

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)**UNIVERSIDADES DEL PAÍS VASCO****JUNIO – 2019**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

El examen consta de cinco ejercicios. No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones: pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, derivadas e integrales, almacenamiento de datos alfanuméricos.

OPCIÓN A

1º) Discutir, en función de m , el sistema $S \equiv \begin{cases} (m+3)x + my + mz = m-1 \\ 3x + mz = m-2 \\ -y + z = m-3 \end{cases}$. Resolver en los casos de indeterminación, suponiendo que existan.

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} m+3 & m & m \\ 3 & 0 & m \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} m+3 & m & m & m-1 \\ 3 & 0 & m & m-2 \\ 0 & -1 & 1 & m-3 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} m+3 & m & m \\ 3 & 0 & m \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3m + m(m+3) - 3m = 0;$$

$$-6m + m^2 + 3m = 0; \quad m^2 - 3m = 0; \quad m(m-3) = 0 \Rightarrow m_1 = 0, m_2 = 3.$$

$$\text{Para } \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } A = \text{Rang } A' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.D.}$$

$$\text{Para } m = 0 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } A' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 6 = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } A' = 3.$$

Para $m = 0 \Rightarrow Rang A = 2; Rang A' = 3 \Rightarrow Sistema incompatible.$

$$Para m = 3 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 = 3C_4\} \Rightarrow Rang A' = 2.$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 + 16 + 6 - 8 - 6 - 12 = 2 \neq 0 \Rightarrow Rang A' = 3.$$

Para $m = 3 \Rightarrow Rang A = Rang A' = 2 < n^\circ incóg. \Rightarrow S.C.I.$

b)

$$Para m = 3 \text{ el sistema es } \left. \begin{array}{l} 6x + 3y + 3z = 2 \\ 3x + 3z = 1 \\ -y + z = 0 \end{array} \right\}, \text{ que es compatible indeterminado.}$$

Despreciando una ecuación (primera) y haciendo $z = \lambda$:

$$-y + \lambda = 0 \Rightarrow y = \lambda; \quad 3x + 3\lambda = 1; \quad 3x = 1 - 3\lambda \Rightarrow x = \frac{1}{3} - \lambda.$$

$$\underline{\underline{Solución: } x = \frac{1}{3} - \lambda; y = \lambda, z = \lambda, \forall \lambda \in R.}$$

2º) Sean la recta $r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x - y + Az = 0$.

a) ¿Existe algún valor de A para que el plano π sea paralelo a r ?

b) Encontrar el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto $O(0, 0, 0)$.

a)

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \begin{cases} 4x - 3y = 1 - 4\lambda \\ 3x - 2y = -\lambda \end{cases};$$

$$\begin{cases} -8x + 6y = -2 + 8\lambda \\ 9x - 6y = -3\lambda \end{cases} \Rightarrow x = -2 + 5\lambda; \quad 3(-2 + 5\lambda) - 2y = -\lambda;$$

$$-6 + 15\lambda - 2y = -\lambda; \quad 2y = -6 + 16\lambda \Rightarrow y = -3 + 8\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -2 + 5\lambda \\ y = -3 + 8\lambda \\ z = \lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de r son $P(-2, -3, 0)$ y $\vec{v}_r = (5, 8, 1)$.

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (1, -1, A)$.

Para que la recta r y el plano π sean paralelos es necesario que el vector normal del plano y el vector director de la recta sean perpendiculares, es decir, que su producto escalar tiene que ser cero:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = (5, 8, 1) \cdot (1, -1, A) = 0; \quad 5 - 8 + A = 0; \quad -3 + A = 0 \Rightarrow A = 3.$$

La recta r y el plano π no son paralelos para $A = 3$.

b)

El haz de planos β perpendiculares a r es $\beta \equiv 5x + 8y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β , el plano γ que contiene al punto $O(0, 0, 0)$ es el que satisface su ecuación:

$$\beta \equiv 5x + 8y + z + D = 0 \Bigg\{ \begin{matrix} \\ O(0, 0, 0) \end{matrix} \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\gamma \equiv 5x + 8y + z = 0.}}$$

3º) Dada la función $f(x) = x^2 + 64$ y el *punto exterior* a su gráfica $P(6, 0)$, encontrar la recta o rectas tangentes a f que pasen por P .

El haz de rectas que pasan por el punto $P(6, 0)$ tiene la siguiente expresión:

$$y - 0 = m(x - 6); \quad y = mx - 6m.$$

De las infinitas rectas del haz anterior, las que son tangentes a la función f solamente tienen un punto de contacto, por lo cual, su intersección es un solo punto:

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) = x^2 + 64 \\ y = mx - 6m \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + 64 = mx - 6m; \quad x^2 + 64 - mx + 6m = 0;$$

$$x^2 - mx + (64 + 6m) = 0; \quad x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4 \cdot 1 \cdot (64 + 6m)}}{2} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 256 - 24m}}{2} \Rightarrow$$

$$m^2 - 256 - 24m = 0; \quad m^2 - 24m - 256 = 0; \quad m = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 + 4 \cdot 256}}{2} =$$

$$= \frac{24 \pm \sqrt{576 + 1.024}}{2} = \frac{24 \pm \sqrt{1.600}}{2} = \frac{24 \pm 40}{2} = 12 \pm 20 \Rightarrow m_1 = -8, m_2 = 32.$$

Las rectas tangentes pedidas son las siguientes:

$$\underline{t_1 \equiv y = -8x + 48 \quad y \quad t_2 \equiv y = 32x - 192.}$$

4º) Calcula $I = \int x \cdot e^{-4x} \cdot dx$, explicando el proceso utilizado para dicho cálculo.

La integral I debe resolverse por el método de “por partes”, cuya fórmula es la siguiente: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$.

$$I = \int x \cdot e^{-4x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^{-4x} \cdot dx \rightarrow v = -\frac{1}{4}e^{-4x} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot \left(-\frac{1}{4}e^{-4x}\right) - \int -\frac{1}{4}e^{-4x} dx = -\frac{1}{4}x \cdot e^{-4x} + \frac{1}{4} \int e^{-4x} dx =$$

$$= -\frac{1}{4}x \cdot e^{-4x} + \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot e^{-4x} + C = -\frac{1}{16}e^{-4x}(4x + 1) + C.$$

$$\underline{\int x \cdot e^{-4x} \cdot dx = -\frac{1}{16}e^{-4x}(4x + 1) + C.}$$

www.yoquieroaprobar.es

5º) Sobre una mesa tengo tres cajas con botones; la primera caja tiene tres botones, la segunda 5 y la tercera 4. Cada una de las cajas contiene un solo botón rojo. Si elijo al azar una caja y saco de ella un botón al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un botón rojo?

b) Si he sacado un botón rojo, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca a la primera caja?

La probabilidad de elegir cada una de las cajas es $\frac{1}{3}$.

a)

$$\begin{aligned}
 P &= P(1 \cap R) + P(2 \cap R) + P(3 \cap R) = \\
 &= P(1) \cdot P(R/1) + P(2) \cdot P(R/2) + P(3) \cdot P(R/3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{20+12+15}{60} = \frac{1}{3} \cdot \frac{47}{60} = \frac{47}{180} = \underline{0,2611}.
 \end{aligned}$$

b)

$$P = P(1/R) = \frac{P(1 \cap R)}{P(R)} = \frac{P(1) \cdot P(R/1)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{47}{180}} = \frac{1}{47} = \frac{20}{47} = \underline{0,4255}.$$

OPCIÓN B

1º) Dada la matriz $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular, razonadamente, el valor de a para que el determinante $|A(a)|^2$ valga 4.

$$[A(a)]^2 = A(a) \cdot A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+a & a^2 & 0 \\ 3 & a+1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$|A(a)|^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+a & a^2 & 0 \\ 3 & a+1 & 1 \end{vmatrix} = 4; \quad a^2 = 4 \Rightarrow \underline{a = \pm 2}.$$

www.yoquieroaprobar.es

2º) Se consideran los puntos $A(0, 0, 1)$, $B(1, 1, 1)$ y $C(-1, -1, 2)$. ¿Están alineados? En caso afirmativo hallar la ecuación de la recta r que los contiene. En caso negativo calcular el plano que los contiene.

Los puntos A, B y C están alineados cuando los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} son linealmente dependientes.

$$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(1, 1, 1) - (0, 0, 1)] = (1, 1, 0).$$

$$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(-1, -1, 2) - (0, 0, 1)] = (-1, -1, 1).$$

Los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} son linealmente independientes por no tener proporcionales sus componentes y, en consecuencia:

Los puntos A, B y C no están alineados.

El plano π que contiene a los puntos A, B y C tiene la siguiente expresión general:

$$\pi(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z - 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad x - (z - 1) + (z - 1) - y = 0.$$

$$\underline{\pi \equiv x - y = 0.}$$

3º) Sea f la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-4x}$. Calcular la primera y la segunda derivadas de f . Hallar los máximos y mínimos de f .

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-4x} + x^2 \cdot (-4) \cdot e^{-4x} = 2x \cdot e^{-4x} - 4x^2 \cdot e^{-4x}.$$

$$\underline{f'(x) = 2x \cdot e^{-4x}(1 - 2x)}.$$

$$f''(x) = 2 \cdot e^{-4x} + 2x \cdot (-4) \cdot e^{-4x} - [8x \cdot e^{-4x} + 4x^2 \cdot (-4) \cdot e^{-4x}] =$$

$$= 2 \cdot e^{-4x} - 8x \cdot e^{-4x} - 8x \cdot e^{-4x} + 16x^2 \cdot e^{-4x} =$$

$$= 2 \cdot e^{-4x} - 16x \cdot e^{-4x} + 16x^2 \cdot e^{-4x} = 2 \cdot e^{-4x} \cdot (8x^2 - 8x + 1).$$

$$\underline{f''(x) = 2 \cdot e^{-4x} \cdot (8x^2 - 8x + 1)}.$$

Una función tiene un extremo relativo, máximo o mínimo, cuando se anula su primera derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x \cdot e^{-4x}(1 - 2x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es negativa para los valores que anulan la primera se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$f''(0) = 2 \cdot e^0 \cdot (0 - 0 + 1) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo para } x = 0.$$

$$f(0) = 0^2 \cdot e^{-0} = 0 \Rightarrow \underline{\text{Mínimo relativo: } O(0, 0)}.$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot e^{-2} \cdot (2 - 4 + 1) = -\frac{2}{e^2} < 0 \Rightarrow \text{Máximo para } x = \frac{1}{2}.$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot e^{-2} = \frac{1}{4e^2} \Rightarrow \underline{\text{Máximo relativo: } P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4e^2}\right)}.$$

4º) Representar el recinto finito del plano limitado por la recta $y = x + 2$ y por la parábola $y = x^2$. Calcular su área.

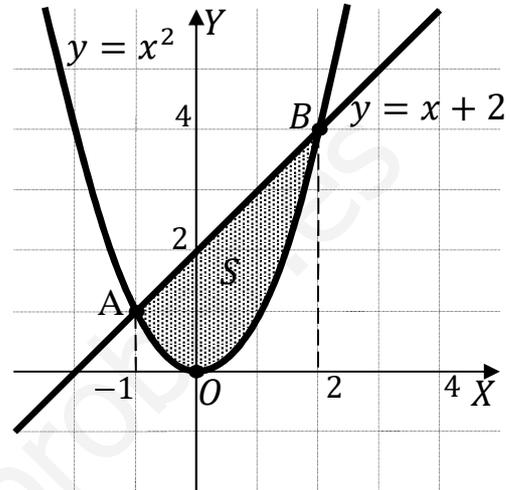
La función $f(x) = x^2$ es una parábola convexa (U) que tiene su vértice en el origen de coordenadas.

Los puntos de corte de la parábola y la recta se obtienen de la igualación de sus expresiones:

$$x^2 = x + 2; \quad x^2 - x - 2 = 0;$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \rightarrow A(-1, 1) \\ x_2 = 2 \rightarrow B(2, 4) \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que se indica en la figura adjunta.



En el intervalo del área a calcular, $(-1, 2)$, todas las ordenadas de la recta son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 [(x + 2) - x^2] \cdot dx = \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 = \\ &= \left(-\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 \right) - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 2 \cdot (-1) \right] = -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = \\ &= 8 - \frac{9}{3} - \frac{1}{2} = 8 - 3 - \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

$$\underline{S = \frac{9}{2} u^2 = 4,5 u^2.}$$

5º) Lanzamos un dado de seis caras 6.000 veces. Calcular la probabilidad de que el número de veces que salga el 5:

a) Sea superior a 1.500.

b) Esté comprendido entre 1.000 y 1.100.

Se trata de una distribución binomial con $p = \frac{1}{6}$; $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ y $n = 6.000$.

Por ser n suficientemente grande se cumple que $n \cdot p > 5$ y $n \cdot q > 5$, por lo cual se puede aproximar la distribución binomial a una distribución normal de las siguientes características:

$$\mu = n \cdot p = 6.000 \cdot \frac{1}{6} = 1.000; \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{6.000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 28,87.$$

$$X = B\left(6.000; \frac{1}{6}\right) \approx N(1.000; 28,87).$$

$$\text{Tipificando la variable: } X \rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-1.000}{28,87}.$$

a)

Considerando la corrección de Yates:

$$\begin{aligned} P(X \geq 1.500) &= P(X > 1.500,5) = P\left(Z > \frac{1.500,5-1.000}{28,87}\right) = P\left(Z > \frac{500,5}{28,87}\right) = \\ &= P(Z > 17,34) = 0. \end{aligned}$$

La probabilidad de que salga 5 más de 1.500 veces es prácticamente nula.

b)

$$\begin{aligned} P &= P(1.000 \leq Z \leq 1.100) = P(1.000,5 \leq Z \leq 1.099,5) = \\ &= P\left(\frac{1.000,5-1.000}{28,87} \leq Z \leq \frac{1.099,5-1.000}{28,87}\right) = P\left(0 \leq Z \leq \frac{99,5}{28,87}\right) = P\left(\frac{0,5}{28,87} \leq Z \leq \frac{99,5}{28,87}\right) = \\ &= P(0,02 \leq Z \leq 3,45) = P(Z < 3,45) - P(Z < 0,02) = 0,9997 - 0,5080 = \\ &= \underline{0,4917}. \end{aligned}$$
