PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JUNIO – 2021

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Ese examen tiene cinco partes. En cada parte debes responder a una única pregunta.

Primera parte.

1º) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ax - y + z = 1 \\ 3x - y + az = a \\ x + (a-1)z = 1 \end{cases}$ en función del parámetro a. Resolver el sistema para $a = 3$, si es posible.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 3 & -1 & a \\ 1 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & a & a \\ 1 & 0 & a-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 3 & -1 & a \\ 1 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = -a(a-1) - a + 1 + 3(a-1) = 0;$$

$$-a^2 + a - a + 1 + 3a - 3 = 0; \;\; -a^2 + 3a - 2 = 0; \;\; a^2 - 3a + 2 = 0;$$

$$a = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 2.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a \neq 1 \\ a \neq 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_2 = -C_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 + 1 + 3 = 4 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_3 = C_4\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ a = 2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Para $a = 3$ el sistema es $\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ 3x - y + 3z = 3 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{-3^2+3\cdot 3-2} = \frac{-2-3+1+6}{-2} = \frac{2}{-2} = -1.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{18+3+3-3-9-6}{-2} = \frac{6}{-2} = -3.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3-3+1+3}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1.$$

$$\underline{Solución: x = -1,\ y = -3,\ z = 1.}$$

****

2º) Sea la matriz $M(a) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & a \\ 1 & a & 1 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$.

a) Determinar para qué valores del parámetro a la matriz A no tiene inversa.

b) Calcular, si es posible, la matriz inversa de A para $a = 2$.

----

a)

Una matriz no tiene inversa cuando su determinante es cero.

$$|M(a)| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & a \\ 1 & a & 1 \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix} = -2a + a^2 - 2a + 3 = 0;\ \ a^2 - 4a + 3 = 0;$$

$$a = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 3.$$

$\underline{\textit{La matriz M no tiene inversa para } a = 1 \textit{ y para } a = 3.}$

b)

Para $a = 2$ es $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. $\quad |M| = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1.$

$M^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$Adj.de\ M^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 7 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$M^{-1} = \frac{Adj.\ de\ M^t}{|M|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 & 7 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}}{-1} \Rightarrow \underline{M^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}}.$$

****

Segunda parte.

3º) Sea r la recta que pasa por los puntos $A(1, a, -1)\ y\ B(b, 1, 1)$ y el plano π de ecuación $x + y - 2z = 2b$.

a) Calcular los valores de los parámetros $a\ y\ b$ para que la recta r sea perpendicular al plano π.

b) Calcular los valores de los parámetros $a\ y\ b$ para que la recta r esté contenida en el plano π.

----

a)

Los puntos $A(1, a, -1)\ y\ B(b, 1, 1)$ determinan el vector:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(b, 1, 1) - (1, a, -1)] = (b - 1, 1 - a, 2).$$

El vector normal de r es cualquiera que sea linealmente dependiente al vector $\overrightarrow{AB} = (b - 1, 1 - a, 2)$, $\overrightarrow{v_r} = (b - 1, 1 - a, 2)$.

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (1, 1, -2)$

La recta r y el plano π son perpendiculares cuando el vector director de la recta y el vector normal del plano sean linealmente dependientes, es decir: cuando sus componente son proporcionales:

$$\frac{b-1}{1} = \frac{1-a}{1} = \frac{2}{-2} \Rightarrow \underline{a = 2\ y\ b = 0}.$$

b)

Para que la recta r esté contenida en el plano π es condición necesaria que el vector director de la recta y el vector normal del plano sean perpendiculares, es decir: que su producto escalar sea cero.

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (b - 1, 1 - a, 2) \cdot (1, 1, -2) = 0;\ \ b - 1 + 1 - a - 4 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow -a + b = 4.$ (1)

Por otra parte, si el plano π contiene a la recta r contiene a todos sus puntos y, por lo tanto, por ejemplo, contiene al punto $A(1, a, -1)$.

El plano π contiene al punto A cuando satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x + y - 2z = 2b \\ A(1, a, -1) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + a - 2 \cdot (-1) = 2b;\ \ 1 + a + 2 = 2b;$$

$a - 2b = -3.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r}-a+b=4 \\ a-2b=-3\end{array}\right\} \Rightarrow -b=1;\;\; b=-1. \qquad -a-1=4 \Rightarrow a=-5.$$

$$\underline{El\ plano\ \pi\ contiene\ a\ la\ recta\ r\ para\ a=-5\ y\ b=-1.}$$

****

4º) Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta s que pasa por el punto $P(-2, 1, 0)$ y corta perpendicularmente a la recta r de ecuaciones paramétricas $\{x = 1 - 2t, y = 1 + t, z = t\}$. Calcular la distancia de P al punto de corte de ambas rectas.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$$. Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (-2, 1, 1)$.

El haz de planos α perpendiculares a la recta r tiene la siguiente expresión general: $\alpha \equiv -2x + y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz α, el plano β que contiene al punto $P(-2, 1, 0)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha \equiv -2x + y + z + D = 0 \\ P(-2, 1, 0) \end{array}\right\} \Rightarrow -2 \cdot (-2) + 1 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = -5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta \equiv -2x + y + z - 5 = 0.$$

El punto Q de corte del plano β y la recta r es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{r} \beta \equiv -2x + y + z - 5 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow -2(1 - 2t) + (1 + t) + t - 5 = 0;$$

$$-2 + 4t + 1 + t + t - 5 = 0;\ \ 6t - 6 = 0;\ \ t - 1 = 0;\ \ t = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} x = 1 - 2 = -1 \\ y = 1 + 1 = 2 \\ z = 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow Q(-1, 2, 1).$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = [(-1, 2, 1) - (-2, 1, 0)] = (1, 1, 1).$$

$$d = \overline{PQ} = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \ \Rightarrow\ \underline{d = \sqrt{3}\, unidades}.$$

****

Tercera parte.

5º) Estudiar los máximos, los mínimos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 5 + 8x^2 - x^4$. Representar la gráfica de f.

Teniendo en cuenta que $f(-x) = f(x)$, la función es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 16x - 4x^3 = 4x(4 - x^2) = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2.$$

Por ser $f(x)$ polinómica, las raíces de la derivada dividen a la recta real en los intervalos $(-\infty, -2), (-2, 0), (0, 2)\ y\ (2, +\infty)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 1 \in (0, 2)$ es:

$$f'(1) = 4 \cdot 1 \cdot (4 - 1^2) = 12 > 0 \Rightarrow creciente.$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)}.$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = 16 - 12x^2.$$

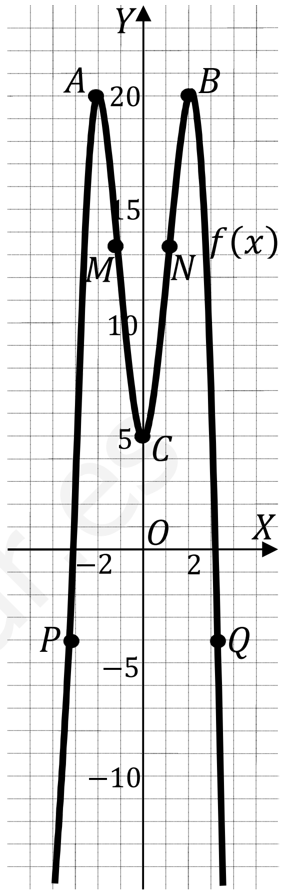
$$f''(-2) = 16 - 12(-2)^2 = 16 - 48 < 0 \Rightarrow Máxmo\ relativo\ para\ x = -2.$$

$$f(-2) = f(2) = 5 + 8 \cdot 2^2 - 2^4 = 5 + 32 - 16 = 21 \Rightarrow \underline{Máx. \to A(-2, 21)}.$$

Por simetría: $\underline{Máx. \to B(2, 21)}$.

$f''(0) = 16 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0.$

$f(0) = 5 \Rightarrow \underline{Mín. \to C(0, 5)}.$



Conviene obtener los puntos de inflexión para facilitar la representación gráfica de la función.

Una función tiene un punto de inflexión cuando se anula su segunda derivada y es distinta de cero la tercera derivada para los valores que anulan la segunda.

$f''(x) = 0 \Rightarrow 16 - 12x^2 = 0;\ \ 4 - 3x^2 = 0;$

$x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}.$

$f'''(x) = -36x.\quad f'''\left(\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow Puntos\ de\ inflexión\ para\ x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}.$

$f\left(\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 5 + 8\cdot\frac{4}{3} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 5 + \frac{32}{3} - \frac{16}{9} =$

$\frac{45+96-16}{9} = \frac{125}{9}.$ Puntos de inflexión: $M\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{125}{9}\right)\ y\ N\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{125}{9}\right).$

Otros puntos de la curva son:

$f(-3) = f(3) = 5 + 8\cdot 3^2 - 3^4 = 5 + 72 - 81 = 77 - 81 = -4 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(-3, -4)\ y\ Q(3, -4).$

Con los datos obtenidos se puede hacer una representación gráfica, aproximada, de la función, que es la indicada en el gráfico adjunto.

****

6º) Sea la función $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + A$.

a) Obtener los valores de los parámetros A, B y C para que la gráfica de f pase por el punto $P(0,1)$ y tenga un mínimo en el punto $Q(1,1)$.

b) ¿La función obtenida tiene otros máximos o mínimos? En caso afirmativo, encontrarlos.

----

a)

Por pasar por el punto $P(0,1) \Rightarrow f(0) = 1$:

$f(0) = 1 \Rightarrow \underline{A = 1}$.

La función resulta: $f(x) = x^3 + Bx^2 + Cx + 1$.

Por contener al punto $Q(1,1) \Rightarrow f(1) = 1$:

$f(1) = 1^3 + B \cdot 1^2 + C \cdot 1 + 1 = 1 + B + C + 1 = 1;\ \ B + C = -1.$ (1)

Por tener un mínimo relativo en $Q(1,1) \Rightarrow f'(1) = 0$:

$f'(x) = 3x^2 + 2Bx + C$.

$f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 2B \cdot 1 + C = 0;\ \ 2B + C = -3.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} B + C = -1 \\ 2B + C = -3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -B - C = 1 \\ 2B + C = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{B = -2}. \qquad -2 + C = -1 \Rightarrow \underline{C = 1}.$$

b)

La función es $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición, que es necesaria, no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1. \qquad f''(x) = 6x - 4.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0;\ \ x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 1.$

$f''\left(\frac{1}{3}\right) = 6 \cdot \frac{1}{3} - 4 = -2 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = \frac{1}{3}.$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} + 1 = \frac{1-6+9+27}{27} = \frac{31}{27} \Rightarrow \underline{Máx.\, A\left(\frac{1}{3}, \frac{31}{27}\right)}.$

$f''(1) = 6 \cdot 1 - 4 = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 1.$

$f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 + 1 = 1 \Rightarrow \underline{Mín.\, B(1, 1)}.$

****

Cuarta parte.

7º) Sean las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^2, h(x) = \frac{x^2}{8}$.

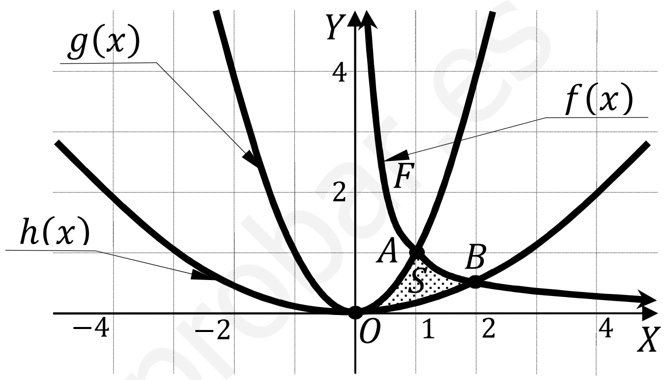
a) Dibujar el recinto finito, en el primer cuadrante, limitado por las gráficas de esas tres funciones.

b) Calcular el área de dicho recinto.

----

a)

Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en el punto $A(1, 1)$; las funciones $f(x)$ y $h(x)$ se cortan en el punto $B\left(2, \frac{1}{2}\right)$ y las funciones $g(x)$ y $h(x)$ se cortan en el punto $O(0, 0)$.



b)

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^1 [g(x) - h(x)] \cdot dx + \int_1^2 [f(x) - h(x)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^2}{8}\right) \cdot dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x^2}{8}\right) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{24}\right]_0^1 + \left[Lx - \frac{x^3}{24}\right]_1^2 =$$

$$= \left[\left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^3}{24}\right) - 0\right] + \left[\left(L2 - \frac{2^3}{24}\right) - \left(L1 - \frac{1^3}{24}\right)\right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{24} + L2 - \frac{1}{3} - L1 + \frac{1}{24} = L2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{L2\ u^2 \cong 0{,}69\ u^2}.$$

****

8º) Calcular, explicando los métodos utilizados, las integrales $I = \int (x+2) \cdot sen\,(2x) \cdot dx$ y $J = \int \frac{x+7}{x^2-4x-5} \cdot dx$.

$$I = \int (x+2) \cdot sen\,(2x) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = x+2 \to du = dx \\ dv = sen\,(2x)dx \to v = -\frac{1}{2}cos\,(2x) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(x+2) \cdot \frac{1}{2} \cdot cos\,(2x) + \int \frac{1}{2} \cdot cos\,(2x) \cdot dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot (x+2) \cdot cos\,(2x) + \frac{1}{2} \cdot \int cos\,(2x) \cdot dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot (x+2) \cdot cos\,(2x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot sen\,(2x) + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{I = \int (x+2) \cdot sen\,(2x) \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot [sen\,(2x) - 2 \cdot (x+2) \cdot cos\,(2x)] + C.}$$

$$J = \int \frac{x+7}{x^2-4x-5} \cdot dx.$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0;\ \ x = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = 2 \pm 3 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 5.$$

$$x^2 - 4x - 5 = (x+1)(x-5).$$

$$\frac{x+7}{x^2-4x-5} = \frac{M}{x+1} + \frac{N}{x-5} = \frac{Mx - 5M + Nx + N}{(x+1)(x-5)} = \frac{(M+N)x + (-5M+N)}{x^2-4x-5} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} M + N = 1 \\ -5M + N = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{r} M + N = 1 \\ 5M - N = -7 \end{array} \right\} 6M = -6;\ \ M = -1;\ -1 + N = 1 \Rightarrow N = 2.$$

$$J = \int \frac{x+7}{x^2-4x-5} \cdot dx = \int \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x-5} \right) \cdot dx = -L|x+1| + 2 \cdot L|x-5| + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{J = \int \frac{x+7}{x^2-4x-5} \cdot dx = L\frac{(x-5)^2}{|x+1|} + C.}$$

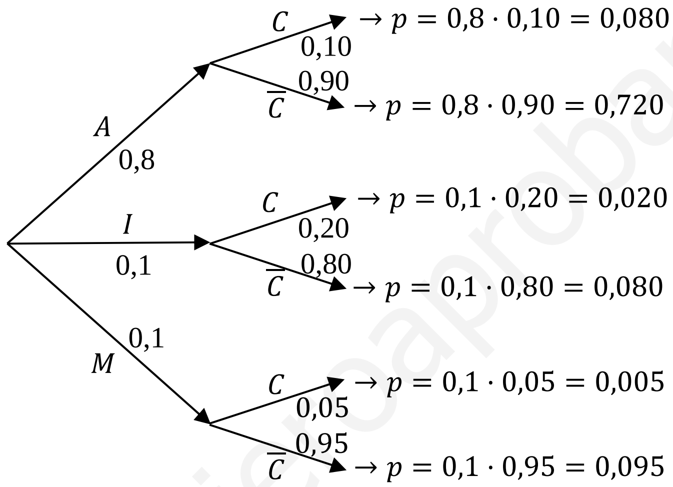
****

Quinta parte.

9º) En una farmacia se ha recibido un lote de medicamentos de los tipos A, I y M. El 80 % corresponde al medicamento A, el 10 % al I y el resto al M. En la revisión realizada por la farmacéutica se ha observado que hay medicamentos caducados en los siguientes porcentajes: el 10 % de A, el 20 % de I y el 5 % de M. Se elige una caja de medicamentos al azar. Hallar:

a) La probabilidad de coger un medicamento caducado.

b) Si sebemos que el medicamento está caducado, la probabilidad de que sea del tipo A.



a)

$$P = P(C) = P(A \cap C) + P(I \cap C) + P(M \cap C) =$$

$$= P(A) \cdot P(C/A) + P(I) \cdot P(C/I) + P(M) \cdot P(C/M) =$$

$$= 0{,}8 \cdot 0{,}10 + 0{,}1 \cdot 0{,}20 + 0{,}1 \cdot 0{,}05 = 0{,}080 + 0{,}020 + 0{,}005 = \underline{0{,}105}.$$

b)

$$P = P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A) \cdot P(C/A)}{P(C)} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}10}{0{,}105} = \frac{0{,}080}{0{,}105} = \underline{0{,}7619}.$$

****

10º) En una ciudad se han elegido al azar 3.900 personas. Hallar:

a) La probabilidad que al menos 15 de ellas cumplan años el día del patrón de la ciudad.

b) La probabilidad de que el número de personas que cumplan años el día del patrón esté comprendido entre 5 y 15, ambos incluidos.

----

a)

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 3.900;\ \ p = \frac{1}{365};\ \ q = 1 - \frac{1}{365} = \frac{364}{365}.$

Por ser $\left.\begin{aligned} n \cdot p = 3.900 \cdot \frac{1}{365} > 5 \\ n \cdot q = 3.900 \cdot \frac{527}{600} > 5 \end{aligned}\right\}$ puede aproximarse la distribución binomial a una distribución normal de las siguientes características:

$\mu = n \cdot p = 3.900 \cdot \frac{1}{365} = 10{,}68.$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{3.900 \cdot \frac{1}{365} . \frac{364}{365}} = \sqrt{10{,}66} \cong 3{,}26.$

$X = B(3.900;\ 1/365) \approx N(10{,}68;\ 3{,}26).$

Tipificando la variable: $X \to \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-10{,}68}{3{,}26}$. Aplicando la corrección de Yates:

$P = P(X \geq 15) = P\left(Z \geq \frac{14{,}5-10{,}68}{3{,}26}\right) = P\left(Z \geq \frac{3{,}82}{3{,}26}\right) \cong P(Z \geq 1{,}17) =$

$= 1 - P(Z < 1{,}17) = 1 - 0{,}8790 = \underline{0{,}1210}.$

b)

$P = P\left(\frac{4{,}5-10{,}68}{3{,}26} \leq Z \leq \frac{15{,}5-10{,}68}{3{,}26}\right) = P\left(\frac{-6{,}18}{3{,}26} \leq Z \leq \frac{4{,}82}{3{,}26}\right) =$

$= P(-1{,}90 \leq Z \leq 1{,}48) = P(Z \leq 1{,}48) - P(Z \leq -1{,}90) =$

$= P(Z \leq 1{,}48) - [1 - P(Z \leq 1{,}90)] = P(Z \leq 1{,}48) - 1 + P(Z \leq 1{,}90) =$

$= 0{,}9306 - 1 + 0{,}9713 = 1{,}9019 - 1 = \underline{0{,}9019}.$

****