PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JULIO – 2014

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas. El examen consta de cinco ejercicios. Se podrán utilizar calculadoras no programables.

OPCIÓN A

1º) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} -x+my+2z=m \\ 2x+my-z=2 \\ mx-y+2z=m \end{cases}$.

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro m.

b) Para m = -1 resolver en caso de que sea posible. Si es imposible explicar por qué.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & m & 2 \\ 2 & m & -1 \\ m & -1 & 2 \end{pmatrix} \; y \; A'=\begin{pmatrix} -1 & m & 2 & m \\ 2 & m & -1 & 2 \\ m & -1 & 2 & m \end{pmatrix}.$$

El rango de A en función del parámetro m es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & m & 2 \\ 2 & m & -1 \\ m & -1 & 2 \end{vmatrix}=-2m-4-m^2-2m^2+1-4m=-3m^2-6m-3=0 \;;;\; m^2+2m+1=0 \;;;$$

$$(m+1)^2=0 \Rightarrow \underline{m=-1}.$$

$$\underline{Para \;\; m\neq -1 \Rightarrow Rango \;\; A=Rango \;\; A'=3=n^o \;\; incógnitas \;\; \Rightarrow \;\; Compatible \; determinado}$$

$$Para \;\; m=-1 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_4\} \Rightarrow \underline{Rango \;\; A'=2}.$$

$\underline{Para \;\; m=-1 \Rightarrow Rango\; A = Rango\; A' = 2 < n^o\; incógnitas \Rightarrow Compatible\; indeterminado}$

b)

Resolvemos para m = -1. El sistema resulta $\begin{cases} -x-y+2z=-1 \\ 2x-y-z=2 \\ -x-y+2z=-1 \end{cases}$, que es equivalente al sistema $\begin{cases} 2x-y-z=2 \\ -x-y+2z=-1 \end{cases}$, que es compatible indeterminado.

Parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo, $\underline{z=\lambda}$, resulta:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y=2+\lambda \\ x+y=1+2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=3+3\lambda \;;;\; \underline{x=1+\lambda} \;;;\; y=1+2\lambda-x=1+2\lambda-1-\lambda \;;;\; \underline{y=\lambda}.$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases} ;\; \forall \lambda \in R}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

2º) Dado el punto P(2, -1, 3) y la recta $r \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+7}{5} = \frac{z-2}{2}$.

a) Calcular la proyección del punto P sobre la recta r.

b) Calcular la distancia de P a r.

c) Obtener el simétrico del punto P respecto a la recta r.

----

a)

El haz de planos β perpendiculares a la recta r tiene como vector normal a cualquier vector que sea linealmente dependiente del vector director de la recta r, que es $\overrightarrow{v_r} = (3,\ 5,\ 2)$.

La expresión general de β es la siguiente: $\beta \equiv 3x + 5y + 2z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano π que contiene al punto P(2, -1, 3) es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \beta \equiv 3x + 5y + 2z + D = 0 \\ P(2,\ -1,\ 3) \end{array}\right\} \Rightarrow\ 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + D = 0\ ;;\ 6 - 5 + 6 + D = 0\ ;;\ 7 + D = 0\ ;;$$

$D = -7 \Rightarrow \underline{\pi \equiv 3x + 5y + 2z - 7 = 0}$.

El punto P' pedido, proyección de P sobre r, es el punto de intersección del plano π con la recta r.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = -7 + 5\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 3x + 5y + 2z - 7 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = -7 + 5\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow\ 3(3\lambda) + 5(-7 + 5\lambda) + 2(2 + 2\lambda) - 7 = 0\ ;;$$

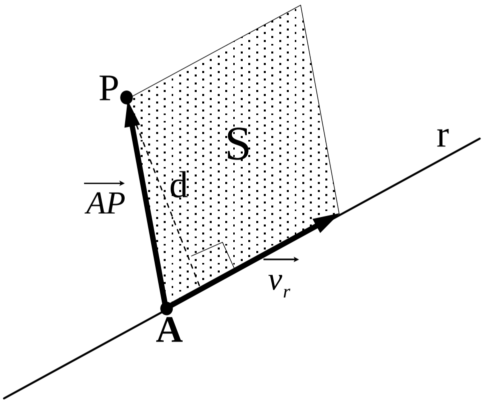
$9\lambda - 35 + 25\lambda + 4 + 4\lambda - 7 = 0\ ;;\ 38\lambda - 38 = 0\ ;;\ \lambda - 1 = 0\ ;;\ \underline{\lambda = 1} \Rightarrow \underline{\underline{P'(3,\ -2,\ 4)}}$.

b)

La distancia d del punto P a la recta r puede determinarse teniendo en cuenta que A(0, -7, 2) es un punto de r y $\overrightarrow{v_r} = (3,\ 5,\ 2)$.

Para facilitar la comprensión del ejercicio hacemos un gráfico aproximado de la situación, que es el que expresa la figura adjunta.

Teniendo en cuenta que $S = d \cdot \left|\overrightarrow{v_r}\right|$ y que también puede ser $S = \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AP}\right|$, se deduce que la distancia es: $d(P,\ r) = \dfrac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}$.



El vector $\overrightarrow{AP}$ es:

$\overrightarrow{AP} = P - A = (2,\ -1,\ 3) - (0,\ -7,\ 2) = (2,\ 6,\ 1)$.

Aplicando la fórmula de la distancia:

$$d(P,\ r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|} = \frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{3^2+5^2+2^2}} = \frac{|5i+4j+18k-10k-12i-3j|}{\sqrt{9+25+4}} = \frac{|-7i+j+8k|}{\sqrt{38}} =$$

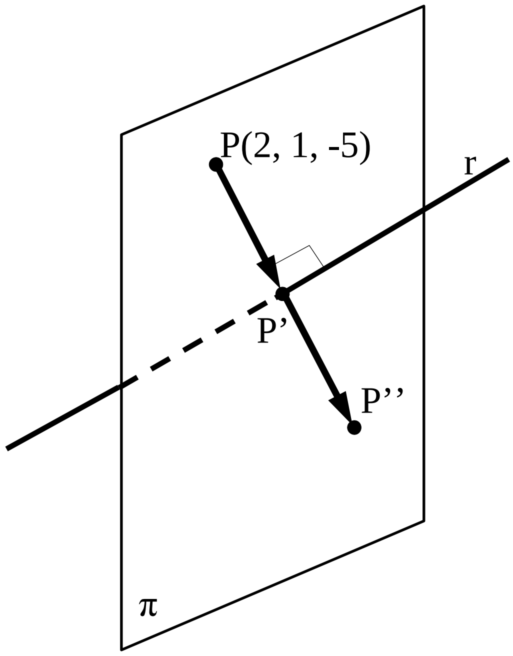
$$= \frac{\sqrt{(-7)^2+1^2+8^2}}{\sqrt{38}} = \frac{\sqrt{49+1+64}}{\sqrt{38}} = \frac{\sqrt{114}}{\sqrt{38}} = \underline{\underline{\sqrt{3}\ unidades = d(P,\ r)}}.$$

c)

Para que P’’ sea el punto simétrico de P con respecto a r, tiene que cumplirse lo siguiente:

El punto P’ de intersección de la recta r con el plano π es P’(3, -2, 4) obtenido en el apartado a).

Con objeto de clarificar la situación, la expresamos en la figura adjunta.



Para que P’’ sea el punto simétrico de P con respecto a r, tiene que cumplirse que:

$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{P'P''} \Rightarrow P' - P = P'' - P'$;;

$(3,\ -2,\ 4) - (2,\ -1,\ 3) = (x,\ y,\ z) - (3,\ -2,\ 4)$;;

$$(1,\ -1,\ 1) = (x-3,\ y+2,\ z-4) \Rightarrow \begin{cases} x-3=1 \rightarrow \underline{x=4} \\ y+2=-1 \rightarrow \underline{y=-3} \\ z-4=1 \rightarrow \underline{z=5} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{P''(4,\ -3,\ 5)}}.$$

****

www.yoquieroaprobar.es

3º) a) Dada la función $f(x)=x^3-3x+1$, estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos.

b) Trazar un dibujo aproximado de la gráfica de f y contestar de forma razonada a la siguiente pregunta: ¿cuántos valores de x satisfacen f(x) = 0?

----

a)

Por ser $f(x)=x^3-3x+1$ una función polinómica tiene por dominio al conjunto de los números reales.

Una función es creciente o decreciente cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=3x^2-3. \qquad f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-3=0 \;;\; 3(x^2-1)=0 \Rightarrow \underline{x_1=-1},\ \underline{x_2=1}.$$

Los valores que anulan la primera derivada dividen el dominio de la función en tres intervalos en los cuales la función es, alternativamente, creciente o decreciente. Para diferenciarlos determinamos el signo de la derivada para un valor sencillo, por ejemplo para x = 0: $f'(0)=-3<0$.

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{\underline{\textit{Decrecimiento}: \ f'(x)<0 \Rightarrow x\in(-1,\ 1)}}.$$

$$\underline{\underline{\textit{Crecimiento}: \ f'(x)>0 \Rightarrow x\in(-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty)}}.$$

Una función tiene un máximo o un mínimo relativo para los valores de x que anulan la primera derivada; para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera derivada se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x)=6x \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \rightarrow f''(-1)=-6<0 \rightarrow \underline{\textit{Máximo relativo para } x=-1} \\ x_2=1 \rightarrow f''(1)=6>0 \rightarrow \underline{\textit{Mínimo relativo para } x=1} \end{cases}.$$

$$f(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)+1=-1+3+1=3 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Máximo: A(-1, 3)}}}.$$

$$f(1)=1^3-3\cdot 1+1=1-3+1=-1 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mínimo: B(1, -1)}}}.$$

b)

La representación gráfica de la función se deduce de los datos obtenidos en el apartado anterior. Para una mayor aproximación de la gráfica se determinan los puntos de corte con los ejes que son los siguientes:

www.yoquieroaprobar.es

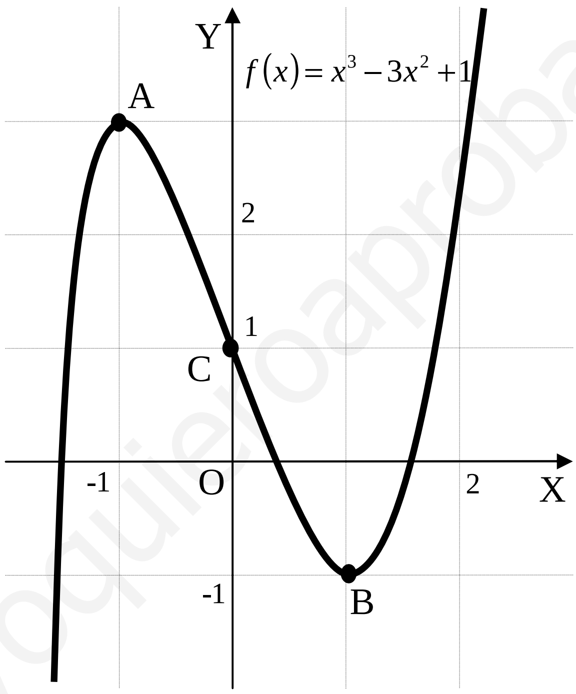
Eje Y: Se obtienen para x = 0. El punto de corte es C(0, 1).

Eje X: Son los puntos cuyas abscisas son los valores de x que anulan la función:

$f(x)=0 \Rightarrow x^3-3x+1=0$. Resolviendo por Ruffini se comprueba que tres raíces de la ecuación f(x) = 0 son números irracionales. El número de raíces son tres porque las ordenadas de su máximo y mínimo son de signo diferente, lo cual permite establecer tres intervalos de la forma (-p, -1), (-1, 1) y (1, q) en los cuales puede aplicarse el teorema de Bolzano, con tal de que p y q sean lo suficientemente grandes.

Por consiguiente, la contestación que se pide es tres.

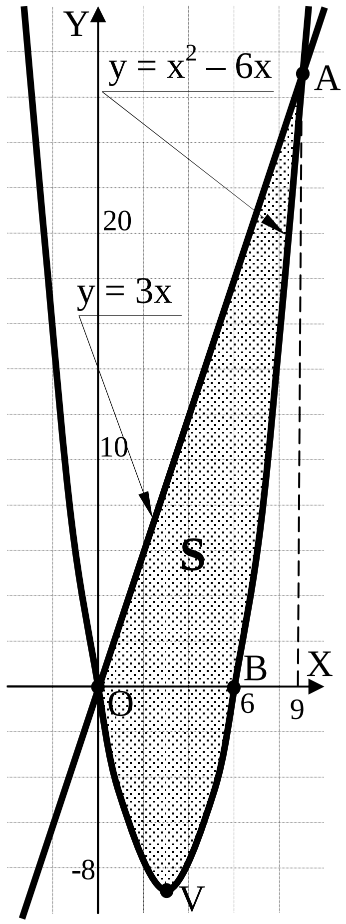
La representación gráfica de la función es, aproximadamente, la que indica la figura siguiente.



****

www.yoquieroaprobar.es

4º) Dibujar el recinto encerrado entre la gráfica de la función $y = x^2 - 6x$ y la de la función $y = 3x$ y calcular su área.



Los puntos de corte de la recta y la parábola son los siguientes:

$$x^2 - 6x = 3x \;;;\; x^2 - 9x = x(x-9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \to \underline{O(0,\ 0)} \\ \\ x_2 = 9 \to \underline{A(9,\ 27)} \end{cases}.$$

La función $y = x^2 - 6x$ corta a los ejes de coordenadas en los puntos O(0, 0) y B(6, 0).

La representación gráfica de la situación es la de la figura.

Por ser todas las ordenadas de la parábola menores que las correspondientes ordenadas de la recta en el intervalo referente al área a calcular, (0, 9), la superficie a calcular es:

$$S = \int_0^9 \left[3x - \left(x^2 - 6x\right)\right] \cdot dx = \int_0^9 \left(-x^2 + 9x\right) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{9x^2}{2}\right]_0^9 =$$

$$= \left(-\frac{9^3}{3} + \frac{9 \cdot 9^2}{2}\right) - 0 = 9^3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 81 \cdot 9 \cdot \frac{3-2}{6} = 81 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{243}{2} = \underline{\underline{121'5\ u^2 = S}}$$

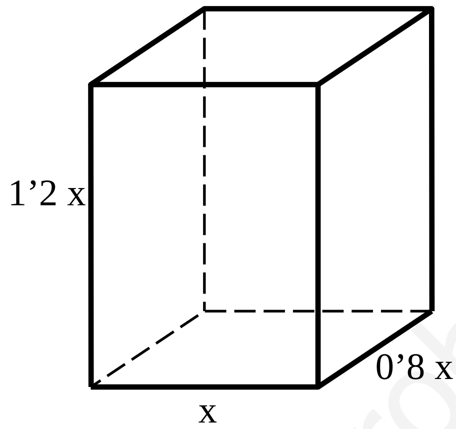
****

www.yoquieroaprobar.es

5º) Se hacen variar las tres dimensiones de una caja cúbica (las tres dimensiones iguales) de la siguiente manera: se aumenta un 20 % su altura, se disminuye un 20 % su anchura y se mantienen la misma dimensión para su largura.

a) ¿Afecta esta variación a su volumen? ¿Cuánto?

b) ¿El área total de la nueva caja disminuye en más del veinte por ciento?



a)

Llamando x a las tres dimensiones de la caja al principio, el volumen es $V_0 = x^3$.

El volumen después de la reforma es: $V_1 = 1'2x \cdot 0'8x \cdot x = 0'96 \cdot x^3 = \underline{0'96 \cdot V_0}$.

Como puede observarse, <u>afecta la variación al volumen</u>.

<u>La disminución es del 4 %.</u>

b)

La superficie de la caja al comienzo es: $S_0 = 6x^2$.

La superficie después de la reforma es: $S_1 = 2 \cdot (x \cdot 0'8x + x \cdot 1'2x + 0'8x \cdot 1'2x) =$

$= 2 \cdot \left(0'8x^2 + 1'2x^2 + 0'96x^2\right) = 2 \cdot 2'96x^2 = \underline{5'92x^2 = S_1}$.

$80\ \%\ de\ S_0 = 0'8 \cdot 6x^2 = \underline{4'8x^2 < S_1}$.

<u>La disminución es menor del 20 %</u>.

****

www.yoquieroaprobar.es

OPCIÓN B

1º) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} c+d & d \\ 2c & c+d \end{pmatrix}$.

a) Determinar para qué valores de c y d la matriz A tiene inversa.

b) Determinar la inversa de la matriz A^2 en el caso de c = 1 y d = -2.

----

a)

La matriz A tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} c+d & d \\ 2c & c+d \end{vmatrix}=(c+d)^2-2cd=c^2+2cd+d^2-2cd=c^2+d^2.$$

$$\underline{\underline{A\ es\ inversible\ \forall c,d\in R,\ c^2+d^2\neq 0}}$$

b)

Para c = 1 y d = -2 es $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Hallamos la inversa de A^2 por el procedimiento de Gauss-Jordan:

$$\left(A^2/I\right)=\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 4 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow\{F_1\rightarrow F_1-F_2\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 7 & 1 & -1 \\ -4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow\{F_2\rightarrow F_2+4F_1\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 7 & 1 & -1 \\ 0 & 25 & 4 & -3 \end{array}\right)\Rightarrow\{F_2\rightarrow \tfrac{1}{25}F_2\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 7 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{25} & -\frac{3}{25} \end{array}\right)\Rightarrow\{F_1\rightarrow F_1-7F_2\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{3}{25} & -\frac{4}{25} \\ 0 & 1 & \frac{4}{25} & -\frac{3}{25} \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\underline{\underline{\left(A^2\right)^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{25} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{25} & -\frac{3}{25} \end{pmatrix}}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

2º) Dada la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + 4z = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 3x - 5y + Az = -31$.

a) Calcular el valor del parámetro A para que la recta y el plano sean paralelos.

b) Para A = 12 calcular la intersección de la recta y el plano.

----

a)

La recta r y el plano π son paralelos cuando el vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares, por lo cual, su producto vectorial tiene que ser nulo.

Un vector director de la recta r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son los siguientes: $\overrightarrow{n_1} = (2,\ -1,\ 1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1,\ -1,\ 4)$.

$$\overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -4i + j - 2k + k + i - 8j = -3i - 7j - k \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_r} = (3,\ 7,\ 1)}.$$

Un vector normal del plano $\pi \equiv 3x - 5y + Az = -31$ es $\overrightarrow{n} = (3,\ -5,\ A)$.

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \Rightarrow (3,\ 7,\ 1) \cdot (3,\ -5,\ A) = 9 - 35 + A = 0 \ ;;\ -26 + A = 0 \ ;;\ \underline{A = 26}.$$

<u>La recta r y el plano π son paralelos para A = 26</u>.

b)

Para A = 12 es $\pi \equiv 3x - 5y + 12z = -31$.

El punto de intersección de r con π es el punto cuyas coordenadas son las soluciones del sistema que forman.

$$\left.\begin{array}{r} r \equiv \left\{\begin{array}{l} 2x - y + z = 0 \\ x - y + 4z = 1 \end{array}\right. \\ \pi \equiv 3x - 5y + 12z = -31 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2x - y + z = 0 \\ x - y + 4z = 1 \\ 3x - 5y + 12z = -31 \end{array}\right\} \rightarrow x = 1 + y - 4z \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2(1 + y - 4z) - y + z = 0 \\ 3(1 + y - 4z) - 5y + 12z = -31 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2 + 2y - 8z - y + z = 0 \\ 3 + 3y - 12z - 5y + 12z = -31 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y - 7z = -2 \\ -2y = -34 \end{array}\right\} \rightarrow \underline{y = 17} \quad \Rightarrow 17 - 7z = -2 \ ;;\ 7z = 19 \ ;;\ \underline{z = \frac{19}{7}}.$$

$$x = 1 + 17 - 4 \cdot \frac{19}{7} = \frac{7 + 119 - 76}{7} = \frac{126 - 76}{7} = \underline{\frac{50}{7} = x} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{P\left(\frac{50}{7},\ 17,\ \frac{19}{7}\right)}}.$$

****

www.yoquieroaprobar.es

3º) Se sabe que la suma de los cuadrados de dos números positivos A y B vale 32. Calcular dichos números para que su producto A · B sea máximo.

$$A^2+B^2=32 \ \rightarrow \ B=\sqrt{32-A^2}\ .$$

$$P=A\cdot B \ \Rightarrow \ Máximo \ \Rightarrow \ P=A\cdot\sqrt{32-A^2}=\underline{\sqrt{32A^2-A^4}}\ .$$

$$P'=\frac{64A-4A^3}{2\sqrt{32A^2-A^4}}=0 \ \Rightarrow \ 64A-4A^3=0 \ ;; \ 4A\left(16-A^2\right)=0 \ \Rightarrow \ \underline{\begin{cases} A_1=0 \\ A_2=-4 \\ A_3=4 \end{cases}}\ .$$

Por condición del problema, de las soluciones anteriores la válida es A = 4.

$$B=\sqrt{32-A^2}=\sqrt{32-4^2}=\sqrt{32-16}=\sqrt{16}=\underline{4}\ .$$

Los números son A = B = 4.

****

www.yoquieroaprobar.es

4º) Hallar la integral indefinida $I=\int \frac{3x+7}{(x^2-3x+2)(x-3)}\cdot dx$, explicando el método utilizado para dicho cálculo.

$$x^2-3x+2=0\ ;;\ x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}\Rightarrow x_1=1,\ x_2=2\ \Rightarrow\ \underline{x^2-3x+2=(x-1)(x-2)}.$$

$$I=\int \frac{3x+7}{(x^2-3x+2)(x-3)}\cdot dx=\int \frac{3x+7}{(x-1)(x-2)(x-3)}\cdot dx.$$

$$\frac{3x+7}{(x^2-3x+2)(x-3)}=\frac{3x+7}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}=$$

$$=\frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x^2-3x+2)(x-3)}=\frac{A(x^2-5x+6)+B(x^2-4x+3)+C(x^2-3x+2)}{(x^2-3x+2)(x-3)}=$$

$$=\frac{(A+B+C)x^2+(-5A-4B-3C)x+(6A+3B+2C)}{(x^2-3x+2)(x-3)}\ \Rightarrow\left\{\begin{array}{r}A+B+C=0\\-5A-4B-3C=3\\6A+3B+2C=7\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\to C=-A-B\\ \\ \\ \end{array}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \begin{array}{r}-5A-4B-3(-A-B)=3\\6A+3B+2(-A-B)=7\end{array}\Big\}\ \begin{array}{r}-5A-4B+3A+3B=3\\6A+3B-2A-2B=7\end{array}\Big\}\ \begin{array}{r}-2A-B=3\\4A+B=7\end{array}\Big\}\Rightarrow 2A=10\ ;;\ \underline{A=5}\ ;;$$

$$20+B=7\ ;;\ \underline{B=-13}\ ;;\ C=-A-B=-5+13=\underline{8=B}\ .$$

$$\frac{3x+7}{(x^2-3x+2)(x-3)}=\frac{3x+7}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{5}{x-1}+\frac{8}{x-2}-\frac{13}{x-3}.$$

Sustituyendo en la integral:

$$I=\int \frac{3x+7}{(x^2-3x+2)(x-3)}\cdot dx=\int\left(\frac{5}{x-1}+\frac{8}{x-2}-\frac{13}{x-3}\right)\cdot dx=\int\frac{5dx}{x-1}+\int\frac{8dx}{x-2}-\int\frac{13dx}{x-3}=$$

$$=\ 5\cdot L|x-1|+8\cdot L|x-2|-13\cdot L|x-3|+C=\underline{\underline{L\left|\frac{(x-1)^5(x-2)^8}{(x-3)^{13}}\right|+C=I}}\ .$$

****

www.yoquieroaprobar.es

5º) Al sumar 21 múltiplos seguidos de 3 obtenemos el valor 1.260. En esta suma ¿cuál es el primer múltiplo de 3? ¿Y el último?

Los múltiplos de 3 son de la forma $3 \cdot x$, siendo x un número entero.

El problema consiste en sumar 21 términos de una progresión aritmética de diferencia 3 y cuya suma se conoce.

Si el primer término de esa suma es $\alpha_1 = 3x$, el último es:

$$a_{21} = a_1 + (21 - 1) \cdot 3 = a_1 + 20 \cdot 3 = \underline{a_1 + 60}.$$

Sabiendo que la suma de los n términos de una progresión aritmética viene dada por la fórmula $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, aplicada al caso que nos ocupa es:

$$S_{21} = \frac{a_1 + a_1}{2} \cdot 21 \Rightarrow \frac{3x + (3x + 60)}{2} \cdot 21 = 1.260 \;;;\; \frac{6x + 60}{2} = \frac{1.260}{21} \;;;\; 3x + 30 = 60 \;;;\; 3x = 30 \;;;\; \underline{x = 10}.$$

<u>El primer múltiplo de 3 es 30</u>.

<u>El último múltiplo de 3 es 90</u>.

****

www.yoquieroaprobar.es