PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B).

PRUEBA A

1º) Una empresa fabrica dos modelos de cazadoras de caballero: un modelo clásico y otro moderno. La empresa tiene 900 horas disponibles en su departamento de corte y costura, 300 horas disponibles en el departamento de terminado y 100 horas disponibles en el departamento de empaquetado. Las horas necesarias por cazadora y sus beneficios se dan en la siguiente tabla:

	Corte y costura	*Terminado*	*Empaquetado*	*Beneficios*
Modelo clásico	1	1/2	1/8	40
Modelo moderno	3/2	1/3	1/4	80

Formule el modelo que permita encontrar una política de producción que maximice el beneficio.

i) Plantee el problema. ii) Resolución gráfica.

iii) Analice gráficamente qué ocurre si las horas de empaquetado aumentan en 100.

----

i)

Sean x e y el número de cazadoras clásicas y modernas que se fabrican, respectiva mente.

El conjunto de restricciones son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} x+\frac{3}{2}y\le 900 \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\le 300 \\ \frac{1}{8}x+\frac{1}{4}y\le 100 \\ x\ge 9;\ \ y\ge 0 \end{array}\right\} \quad \underline{\left.\begin{array}{r} 2x+3y\le 1.800 \\ 3x+2y\le 1.800 \\ x+2y\le 800 \\ x\ge 9;\ \ y\ge 0 \end{array}\right\}}.$$

La función de objetivos es: $\underline{f(x,y)=40x+80y}$.

$ii)$

① $\Rightarrow 2x+3y \leq 1.800 \Rightarrow y \leq \frac{1.800-2x}{3} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	900
y	600	0

② $\Rightarrow 3x+2y \leq 1.800 \Rightarrow y \leq \frac{1.800-3x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	600
y	900	0

③ $\Rightarrow x+2y \leq 800 \Rightarrow y \leq \frac{800-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	800
y	800	0

La región factible se indica en la figura.

Los vértices de la zona factible son, además del origen, los siguientes:

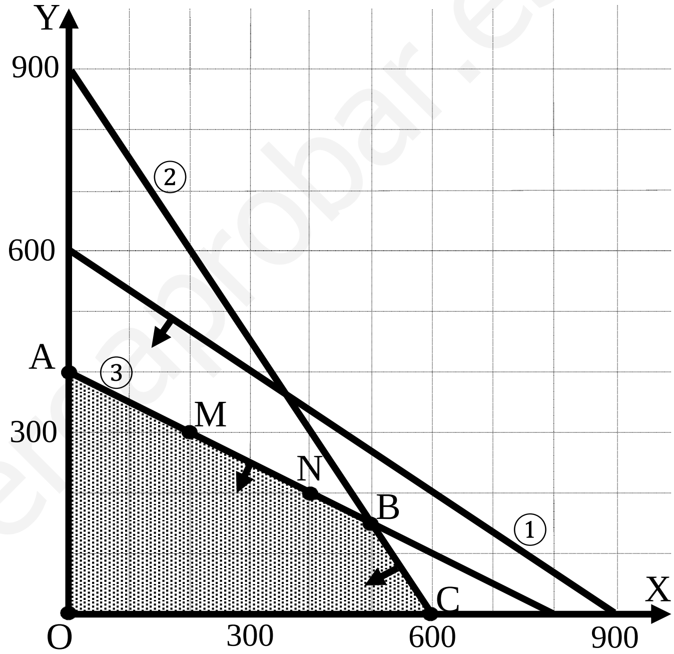
$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+2y=800 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,400).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+2y=1.800 \\ x+2y=800 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow B(500,150).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+2y=1.800 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow C(600,0).$



Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,400) = 40 \cdot 0 + 80 \cdot 400 = 0 + 32.000 = 32.000.$

$B \Rightarrow f(500,150) = 40 \cdot 500 + 80 \cdot 150 = 20.000 + 12.000 = 32.000.$

$C \Rightarrow f(600,0) = 40 \cdot 600 + 80 \cdot 0 = 24.000 + 0 = 24.000.$

El máximo se produce en todos los puntos enteros del segmento AB, que son, además de A y B, los puntos $M(200,300)$ y $N(400,200)$.

$$\underline{El\ beneficio\ se\ maximiza\ fabricando: \left\{\begin{array}{l} 500\ clásicas\ y\ 0\ modernas \\ 200\ clásicas\ y\ 300\ modernas \\ 400\ clásicas\ y\ 200\ modernas \\ 500\ clásicas\ y\ 150\ modernas \end{array}\right.}.$$

$iii)$

Si las horas de empaquetado aumentan en 100, el problema es como sigue:

El conjunto de restricciones son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} x+\frac{3}{2}y\leq 900 \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\leq 300 \\ \frac{1}{8}x+\frac{1}{4}y\leq 200 \\ x\geq 9;\ \ y\geq 0 \end{array}\right\} \quad \underline{\left.\begin{array}{r} 2x+3y\leq 1.800 \\ 3x+2y\leq 1.800 \\ x+2y\leq 1.600 \\ x\geq 9;\ \ y\geq 0 \end{array}\right\}}.$$

La función de objetivos es la misma: $\underline{f(x,y)=40x+80y}$.

La única recta que varía es la ③.

① $\Rightarrow 2x+3y\leq 1.800 \Rightarrow y\leq \frac{1.800-2x}{3} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	900
y	600	0

② $\Rightarrow 3x+2y\leq 1.800 \Rightarrow y\leq \frac{1.800-3x}{2} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	600
y	900	0

③ $\Rightarrow x+2y\leq 1.600 \Rightarrow y\leq \frac{1.600-x}{2} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	800	600
y	400	500

La región factible se indica en la figura.

Los vértices de la zona factible, además del origen, son los siguientes:

$P \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ 2x+3y=1.600 \end{array}\right\} \Rightarrow$

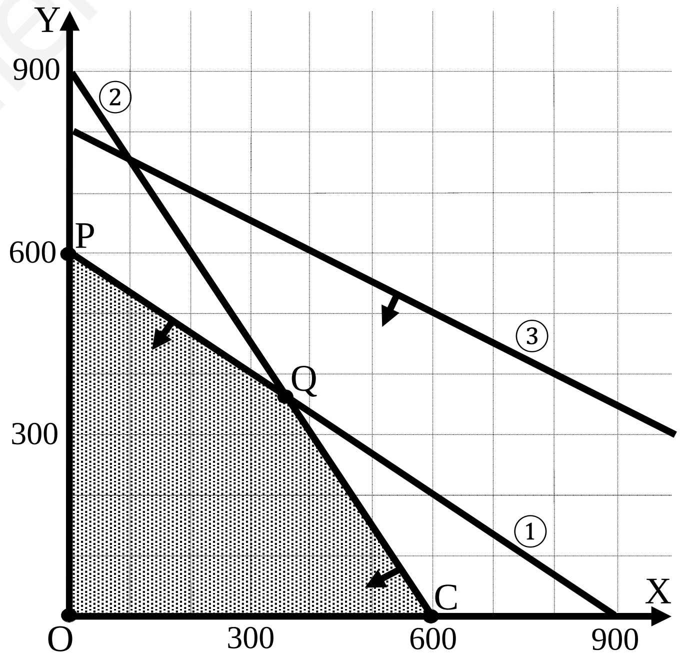
$\Rightarrow A(0,600).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+3y=1.800 \\ 3x+2y=1.800 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x=y \Rightarrow Q(360,360).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+2y=1.800 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow C(600,0).$



Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$P \Rightarrow f(0,600)=40\cdot 0+80\cdot 600=0+48.000=48.000.$

$Q \Rightarrow f(360,360)=40\cdot 360+80\cdot 360=14.400+28.800=43.200.$

$C \Rightarrow f(600, 0) = 40 \cdot 600 + 80 \cdot 0 = 24.000 + 0 = 24.000.$

El máximo se produce en el punto $P(0, 600)$.

$\underline{El\ beneficio\ se\ maximiza\ fabricando\ sólamente\ 600\ cazadoras\ modernas.}$

****

2º) La función $f(x) = -x^2 + 110x - 2.400$ representa el beneficio que obtiene una empresa por la fabricación de x unidades de un producto.

i) ¿Cuántas unidades ha de fabricar para que no haya pérdidas?

ii) ¿Cuál es el mayor beneficio posible? ¿Cuántas unidades han de fabricar para alcanzarlo?

iii) ¿Calcule la función del beneficio unitario?

----

i)

La solución pedida es cuando $f(x)$ es positiva.

La función $f(x) = -x^2 + 110x - 2.400$ es una parábola cóncava $(\cap)$ cuyos puntos de corte con el eje X son los siguientes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 110x - 2.400 = 0;\ \ x^2 - 110x + 2.400 = 0;$$

$$x = \frac{110 \pm \sqrt{110^2 - 4 \cdot 2.400}}{2} = \frac{110 \pm \sqrt{12.100 - 9.600}}{2} = \frac{110 \pm \sqrt{2.500}}{2} = \frac{110 \pm 50}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 30 \\ x_1 = 80 \end{cases}.$$

$$\underline{No\ hay\ pérdidas\ en\ la\ empresa\ fabricando\ entre\ 30\ y\ 80\ unidades.}$$

ii)

El punto máximo de la función se obtiene para el valor de x que anula la primera derivada:

$$f'(x) = -2x + 110 = 0;\ -x + 55 = 0 \Rightarrow x = 55.$$

$$f(55) = -55^2 + 110 \cdot 55 - 2.400 = -3.025 + 6.050 - 2.400 = 625.$$

$$\underline{El\ máximo\ beneficio\ posible\ es\ de\ 625\ euros\ (se\ supone\ que\ son\ euros).}$$

$$\underline{El\ maximo\ beneficio\ se\ obtiene\ produciendo\ 55\ unidades.}$$

iii)

La función unitaria del beneficio $f(u)$ es la que se obtiene dividiendo por x la función de beneficios:

$$f(u) = \frac{-x^2 + 110x - 2.400}{x} = -x + 110 - \frac{2.400}{x}.$$

$$\underline{f(u) = -x + 110 - \frac{2.400}{x}.}$$

****

3º) La puntuación que obtienen los alumnos de la UPNA en cierto test psicológico sigue una distribución normal de desviación típica 35. Sabiendo que en una muestra de 50 estudiantes se observó una media de 75 puntos.

i) Calcule un intervalo de confianza del 90 % para la media poblacional.

ii) Razone cómo se puede reducir el error máximo.

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

----

i)

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1-\alpha=0{,}90 \rightarrow \alpha=1-0{,}90=0{,}10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}05}=1{,}645.$
$(1-0{,}05=0{,}9500 \rightarrow z=1{,}645).$

Conocemos: $n=50;\ \sigma=35;\ \overline{x}=75;\ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}645.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(75-1{,}645\cdot\frac{35}{\sqrt{50}};\ 75+1{,}645\cdot\frac{35}{\sqrt{50}}\right);$

$(75-1{,}645\cdot 4{,}950;\ 75+1{,}645\cdot 4{,}950);\ \ (75-8'142;\ 75+8'142).$

$$\underline{I.C._{90\,\%}\,(66'858;\ 83'142).}$$

ii)

El error es: $E=\frac{83{,}142-66{,}853}{2}=\frac{16{,}289}{2}=8{,}1445.$

Existen dos formas de reducir el error máximo: aumentando el tamaño de la muestra o aumentando el nivel de confianza.

$$\underline{El\ error\ disminuye\ aumentando\ la\ muestra\ o\ el\ nivel\ de\ confianza.}$$

Ejemplo primero:

Con una muestra de 100 estudiantes.

Conocemos: $n=100;\ \sigma=35;\ \overline{x}=75;\ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}645.$

$\left(75-1{,}645\cdot\frac{35}{\sqrt{100}};\ 75+1{,}645\cdot\frac{35}{\sqrt{100}}\right);$

$(75 - 1{,}645 \cdot 3{,}5;\ 75 + 1{,}645 \cdot 3{,}5);\ \ (75 - 5'789;\ 75 + 5'789).$

$I.C._{90\ \%}\ (69'211;\ 82'789) \Rightarrow E = \frac{82{,}789 - 69{,}211}{2} = \frac{13{,}578}{2} = \underline{6{,}789 < 8{,}145}.$

Ejemplo segundo:

Con un nivel de confianza del 95 %.

$\alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05\ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$
$(1 - 0{,}025 = 0{,}9750\ \rightarrow z = 1{,}96).$

Conocemos: $n = 50;\ \ \sigma = 35;\ \ \overline{x} = 75;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

$\left(75 - 1{,}96 \cdot \frac{35}{\sqrt{50}};\ 75 + 1{,}96 \cdot \frac{35}{\sqrt{50}}\right);$

$(75 - 1{,}96 \cdot 4{,}950;\ 75 + 1{,}96 \cdot 4{,}950);\ \ (75 - 9'702;\ 75 + 9'702).$

$I.C._{90\ \%}\ (65'298;\ 83'702) \Rightarrow E = \frac{83{,}702 - 65{,}298}{2} = \frac{18{,}403}{2} = \underline{9{,}202 < 8{,}145}.$

Ejemplo tercero:

Con $n = 100$ y nivel del confianza del 95 %.

Conocemos: $n = 100;\ \ \sigma = 35;\ \ \overline{x} = 75;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

$\left(75 - 1{,}96 \cdot \frac{35}{\sqrt{100}};\ 75 + 1{,}96 \cdot \frac{35}{\sqrt{100}}\right);$

$(75 - 1{,}96 \cdot 3{,}5;\ 75 + 1{,}96 \cdot 3{,}5);\ \ (75 - 6'860;\ 75 + 6'860).$

$I.C._{90\ \%}\ (68'140;\ 81'860) \Rightarrow E = \frac{81{,}860 - 68{,}140}{2} = \frac{13{,}720}{2} = \underline{6{,}860 < 8{,}145}.$

****

OPCIÓN B

1º) Determine las matrices X e Y que verifican: $\left.\begin{array}{r} X+2Y=\begin{pmatrix}3&4&5\\2&3&4\end{pmatrix}\\ 2X+Y=\begin{pmatrix}3&5&7\\7&9&11\end{pmatrix}\end{array}\right\}$. Si existen, calcule las matrices $X \cdot Y \;y\; X \cdot Y^t$.

$$\left.\begin{array}{r} 2X+4Y=\begin{pmatrix}6&8&10\\4&6&8\end{pmatrix}\\ -2X-Y=\begin{pmatrix}-3&-5&-7\\-7&-9&-11\end{pmatrix}\end{array}\right\} \Rightarrow 3Y=\begin{pmatrix}3&3&3\\-3&-3&-3\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Y=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}}.$$

$$\left.\begin{array}{r} -X-2Y=\begin{pmatrix}-3&-4&-5\\-2&-3&-4\end{pmatrix}\\ 4X+2Y=\begin{pmatrix}6&10&14\\14&18&22\end{pmatrix}\end{array}\right\} \Rightarrow 3X=\begin{pmatrix}3&6&9\\12&15&18\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}}.$$

$$X \cdot Y=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&-1\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{No\ existe}.$$

Para multiplicar dos matrices tiene que cumplirse que el número de columnas del multiplicando sea igual que el número de filas del multiplicador.

$$X \cdot Y=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-6\\15&-15\end{pmatrix}.$$

$$\underline{X \cdot Y=\begin{pmatrix}6&-6\\15&-15\end{pmatrix}}.$$

****

2º) Halle los valores a, b y c para que la curva $f(x) = ax^2 + bx + c$ pase por el punto $P(1, 3)$ y sea tangente en el origen de coordenadas a la bisectriz del primer cuadrante.

Por pasar por $P(1, 3)$: $f(1) = 3 \Rightarrow a \cdot 1^2 + b + c = 3;\ \ a + b + c = 3.$ (1)

Por pasar por $O(0, 0)$: $f(0) = 0 \ \Rightarrow \underline{c = 0}$.

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual al valor de su primera derivada en ese punto.

La bisectriz del primer cuadrante tiene de pendiente 1$\Rightarrow m = 1$.

$f'(x) = 2ax + b \ \Rightarrow \ f'(0) = m \Rightarrow 0 + b = 1 \ \Rightarrow \ \underline{b = 1}$.

Sustituyendo en (1) los valores de b y c:

$a + 1 + 0 = 3 \ \Rightarrow \ \underline{a = 2}$.

****

3º) En una empresa, el 45 % de los empleados usa el comedor del personal, el 30 % usa los transportes de la empresa y el 20 % usa ambos servicios. Seleccionado un empleado al azar, se pide:

i) Si usa el servicio de comedor, calcule la probabilidad de que use el servicio de transporte.

ii) Si usa el servicio de transporte, calcule la probabilidad de que no use el servicio de comedor.

iii) Calcule la probabilidad de que no use ni el servicio de transporte ni el servicio de comedor.

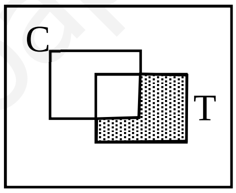
$$P(C) = 0{,}45. \qquad P(T) = 0{,}30. \qquad P(C \cap T) = 0{,}2.$$

i)

$$P(T/C) = \frac{P(T \cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}2}{0{,}45} = \underline{0{,}444}.$$

ii)

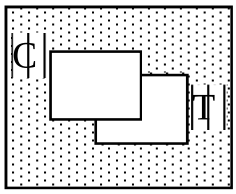
$$P(\overline{C}/T) = \frac{P(\overline{C} \cap T)}{P(T)} = \frac{P(T) - P(C \cap T)}{0{,}30} =$$



$$= \frac{0{,}30 - 0{,}20}{0{,}30} = \frac{0{,}10}{0{,}30} = \underline{\frac{1}{3}}$$

iii)

$$P = P(\overline{C} \cap \overline{T}) = 1 - P(C \cup T) =$$



$$= 1 - [P(C) + P(T) - P(C \cap T)] =$$

$$= 1 - (0{,}45 + 0{,}30 - 0{,}20) = 1 - 0{,}55 = \underline{0{,}45}.$$

****