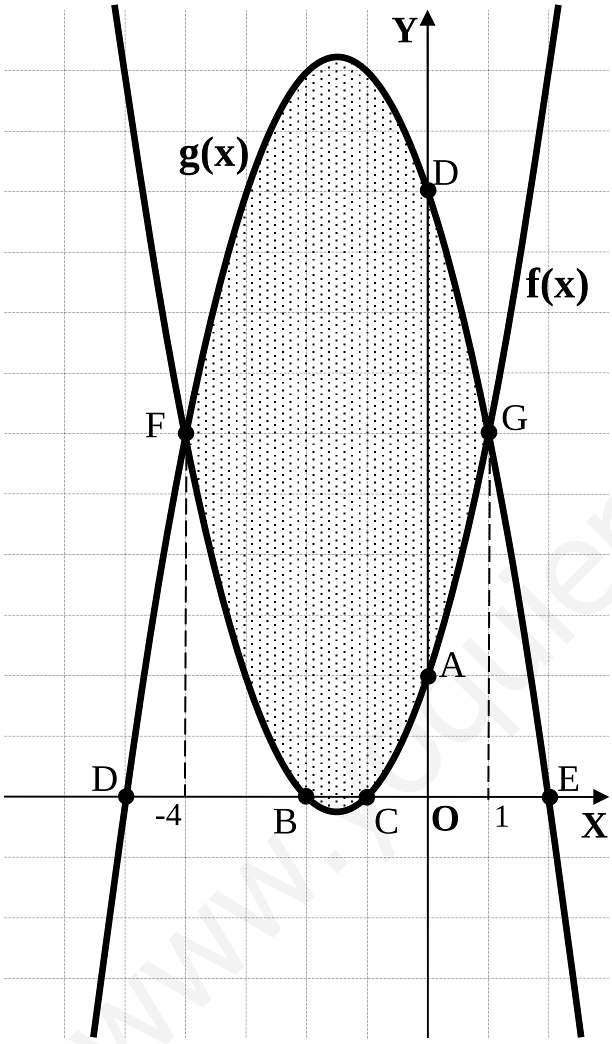
a) Trazar un esquema gráfico de ambas funciones.

b) Calcular el área de la región del plano limitada por ambas funciones.

----

a)

La función $f(x)=x^2+3x+2$ corta al eje Y en A(0, 2), y sus cortes con el eje X se obtienen igualando la función a cero:



$f(x)=0 \Rightarrow x^2+3x+2=0$;;

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{-3\pm1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1=-2} \\ \underline{x_2=-1} \end{cases}.$$

Los puntos de corte con el eje X son B(-2, 0) y C(-1, 0).

La función $g(x)=-x^2-3x+10$ corta al eje Y en D(0, 10), y sus cortes con el eje X se obtienen igualando la función a cero:

$g(x)=0 \Rightarrow -x^2-3x+10=0$;;

$$x^2+3x-10=0 \;;\; x=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{49}}{2}=$$

$$=\frac{-3\pm7}{2} \Rightarrow \underline{x_1=-5} \;;\; \underline{x_2=2}$$

Los puntos de corte con el eje X son D(-5, 0) y E(2, 0).

Los puntos de corte de ambas funciones se obtienen igualando sus expresiones:

$$f(x)=g(x) \Rightarrow x^2+3x+2=-x^2-3x+10 \;;\; 2x^2+6x-8=0 \;;\; x^2+3x-4=0 \;;$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-3\pm5}{2} \Rightarrow \underline{x_1=-4} \;;\; \underline{x_2=1}.$$

Los puntos de corte de las funciones son F(-4, 6) y G(1, 6).

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la de la figura.

b)

Teniendo en cuenta que todas las ordenadas de la función g(x) son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la función f(x) en el intervalo correspondiente al área a calcular, la superficie pedida es la siguiente:

$$S=\int_{-4}^{1}[g(x)-f(x)]\cdot dx=\int_{-4}^{1}\left[\left(-x^{2}-3x+10\right)-\left(x^{2}+3x+2\right)\right]\cdot dx=\int_{-4}^{1}\left(-2x^{2}-6x+8\right)\cdot dx=$$

$$=\left[-\frac{2x^{3}}{3}-\frac{6x^{2}}{2}+8x\right]_{-4}^{1}=\left[-\frac{2x^{3}}{3}-3x^{2}+8x\right]_{-4}^{1}=\left(-\frac{2\cdot 1^{3}}{3}-3\cdot 1^{2}+8\cdot 1\right)-$$

$$-\left[-\frac{2\cdot(-4)^{3}}{3}-3\cdot(-4)^{2}+8\cdot(-4)\right]=-\frac{2}{3}-3+8-\frac{128}{3}+48+32=85-\frac{130}{3}=\frac{255-130}{3}=\underline{\underline{\frac{125}{3}\,u^{2}=S}}\ .$$

****

5º) Ane, Berta y Carlos están jugando a un juego que consiste en lanzar dos dados al mismo tiempo. Ane suma los resultados de los dos dados, mientras que Berta calcula la diferencia entre la mayor y la menor puntuación y Carlos multiplica las puntuaciones. Ane apuesta por el 6, Berta por el 2 y Carlos por el 4. ¿Son equilibradas estas apuestas o alguno de los tres tiene ventaja? Razona la respuesta.

El espacio muestral al lanzar dos dados al mismo tiempo es el siguiente:

$$\begin{Bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 & & 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 & & 61 & 62 & 63 & 64 & 65 & 66 \end{Bmatrix}$$

El número de casos posibles es $N = VR_6^2 = 6^2 = \underline{36}$.

Los casos favorables de cada uno de los que juegan es el indicado en cada caso.

$\underline{\underline{ANE}}$

$$\begin{Bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & \underline{\underline{15}} & 16 & & 21 & 22 & 23 & \underline{\underline{24}} & 25 & 26 \\ 31 & 32 & \underline{\underline{33}} & 34 & 35 & 36 & & 41 & \underline{\underline{42}} & 43 & 44 & 45 & 46 \\ \underline{\underline{51}} & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 & & \underline{\underline{61}} & 62 & 63 & 64 & 65 & 66 \end{Bmatrix}$$

$\underline{Casos\ \ favorables: 6}$

$\underline{\underline{BERTA}}$

$$\begin{Bmatrix} 11 & 12 & \underline{\underline{13}} & 14 & 15 & 16 & & 21 & 22 & 23 & \underline{\underline{24}} & 25 & 26 \\ \underline{\underline{31}} & 32 & 33 & 34 & \underline{\underline{35}} & 36 & & 41 & \underline{\underline{42}} & 43 & 44 & 45 & \underline{\underline{46}} \\ 51 & 52 & \underline{\underline{53}} & 54 & 55 & 56 & & 61 & 62 & 63 & \underline{\underline{64}} & 65 & 66 \end{Bmatrix}$$

$\underline{Casos\ \ favorables: 8}$

$\underline{\underline{CARLOS}}$

$$\begin{Bmatrix} 11 & 12 & 13 & \underline{\underline{14}} & 15 & 16 & & 21 & \underline{\underline{22}} & 23 & 24 & 25 & 26 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 & & \underline{\underline{41}} & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 & & 61 & 62 & 63 & 64 & 65 & 66 \end{Bmatrix}$$

$\underline{Casos\ \ favorables: 3}$

La probabilidad de cada uno, aplicando la regla de Laplace, es la siguiente:

$$p_{ANE} = \frac{6}{36} = \frac{1}{\underline{6}} \ ;; \ p_{BERTA} = \frac{8}{36} = \frac{2}{\underline{9}} \ ;; \ p_{CARLOS} = \frac{3}{36} = \frac{1}{\underline{12}}.$$

<u>Como se aprecia, no son equilibradas las apuestas; tiene ventaja Berta.</u>

****