PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JULIO – 2022

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Ese examen tiene cinco partes. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parta debes responder u una única pregunta. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario. No se podrán usar calculadoras que tengan algunas de las siguientes prestaciones: pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de derivadas e integrales y almacenamiento de datos alfanuméricos.

Primera parte.

1º) Discute la existencia de soluciones del sistema $\begin{cases} x+y+az=a \\ 2x+ay+az=1 \\ x+ay+z=1 \end{cases}$ en función del parámetro a. Resuelve el sistema para $a=-1\ y\ a=1$, si es posible.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ 2 & a & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}=a+2a^2+a-a^2-a^2-2=0;\ \ 2a-2=0;$$

$a-1=0 \Rightarrow a=1.$

$$\underline{Para\ a\neq 1 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow\ Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Para $a = -1$ el sistema resulta $\begin{cases} x + y - z = -1 \\ 2x - y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-2-2} = \frac{1+1-1-1+1-1}{-4} = \frac{0}{-4} = 0.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{1-2+1+1+1+2}{-4} = \frac{4}{-4} = -1.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-1+2+1-1+1-2}{-4} = \frac{0}{-4} = 0.$$

$$\underline{Solución: x = 0, y = -1, z = 0.}$$

Para $a = 1$ el sistema resulta $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$. Haciendo $z = \lambda$:

$$\underline{Solución: x = 0, y = 1 - \lambda, z = \lambda, \forall \lambda \in R.}$$

****

2º) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} m & m & 2 \\ 1 & m-2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

$a)$ Determinar para qué valores del parámetro m la matriz A no tiene inversa.

$b)$ Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $m = 0$.

$a)$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & m & 2 \\ 1 & m-2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2m(m-2) + 4 - 2m = 0;$$

$2m^2 - 4m + 4 - 2m = 0;\ \ 2m^2 - 6m + 4 = 0;\ \ m^2 - 3m + 2 = 0;$

$m = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow m_1 = 1, m_2 = 2.$

$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall m \in R - \{1, 2\}}.$

$b)$

Para $m = 0$ es $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. $\quad |A| = 4. \quad A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$Adj.\,de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{4} \Rightarrow \underline{A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

****

Segunda parte.

3º) Sea considera la recta $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases}$, y el plano $\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$. Calcula las coordenadas de un punto P perteneciente a la recta r tal que la distancia de P al plano π sea igual que la distancia de P al origen de coordenadas. ¿Es único dicho punto? Contesta razonadamente.

Un punto genérico de r es $P(t, 2t, 0)$.

La distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Aplicando la fórmula al punto $P(t, 2t, 0)$ y al plano $\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$:

$$d(P, \pi) = \frac{|t + 2t + 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|3t - 2|}{\sqrt{3}} = \frac{|3t - 2|}{\sqrt{3}}.$$

La distancia de $P(t, 2t, 0)$ al origen de coordenadas es igual que el módulo del vector $\overrightarrow{OP} = (t, 2t, 0)$.

$$d(O, P) = \sqrt{t^2 + 4t^2} = \sqrt{5t^2} = t\sqrt{5}.$$

$$d(P, \pi) = d(O, P) \Rightarrow \frac{|3t - 2|}{\sqrt{3}} = t\sqrt{5};\ \ |3t - 2| = t\sqrt{15};\ \ (3t - 2)^2 = 15t^2;$$

$$9t^2 - 12t + 4 = 15t^2;\ \ 6t^2 + 12t - 4 = 0;\ \ 3t^2 + 6t - 2 = 0;\ \ t = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 24}}{6} =$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{60}}{6} = \frac{-6 \pm \sqrt{4 \cdot 15}}{6} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{15}}{6} = \frac{-3 \pm \sqrt{15}}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{-3 - \sqrt{15}}{3}, t_2 = \frac{-3 + \sqrt{15}}{3}.$$

Los puntos que cumplen la condición pedida son:

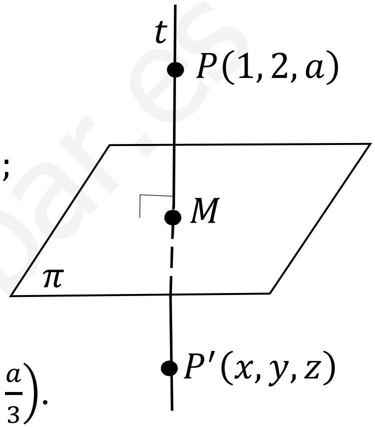
$$\underline{P_1\left(\frac{-3 - \sqrt{15}}{3}, \frac{-6 - 2\sqrt{15}}{3}, 0\right)}\ \ y\ \ \underline{P_2\left(\frac{-3 + \sqrt{15}}{3}, \frac{-6 + 2\sqrt{15}}{3}, 0\right)}.$$

****

4º) Sea el punto $P(1,2,a)$, donde $a \neq 0$, y el plano $\pi \equiv x+y+2z=3$. Halla las coordenadas del punto P', simétrico de P con respecto al plano π.

La recta t que pasa por $P(1,2,a)$ y es perpendicular al plano π, tiene como vector director al vector normal de π: $\vec{n}=(1,1,2) \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=a+2\lambda \end{cases}$.

El punto M, intersección del plano π con la recta t es la solución del sistema que forman:



$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x+y+2z=3 \\ r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=a+2\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 1+\lambda+2+\lambda+a+\lambda=3;$$

$$3\lambda=-a;\ \ \lambda=-\frac{a}{3} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=1-\frac{a}{3}=\frac{3-a}{3} \\ y=2-\frac{a}{3}=\frac{6-a}{3} \\ z=a-\frac{2a}{3}=\frac{a}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow M\left(\frac{3-a}{3},\frac{6-a}{3},\frac{a}{3}\right).$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x+1}{2}=\frac{3-a}{3};\ \ 3x+3=6-2a;\ \ 3x=3-2a \Rightarrow x=\frac{3-2a}{3} \\ \frac{y+2}{2}=\frac{6-a}{3};\ \ 3y+6=12-2a;\ \ 3y=6-2a \Rightarrow y=\frac{6-2a}{3} \\ \frac{z+a}{2}=\frac{a}{3};\ \ 3z+3a=2a;\ \ 3z=-a \Rightarrow z=\frac{-a}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{P'\left(\frac{3-2a}{3},\frac{6-2a}{3},\frac{-a}{3}\right)}.$$

****

Tercera parte.

5º) Dada la función $f(x)=(x-1)^2\cdot e^{-2x}$, estudia sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcula sus máximos y mínimos.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f(x)=(x-1)^2\cdot e^{-2x}=\frac{(x-1)^2}{e^{2x}}.$$

$$f'(x)=\frac{2\cdot(x-1)\cdot e^{2x}-(x-1)^2\cdot 2\cdot e^{2x}}{e^{4x}}=\frac{2\cdot(x-1)\cdot[1-(x-1)]}{e^{2x}}=\frac{2\cdot(x-1)\cdot(2-x)}{e^{2x}}.$$

$$f'(x)=0\ \Rightarrow \frac{2\cdot(x-1)\cdot(2-x)}{e^{2x}}=0;\ \ (x-1)\cdot(2-x)=0\ \Rightarrow\ x_1=1, x_2=2.$$

Por ser $f(x)$ una función continua en su dominio, que es R, las raíces de la derivada dividen al dominio en los intervalos $(-\infty,1),(1,2)\ y\ (2,+\infty)$, donde la función es, alternativamente, creciente o decreciente.

Considerando, por ejemplo, $x=0\in(-\infty,1)$:

$$f'(0)=\frac{2\cdot(0-1)\cdot(2-0)}{e^{2\cdot 0}}=\frac{-4}{e^0}=\frac{-4}{1}<0.$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{Decrecimiento: f'(x)<0\Rightarrow x\epsilon(-\infty,1)\cup(2,+\infty)}.$$

$$\underline{Crecimiento: f'(x)>0\Rightarrow x\epsilon(1,2)}.$$

De los periodos de crecimiento y decrecimiento así como de la continuidad de la función se deducen los máximos y mínimos relativos, no obstante, se hace su estudio mediante derivadas.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f'(x)=\frac{2\cdot(x-1)\cdot(2-x)}{e^{2x}}=\frac{2\cdot(2x-x^2-2+x)}{e^{2x}}=-2\cdot\frac{x^2-3x+2}{e^{2x}}.$$

$$f''(x) = -2 \cdot \frac{(2x-3)\cdot e^{2x} - (x^2-3x+2)\cdot 2\cdot e^{2x}}{e^{4x}} = -2 \cdot \frac{2x-3-2x^2+6x-4}{e^{2x}} = 2 \cdot \frac{2x^2-8x+7}{e^{2x}}.$$

$$f''(1) = 2 \cdot \frac{2-8+7}{e^2} = \frac{2}{e^2} > 0 \ \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 1.$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow \underline{Mín. \Rightarrow A(1,0)}.$$

$$f''(2) = 2 \cdot \frac{8-16+7}{e^4} = \frac{-2}{e^4} < 0 \ \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 2.$$

$$f(2) = \frac{1}{e^4} \Rightarrow \underline{Máx. \Rightarrow B\left(2, \frac{1}{e^4}\right)}.$$

****

6º) Sea la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Encuentra los valores de los parámetros $A, B\ y\ C$ para que f se anule en el punto de abscisa $x = 1$ y las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisa $x = -1$ y $x = 3$ sean paralelas a la recta de ecuación $y = 2x + 1$.

Por anularse para $x = 1 \Rightarrow f(1) = 0$:

$f(1) = 1^3 + A \cdot 1^2 + B \cdot 1 + C = 0;\ \ A + B + C = -1.$ (1)

Por tener tangentes paralelas a la recta $y = 2x + 1$ para $x = -1$ y $x = 3$ tiene que cumplirse que: $f'(-1) = f'(3) = 2$:

$f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B.$

$f'(-1) = 2 \Rightarrow 3 \cdot (-1)^2 + 2A \cdot (-1) + B = 2;\ -2A + B = -1.$ (2)

$f'(3) = 2 \Rightarrow 3 \cdot 3^2 + 2A \cdot 3 + B = 2;\ 6A + B = -25.$ (3)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (2) y (3):

$$\left.\begin{array}{r} -2A + B = -1 \\ 6A + B = -25 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2A - B = 1 \\ 6A + B = -25 \end{array}\right\} \Rightarrow 8A = -24;\ \ \underline{A = -3}.$$

$-2 \cdot (-3) + B = -1;\ \ 6 + B = -1;\ \ \underline{B = -7}.$

Sustituyendo en (1) los valores obtenidos de A y B:

$A + B + C = -1;\ -3 - 7 + C = -1;\ \ \underline{C = 9}.$

****

Cuarta parte.

7º) Calcula $I = \int \frac{7x+13}{(x+1)(x^2-x-2)} \cdot dx$.

$$x^2 - x - 2 = 0; \;\; x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2 \Rightarrow$$

El polinomio $x^2 - x - 2$ puede expresarse como $(x+1)(x-2)$.

$$I = \int \frac{7x+13}{(x+1)(x^2-x-2)} \cdot dx = \int \frac{7x+13}{(x-2)(x+1)^2} \cdot dx. \quad (*)$$

$$\frac{7x+13}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A \cdot (x+1)^2 + B \cdot (x-2)(x+1) + C \cdot (x-2)}{(x-2)(x+1)^2} =$$

$$= \frac{A \cdot (x^2+2x+1) + B \cdot (x^2-x-2) + Cx - 2C}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{Ax^2 + 2Ax + A + Bx^2 - Bx - 2B + Cx - 2C}{(x-2)(x+1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{7x+13}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (2A-B+C)x + (A-2B-2C)}{(x-2)(x+1)^2} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} A+B=0 \\ 2A-B+C=7 \\ A-2B-2C=13 \end{array}\right\} \Rightarrow B = -A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2A+A+C=7 \\ A+2A-2C=13 \end{array}\right\} \; \left.\begin{array}{r} 3A+C=7 \\ 3A-2C=13 \end{array}\right\} \; \left.\begin{array}{r} 3A+C=7 \\ -3A+2C=-13 \end{array}\right\} \Rightarrow 3C = -6; \;\; C = -2;$$

$3A - 2 = 7; \;\; 3A = 9; \;\; A = 3; \;\; B = -3.$

Sustituyendo en la expresión (*):

$$I = \int \frac{7x+13}{(x-2)(x+1)^2} \cdot dx = \int \left[\frac{3}{x-2} - \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} \right] \cdot dx =$$

$$= 3 \cdot \int \frac{1}{x-2} \cdot dx - 3 \cdot \int \frac{1}{x+1} \cdot dx - 2 \cdot \int \frac{1}{(x+1)^2} \cdot dx =$$

$$= 3 \cdot L|x-2| - 3 \cdot L|x+1| - 2I_1 \Rightarrow I = 3 \cdot L\left|\frac{x-2}{x+1}\right| - 2I_1. \quad (**)$$

$$I_1 = \int \frac{1}{(x+1)^2} \cdot dx = \int (x+1)^{-2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x+1=t \\ dx=dt \end{array} \right\} \Rightarrow \int t^{-2} \cdot dx =$$

$= \frac{t^{-1}}{-1} + K = -\frac{1}{t} + K \Rightarrow I_1 = -\frac{1}{x+1} + K.$ Sustituyendo este valor en (**):

$$\underline{I = \int \frac{7x+13}{(x+1)(x^2-x-2)} \cdot dx = 3 \cdot L\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + \frac{2}{x+1} + K.}$$

****

8º) Dibuja el recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x}$ y la recta horizontal $y = e$, y calcula el área de ese recinto.

La funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x}$ son simétricas con respecto al eje de ordenadas por ser $f(-x) = g(x)$ y se cortan en el punto $A(0, 1)$.

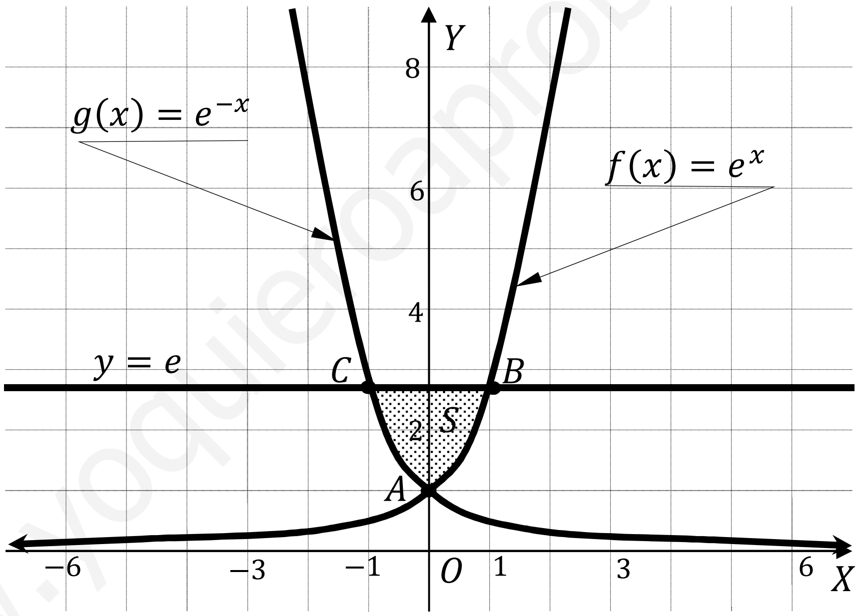
$f(x) = e^x$ es monótona creciente por ser $f'(x) = e^x > 0, \forall x \in R$.

Por ser $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, el semieje $-X$ es asíntota horizontal de $f(x) = e^x$.

$g(x) = e^{-x}$ es monótona creciente por ser $g'(x) = -e^x < 0, \forall x \in R$.

Por ser $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$, el semieje $+X$ es asíntota horizontal de $g(x) = e^{-x}$.

Los puntos de corte de la recta $y = e$ con las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son B y C, respectivamente.



La representación gráfica, aproximada, de la situación se expresa en la figura.

Teniendo en cuenta la simetría de las funciones, que en el intervalo de la superficie a calcular las ordenadas de la recta $y = e$ son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, y de la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^1 [y - f(x)] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^1 [e - e^x] \cdot dx = 2 \cdot [ex - e^x]_0^1 =$$

$$= 2 \cdot [(e \cdot 1 - e^1) - (e \cdot 0 - e^0)] = 2 \cdot [(e - e) - (0 - 1)] = 2 \cdot (0 + 1) = 2.$$

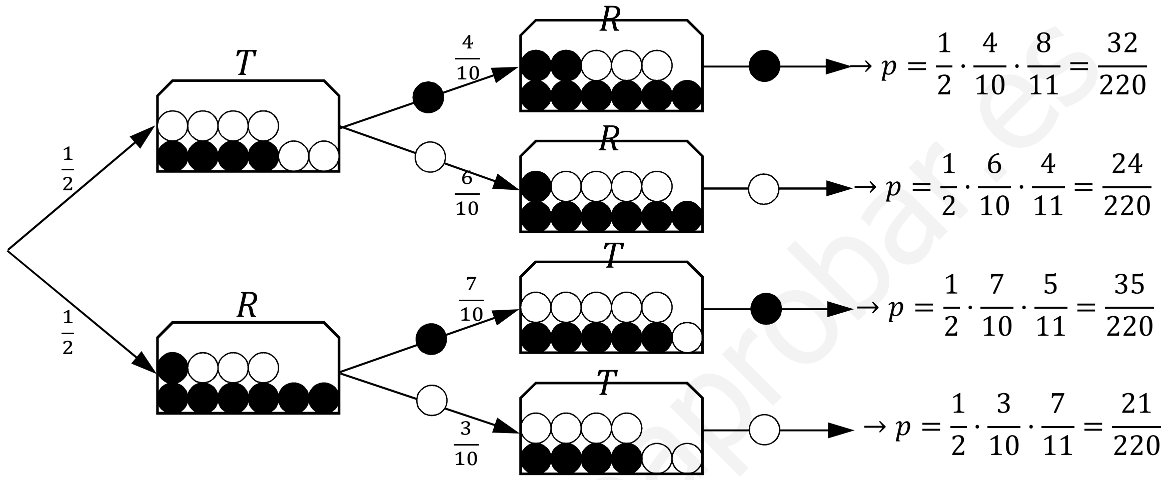
$$\underline{S = 2\ u^2}.$$

****

Quinta parte.

9º) Tenemos dos urnas con el siguiente número de bolas blancas y negras: la T con 4 bolas negras y 6 blancas y la R con 7 bolas negras y 3 blancas. Se selecciona al azar una urna, se extrae una bola y se coloca en la otra urna. A continuación, se extrae una bola de esta última urna. Calcula la probabilidad de que las dos bolas extraídas:

a) Sean negras. b) Sean blancas. c) Sean de distinto color.



a)

$$P = P(NN) = P(N \cap T) \cdot P(N \cap R) + P(N \cap R) \cdot P(N \cap T) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{8}{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{5}{11} = \frac{32}{220} + \frac{35}{220} = \underline{\frac{67}{220} = 0{,}3045}.$$

b)

$$P = P(BB) = P(B \cap T) \cdot P(B \cap R) + P(B \cap R) \cdot P(B \cap T) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{11} = \frac{24}{220} + \frac{21}{220} = \frac{45}{220} = \underline{\frac{9}{44} = 0{,}2045}.$$

c)

$$P = 1 - [P(NN) + P(BB)] = 1 - \left(\frac{67}{220} + \frac{45}{220}\right) = 1 - \frac{112}{220} = 1 - \frac{28}{55} =$$

$$= \frac{55-28}{55} = \underline{\frac{27}{55} = 0{,}4909}.$$

****

10º) El peso (en gramos) de una pieza fabricada en serie sigue una distribución normal de media 52 y desviación típica 6,5.

a) Calcula la probabilidad de que el peso de una pieza fabricada esté comprendida entre 50 y 68 gramos.

b) Si el 30 % de las piezas fabricadas pesa más que una pieza dada, ¿cuánto pesa esta última?

$$Datos: \ \mu = 52; \ \ \sigma = 6{,}5.$$

$X \rightarrow N(\mu; \ \sigma) = N(52; \ 6{,}5).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-52}{6{,}5}$.

a)

$$P = P(50 \le X \le 68) = P\left(\frac{50-52}{6{,}5} \le Z \le \frac{68-52}{6{,}5}\right) = P\left(\frac{-2}{6{,}5} \le Z \le \frac{16}{6{,}5}\right) =$$

$$= P(-0{,}31 \le Z \le 2{,}46) = P(Z \le 2{,}46) - P(Z \le -0{,}31) =$$

$$= P(Z \le 2{,}46) - [1 - P(Z \le 0{,}31)] = P(Z \le 2{,}46) - 1 + P(Z \le 0{,}31) =$$

$$= 0{,}9931 - 1 + 0{,}6217 = 1{,}6148 - 1 = \underline{0{,}6148}.$$

b)

$$P = P(X > \beta) = 0{,}3 \Rightarrow P\left(Z > \frac{\beta-52}{6{,}5}\right) = 1 - P\left(Z \le \frac{\beta-52}{6{,}5}\right) = 0{,}3;$$

$P\left(Z \le \frac{\beta-52}{6{,}5}\right) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$. Mirando este valor en la tabla $N(0, 1)$ de forma inversa, al valor 0,7 le corresponde el valor 0,52:

$$\frac{\beta-52}{6{,}5} = 0{,}52; \ \ \beta - 52 = 0{,}52 \cdot 6{,}5 = 3{,}38; \ \ \beta = 3{,}38 + 52 = 55{,}38.$$

$$\underline{El\ 30\ \%\ de\ las\ piezas\ pesa\ más\ de\ 55{,}38\ gramos.}$$

****