PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

SEPTIEMBRE – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B).

PRUEBA A

1º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$:

i) Encuentre todas las matrices cuadradas X de orden 2 que verifiquen: $A \cdot X = O$. (O es la matriz nula).

ii) ¿Se cumple que $X \cdot A = O$? iii) ¿Alguna de esas matrices X es simétrica?

----

i)

Sea la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - 3c & 3b - 3d \\ 2a - 2c & 2b - 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 3a - 3c = 0 \\ 2a - 2c = 0 \\ 3b - 3d = 0 \\ 2b - 2d = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a = c \\ b = d \end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}}.$$

ii)

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + 2b & -3a - 2b \\ 3a + 2b & -3a - 2b \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X \cdot A = O \Rightarrow a = b = 0}.$$

iii)

Una matriz es simétrica cuando es igual a su traspuesta.

$$\underline{X\ es\ simétrica\ para\ a = b \in R.}$$

****

2º) Dada la función $f(x)=\frac{2x^3}{x^2-1}$, halle:

i) Dominio y puntos de corte con los ejes. ii) Asíntotas.

iii) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

iv) Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

v) Con los datos que ha obtenido, dibuje su gráfica.

----

i)

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores de x que anulan el denominador: $\underline{D(f) \Rightarrow R-\{-1,1\}}$.

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$Eje\ Y \Rightarrow x=0 \rightarrow \underline{O(0,0)}$.

$Eje\ X \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow \frac{2x^3}{x^2-1}=0 \Rightarrow x=0 \rightarrow \underline{O(0,0)}$.

$\underline{El\ único\ punto\ de\ corte\ con\ los\ ejes\ de\ f(x)\ es\ el\ origen\ de\ coordenadas}$.

ii)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y=k$, son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x^2-1}=\infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x^2-1=0 \Rightarrow \underline{La\ rectas\ x=-1\ y\ x=1\ son\ asíntotas\ verticales}.$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y=mx+n$, siendo:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ y } n=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-mx\right].$$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x^3-x^2}=2.$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - mx\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2-1} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-2x^3+2x}{x^2-1} = 0.$$

$$\underline{La\ recta\ y = 2x\ es\ asíntota\ oblicua\ de\ la\ función.}$$

$iii)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{6x^2\cdot(x^2-1)-2x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{6x^4-6x^2-4x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^4-6x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = 0;\ 2x^2(x^2-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\sqrt{3}, x_3 = \sqrt{3}.$$

Teniendo en cuenta que la función $f(x) = \frac{2x^3}{x^2-1}$ es simétrica con respecto al origen por ser $f(-x) = -f(x)$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in \left(-\sqrt{3}, -1\right) \cup (-1, 1) \cup \left(1, \sqrt{3}\right).}$$

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right).}$$

Una función tiene un extremo relativo (máximo o mínimo) para los valores de x que anulan la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trate de un máximo relativo y, si es positiva, de un mínimo relativo.

$$f''(x) = \frac{(8x^3-12x)\cdot(x^2-1)^2-2x^2(x^2-3)\cdot[2\cdot(x^2-1)\cdot 2x]}{(x^2-1)^4} = \frac{(8x^3-12x)\cdot(x^2-1)-8x^3(x^2-3)}{(x^2-1)^3} =$$

$$= \frac{8x^5-8x^3-12x^3+12x-8x^5+24x^3}{(x^2-1)^3} = \frac{4x^3+12x}{(x^2-1)^3} = \frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

$$f''(0) = 0 \Rightarrow Ni\ máximo\ ni\ mínimo\ (para\ punto\ de\ inflexión).$$

$$f''\left(\sqrt{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}(3+3)}{(3-1)^3} = \frac{24\sqrt{3}}{8} > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = \sqrt{3}.$$

$$f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{2\cdot 3\sqrt{3}}{3-1} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \cong 5{,}2 \Rightarrow \underline{Mínimo\ relativo: A\left(\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\right).}$$

Por simetría con respecto al origen $\Rightarrow$ $\underline{Máximo\ relativo: B\left(-\sqrt{3}, -3\sqrt{3}\right).}$

$iv)$

Una función es cóncava o convexa cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente. $f''(x) = \frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$.

$$\underline{Concavidad\ (\cap): f''(x) < 0 \Rightarrow x \in\ (-\infty, -1) \cup (0, 1).}$$

$$\underline{Convexidad\ (\cup): f''(x) > 0 \Rightarrow x \in\ (-1, 0) \cup (1, +\infty)}$$

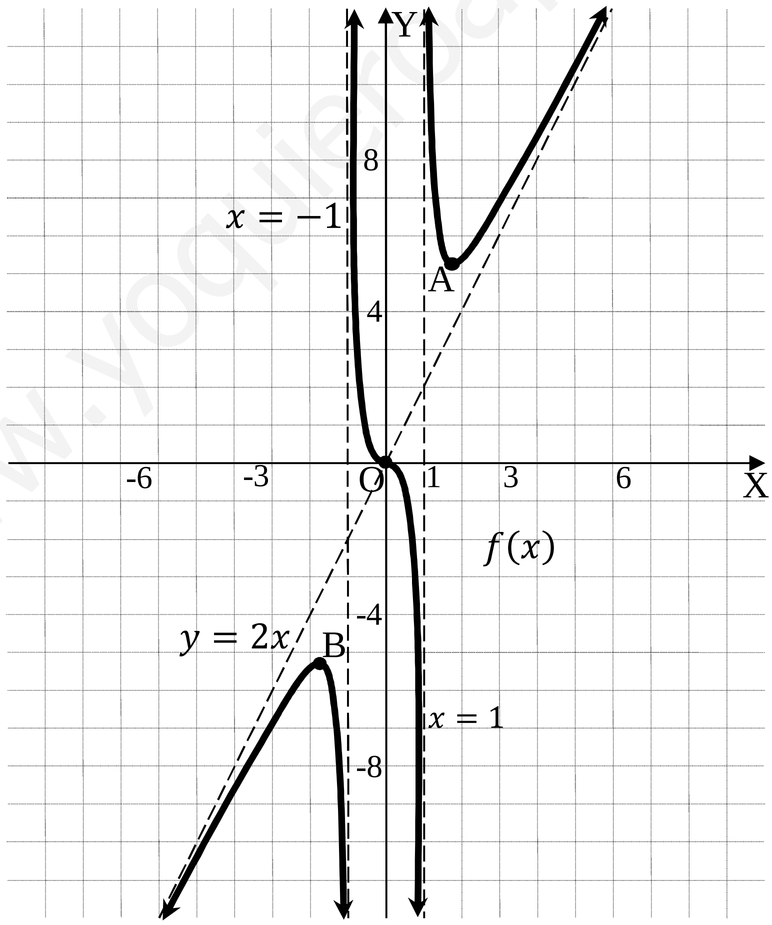
Para que una función tenga un punto de inflexión es condición necesaria que se anule su segunda derivada:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = 0;\ \ 4x(x^2+3) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

$$\underline{Punto\ de\ inflexión: O(0, 0).}$$

$v)$

Considerando los elementos hallados anteriormente, la representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



****

3º) El beneficio anual (pérdidas en el caso de valores negativos) de las empresas de una determinada comunidad sigue una distribución normal con una desviación típica de 2 millones de euros.

i) Se elige una muestra aleatoria de 25 empresas y, la media muestral observada es de 0,5 millones. Determine el intervalo de confianza del 95 % para el beneficio medio anual de las empresas de esa comunidad.

ii) Si se desea obtener un intervalo de confianza del 90 % para el beneficio medio con una amplitud de 2 millones de euros, ¿qué tamaño deberá tener la muestra?

----

i)

$$1-\alpha = 1-0{,}5 = 0{,}95 \;\rightarrow\; \alpha = 1-0{,}95 = 0{,}05 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$$
$$(1-0{,}025 = 0{,}9750 \;\rightarrow z = 1{,}96).$$

Datos: $n = 25;\;\; \sigma = 2;\;\; \overline{x} = 0{,}5;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(0{,}5 - 1{,}96 \cdot \frac{2}{\sqrt{25}};\ 0{,}5 + 1{,}96 \cdot \frac{2}{\sqrt{25}}\right);\;\; (0{,}5 - 1'96 \cdot 0'4;\ 0{,}5 + 1'96 \cdot 0'4);$$

$$(0{,}5 - 0{,}784;\ 0{,}5 + 0'784) \;\Rightarrow\; \underline{I.C._{95\ \%} = (-0'284;\ 1'284)}.$$

ii)

Para un nivel del 90 %:

$$1-\alpha = 0{,}90 \;\rightarrow\; \alpha = 1-0{,}90 = 0{,}10 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}05} = 1{,}645.$$
$$(1-0{,}05 = 0{,}9500 \;\rightarrow z = 1{,}645).$$

$$E = \frac{Amplitud\ del\ intervalo}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Datos: $\overline{x} = 0{,}5;\;\; \sigma = 2;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645;\;\; E = 1.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \;\Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1{,}645 \cdot \frac{2}{1}\right)^2 =$

$$= (1{,}645 \cdot 2)^2 = 3{,}29^2 = 10{,}82.$$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 11\ empresas.}$

****

OPCIÓN B

1º) Una empresa de transporte de viajeros dispone de 12 chóferes, 10 autobuses de 25 plazas y 6 autobuses de 50 plazas y tiene que llevar de excursión a 400 escolares. El gasto para ese viaje de un autobús grande es de 900 euros y el gasto de uno pequeño es de 600 euros. ¿Cuántos autobuses de cada clase debe utilizar en esa excursión para tener el menor gasto?

i) Plantee el problema. ii) Resolución gráfica.

iii) Analice gráficamente qué ocurre si el gasto del autobús pequeño se reduce a 450 euros.

----

i)

Sean x e y el número de autobuses de 25 y 50 plazas que se utilizan en la excursión, respectivamente.

Las restricciones del ejercicio se establecen en el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+y\le 12 \\ 25x+50y\ge 400 \\ x\le 10, y\le 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y\le 12 \\ x+2y\ge 16 \\ x\le 10, y\le 6 \end{array}\right\}.$$

La región factible se indica sombreada en la figura:

① $\Rightarrow x+y\le 12 \Rightarrow y\le 12-x \Rightarrow O(0,0)\to Si.$

x	0	12
y	12	0

② $\Rightarrow x+2y\ge 16 \Rightarrow y\ge \frac{16-x}{2} \Rightarrow O(0,0)\to No.$

x	0	8
y	8	4

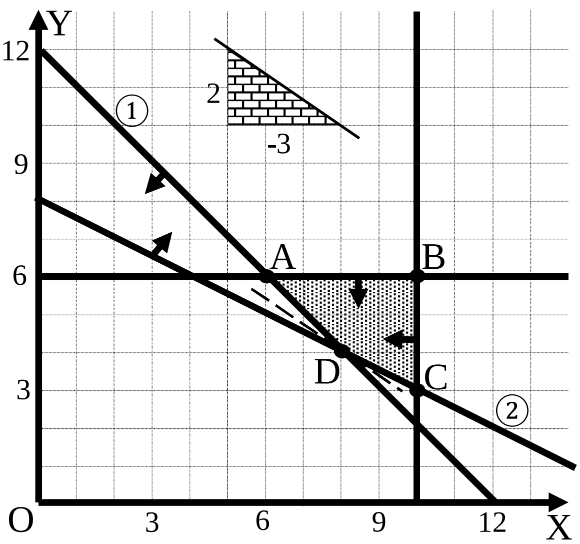
Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=12 \\ y=6 \end{array}\right\} \Rightarrow A(6,6).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=10 \\ y=6 \end{array}\right\} \Rightarrow B(10,6).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=10 \\ x+2y=16 \end{array}\right\} \Rightarrow C(10,3).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=12 \\ x+2y=16 \end{array}\right\} \Rightarrow C(8,4).$



La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y)=600x+900y.$

$ii)$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(6,6) = 600 \cdot 6 + 900 \cdot 6 = 3.600 + 5.400 = 9.000.$$

$$B \Rightarrow f(10,6) = 600 \cdot 10 + 900 \cdot 6 = 6.000 + 5.400 = 11.400.$$

$$C \Rightarrow f(10,3) = 600 \cdot 10 + 900 \cdot 3 = 6.000 + 2.700 = 8.700.$$

$$D \Rightarrow f(8,4) = 600 \cdot 8 + 900 \cdot 4 = 4.800 + 3.600 = 8.400.$$

El mínimo se produce en el punto D.

También se hubiera obtenido el punto D por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

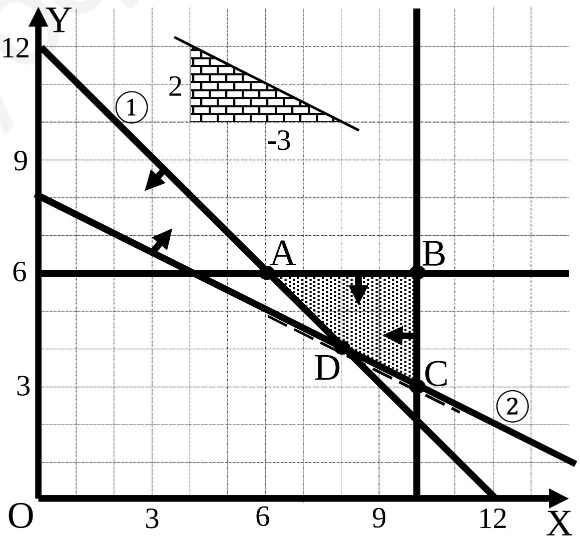
$$f(x,y) = 600x + 900y = 0 \Rightarrow y = -\frac{600}{900}x = -\frac{2}{3}x \Rightarrow m = -\frac{2}{3}.$$

$$\underline{Deben\ utilizarse\ 8\ autobuses\ de\ 25\ plazas\ y\ 4\ autobuses\ de\ 50\ plazas.}$$

$$\underline{El\ menor\ coste\ posible\ es\ de\ 8.400\ euros.}$$

$iii)$

S el gasto del autobús pequeño se reduce a 450 euros, la función de beneficios es la siguiente: $f(x,y) = 450x + 900y$.



El punto de mínimo gasto puede obtenerse por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y) = 450x + 900y = 0 \Rightarrow y = -\frac{450}{900}x = -\frac{1}{2}x \Rightarrow m = -\frac{2}{4}.$$

Como se observa en el gráfico, los puntos de mínimo gasto son los puntos enteros del segmento CD, como se puede observar en la figura. Solamente tiene dos puntos enteros, que son los extremos C y D.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(6,6) = 450 \cdot 6 + 900 \cdot 6 = 2.700 + 5.400 = 8.100.$$

$$B \Rightarrow f(10,6) = 450 \cdot 10 + 900 \cdot 6 = 4.500 + 5.400 = 9.900.$$

$$C \Rightarrow f(10,3) = 450 \cdot 10 + 900 \cdot 3 = 4.500 + 2.700 = 7.200.$$

$$D \Rightarrow f(8,4) = 450 \cdot 8 + 900 \cdot 4 = 3.600 + 3.600 = 7.200.$$

$$\underline{Deben\ utilizarse\ 10\ autobuses\ de\ 25\ plazas\ y\ 3\ autobuses\ de\ 50\ plazas}$$

o también:

$$\underline{Pueden\ utilizarse\ 8\ autobuses\ de\ 25\ plazas\ y\ 4\ autobuses\ de\ 50\ plazas}.$$

$$\underline{El\ menor\ coste\ posible\ es\ de\ 7.200\ euros}.$$

****

2º) Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$i)\ f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+3x}}.$ $ii)\ g(x) = L(1-5x) + e^{7x^2}.$

$iii)\ h(x) = 3sen\ x \cdot (\cos 2x)^2.$

$i)$

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+3x}}.$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot \sqrt{1+3x} - x^2 \cdot \frac{3}{2\sqrt{1+3x}}}{\left(\sqrt{1+3x}\right)^2} = \frac{\frac{4x(1+3x)-3x^2}{2\sqrt{1+3x}}}{1+3x} = \frac{4x+12x^2-3x^2}{2(1+3x)\cdot\sqrt{1+3x}} = \frac{9x^2+4x}{2(1+3x)\cdot\sqrt{1+3x}} =$$

$$= \frac{x(9x+4)\cdot\sqrt{1+3x}}{2(1+3x)\cdot(1+3x)} =$$

$$\underline{f'(x) = \frac{x(9x+4)\cdot\sqrt{1+3x}}{2(1+3x)^2}}.$$

$ii)$

$$g(x) = L(1-5x) + e^{7x^2}.$$

$$\underline{g'(x) = \frac{-5}{1-5x} + 14x \cdot e^{7x^2}}.$$

$iii)$

$$h(x) = 3sen\ x \cdot (\cos 2x)^2.$$

$$h'(x) = 3 \cdot \{\cos x \cdot (\cos 2x)^2 + sen\ x \cdot 2 \cdot \cos(2x) \cdot 2 \cdot [-sen\ (2x)]\} =$$

$$= 3\cos(2x) \cdot [\cos x \cdot \cos(2x) - 4 \cdot sen\ x \cdot sen\ (2x)] =$$

$$= 3\cos(2x) \cdot [\cos x \cdot \cos(2x) - 4 \cdot sen\ x \cdot 2 \cdot sen\ x \cdot \cos x] =$$

$$= 3\cos x \cdot \cos(2x) \cdot [\cos(2x) - 8 \cdot sen^2 x] =$$

$$= 3\cos x \cdot \cos(2x) \cdot (cos^2 x - sen^2 x - 8 \cdot sen^2 x).$$

$$\underline{h'(x) = 3\cos \mathrm{x} \cdot \cos(2x) \cdot (cos^2 x - 9sen^2 x)}.$$

****

3º) La siguiente tabla recoge la distribución por sectores de las 750 empresas existentes en Pamplona y el porcentaje de las mismas que ha reducido su plantilla en 2.015:

Sector	*Nº total de empresas*	*% de empresa que reducen plantilla*
Primario	120	15
Industria	330	20
Servicios	300	40

i) ¿Cuál es la probabilidad de que una empresa elegida al azar haya reducido su plantilla en 2.015 y pertenezca al sector primario?

ii) Si se sabe que una empresa no redujo su plantilla en 2.015, ¿cuál es la probabilidad de que la empresa pertenezca al sector servicios?

La probabilidad de reducir plantilla en 2.015 de las empresas de los sectores primario, industria y servicios son, respectivamente:

$$P(P)=\frac{15}{120}=\frac{1}{8};\ \ P(I)=\frac{20}{330}=\frac{2}{11};\ \ P(S)=\frac{40}{300}=\frac{2}{15}.$$

i)

$$P=\frac{P(S)}{P(P)+P(I)+P(S)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{8}+\frac{2}{11}+\frac{2}{15}}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{11\cdot 15+2\cdot 8\cdot 15+2\cdot 8\cdot 11}{8\cdot 11\cdot 15}}=\frac{2\cdot 8\cdot 11}{165+240+176}=\underline{\frac{167}{581}}.$$

ii)

La probabilidad de no reducir plantilla en 2.015 de las empresas de los sectores primario, industria y servicios son, respectivamente:

$$P(\overline{P})=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8};\ \ P(\overline{I})=1-\frac{2}{11}=\frac{9}{11};\ \ P(\overline{S})=1-\frac{2}{15}=\frac{13}{15}.$$

$$P=\frac{P(\overline{S})}{P(\overline{P})+P(\overline{I})+P(\overline{S})}=\frac{\frac{13}{15}}{\frac{7}{8}+\frac{9}{11}+\frac{13}{15}}=\frac{\frac{13}{15}}{\frac{7\cdot 11\cdot 15+9\cdot 8\cdot 15+13\cdot 8\cdot 11}{8\cdot 11\cdot 15}}=\frac{13\cdot 8\cdot 11}{1.155+1.080+1.144}=\underline{\frac{1.144}{3.379}}.$$

****