PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

JULIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B).

PRUEBA A

1º) En una tienda por comprar 3 videojuegos, 1 auricular inalámbrico y 2 memorias USB nos cobran 230 euros. Si volvemos a la tienda y compramos 2 videojuegos, una memoria USB y devolvemos el auricular, nos cobran 60 euros.

i) Plantee y resuelva el sistema de ecuaciones.

ii) Si nos cobran 70 euros por 1 videojuego y 1 memoria USB, plantee y resuelva el nuevo sistema de ecuaciones.

----

i)

Sean x, y, z el precio de un videojuego, un auricular inalámbrico y una memoria USB, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\underline{\left.\begin{array}{r} 3x + y + 2z = 230 \\ 2x + y - z = 60 \end{array}\right\}}.$$

Se trata de un sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas cuyas matrices de coeficientes y ampliada son $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 230 \\ 2 & 1 & -1 & 60 \end{pmatrix}$.

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.$$

Para su resolución hacemos $z = \lambda$:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + y + 2z = 230 \\ 2x + y - z = 60 \end{array}\right\} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x + y = 230 - 2\lambda \\ 2x + y = \lambda + 60 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3x + y = 230 - 2\lambda \\ -2x - y = -\lambda - 60 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 170 - 3\lambda;\ \ y = \lambda + 60 - 340 + 6\lambda = -280 + 6\lambda.$

$$\underline{Solución: x = 170 - 3\lambda,\ \ y = -280 + 6\lambda,\ \ z = \lambda,\ \ \forall\lambda \in R.}$$

$b)$

Es nuevo sistema es $\left.\begin{array}{r} 3x + y + 2z = 230 \\ 2x + y - z = 60 \\ x + z = 70 \end{array}\right\}$

El rango de la nueva matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 - 2 - 2 = -2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A = 3.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius.

$Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg \Rightarrow S.C.D.$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 230 & 1 & 2 \\ 60 & 1 & -1 \\ 70 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{230-70-140-60}{-2} = \frac{230-270}{-2} = \frac{-40}{-2} = 20.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 230 & 2 \\ 2 & 60 & -1 \\ 1 & 70 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{180+280-230-120+210-460}{-2} = \frac{670-810}{-2} = \frac{-140}{-2} = 70.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 230 \\ 2 & 1 & 60 \\ 1 & 0 & 70 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{210+60-230-140}{-2} = \frac{270-370}{-2} = \frac{-100}{-2} = 50.$$

$$\underline{Un\ videojuego, un\ auricular\ y\ una\ memoria\ valen\ 20, 70\ y\ 50\ euros\ respect.}$$

****

2º) $i)$ Calcule el valor del parámetro a de la función $f(x) = \frac{ax^2}{x+1}$, sabiendo que $y = 3x - 1$ es la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 1$.

$ii)$ Calcule las asíntotas de la función $f(x)$.

$iii)$ Calcule los máximos y mínimos de la función $f(x)$.

$i)$

La pendiente de la recta tangente $y = 3x - 1$ es $m = 3$.

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto:

$$f'(x) = \frac{2ax\cdot(x+1) - ax^2\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2ax^2 + 2ax - ax^2}{(x+1)^2} = \frac{ax^2 + 2ax}{(x+1)^2} = \frac{ax(x+2)}{(x+1)^2}.$$

$$m = f'(1) = 3 \Rightarrow \frac{a\cdot 1\cdot(1+2)}{(1+1)^2} = 3;\ \ \frac{3a}{4} = 3 \Rightarrow \underline{a = 4}.$$

La función resulta: $f(x) = \frac{4x^2}{x+1}$.

$ii)$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2}{x+1} = \infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x + 1 = 0;\ \ x = -1 \Rightarrow \underline{La\ recta\ x = -1\ es\ asíntota\ vertical}.$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ y } n = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right].$$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x^2}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2}{x^2+x} = 4.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - mx\right] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x^2}{x+1} - 4x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2 - 4x^2 - 4x}{4x+6} =$$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{-4x+1}{4x+6} = -4.$

$$\underline{La\ recta\ y = 4x - 4\ es\ asíntota\ oblicua\ de\ la\ función.}$$

$iii)$

Una función tiene un extremo relativo (máximo o mínimo) para los valores de x que anulan su primera derivada.

$$f'(x) = \frac{4x^2+8x}{(x+1)^2} = \frac{4x(x+2)}{(x+1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4x(x+2)}{(x+1)^2} = 0;\ \ 4x(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trate de un máximo relativo y, si es positiva, de un mínimo relativo.

$$f''(x) = \frac{(8x+8)(x+1)^2-4x(x+2)[2\cdot(x+1)\cdot 1]}{(x+1)^4} = \frac{(8x+8)(x+1)-8x(x+2)}{(x+1)^3} =$$

$$= \frac{8x^2+8x+8x+8-8x^2-16x}{(x+1)^3} = \frac{8}{(x+1)^3}.$$

$$f''(0) = \frac{8}{(0+1)^3} = 8 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow \underline{Mínimo \Rightarrow O(0,0)}.$$

$$f''(-2) = \frac{8}{(-2+1)^3} = -8 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -2.$$

$$f(-2) = \frac{4\cdot(-2)^2}{-2+1} = \frac{16}{-1} = -16 \Rightarrow \underline{Máximo \Rightarrow A(-2,-16)}.$$

****

3º) La velocidad a la que circulan los vehículos por un determinado tramo de carretera sigue una distribución normal. A partir de 100 mediciones tomadas por un radar colocado en dicha carretera, se ha calculado el siguiente intervalo de confianza al 95 % para la velocidad media (km/h) a la que circulan los automóviles por ese tramo: $(80{,}92; 89{,}94)$.

i) Calcule la varianza poblacional y calcule la velocidad media de la muestra de 100 mediciones tomadas por el radar.

ii) Calcule un intervalo de confianza al 97 % para la velocidad media de los coches que circulan por ese tramo de carretera.
(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

----

a)

$$\overline{x} = \frac{89{,}94+80{,}92}{2} = \frac{170{,}86}{2} = \underline{85{,}43}.$$

$$\underline{La\ velocidad\ media\ es\ de\ 85{,}43\ km/h}.$$

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1-\alpha = 0{,}95 \ \rightarrow\ \alpha = 1-0{,}95 = 0{,}05 \ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$$
$$1-0{,}025 = 0{,}9750 \ \rightarrow z = 1{,}96).$$

$$E = \frac{89{,}94-80{,}92}{2} = \frac{9{,}02}{2} = 4{,}51.$$

Datos: $n = 100;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96;\ \ E = 4{,}51.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow\ \sigma = \frac{E\cdot\sqrt{n}}{z_{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{4{,}51\cdot\sqrt{100}}{1{,}96} = \frac{45{,}1}{1{,}96} = 23{,}01.$

$$\underline{La\ varianza\ poblacional\ es\ \sigma = 23{,}01}.$$

b)

Para un nivel de confianza del 97 % es:

$$1-\alpha = 0{,}97 \ \rightarrow\ \alpha = 1-0{,}97 = 0{,}03 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}015} = 2{,}17.$$
$$1-0{,}015 = 0{,}9850 \ \rightarrow z = 2{,}17).$$

Datos: $n = 100;\ \ \overline{x} = 85{,}43;\ \sigma = 23{,}01;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}17.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(85{,}43 - 2{,}17 \cdot \frac{23{,}01}{\sqrt{100}};\ 85{,}43 + 2{,}17 \cdot \frac{23{,}01}{\sqrt{100}}\right);$$

$$(85{,}43 - 2{,}17 \cdot 2{,}301;\ 85{,}43 + 2{,}17 \cdot 2{,}301);\ (85{,}43 - 4{,}9932;\ 85{,}43 + 4{,}9932).$$

$$\underline{I.C._{97\,\%} = (80{,}4368;\ 90{,}4232).}$$

****

OPCIÓN B

1º) Los estudiantes de bachillerato de un centro escolar han recolectado 6.000 euros que quieren destinar a proyectos benéficos. Han seleccionado dos proyectos: el proyecto P1 colabora en la vacunación de niños y el proyecto P2 proporciona suplementos nutricionales a niños con alimentación incompleta. Por cada euro invertido en el proyecto P1 se podrá vacunar a tres niños y por cada euro invertido en el proyecto P2 se proporciona suplementos nutricionales a cinco niños. Los estudiantes deciden repartir el dinero en los proyectos de forma que se done para vacunas no más del doble de la donación para suplementos nutricionales. Además, quieren donar al menos 1.500 euros al proyecto de vacunación y no más de 3.500 euros al proyecto de alimentación. Determine cuántos euros deberán invertir en cada proyecto si se desea maximizar el número de niños beneficiados.

i) Plantee el problema. ii) Resuélvalo gráficamente.

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si se elimina la restricción de no invertir más de 3.500 euros en suplementos nutricionales.

----

i)

Sean x e y el número de niños vacunados y que se les aplican suplementos nutricionales, respectivamente.

El sistema de inecuaciones es: $\left.\begin{array}{r} 3x+5y\le 6.000 \\ x\le 2y \\ x\ge \frac{1.500}{3};\ \ y\le\frac{3.500}{5}\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} 3x+5y\le 6.000 \\ x-2y\le 0 \\ \underline{x\ge 500;\ y\le 700}\end{array}\right\}.$

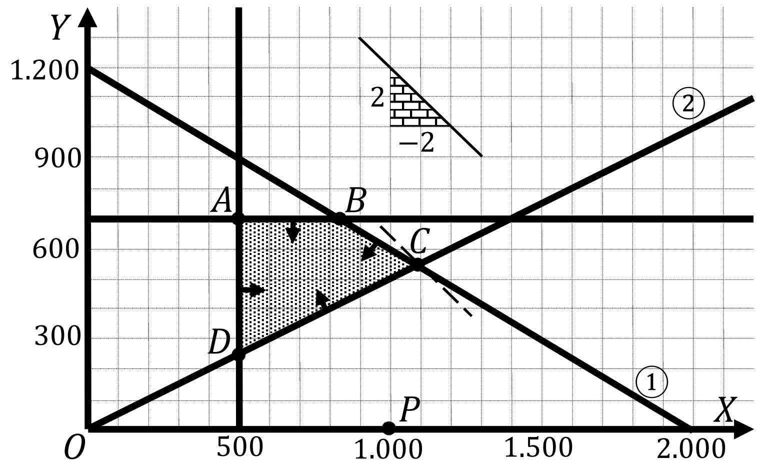
ii)

$(1) \Rightarrow 3x+5y\le 6.000 \Rightarrow y\le\frac{6.000-3x}{5} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	2.000	0
y	0	1.200

$(2) \Rightarrow x-2y\le 0 \Rightarrow y\ge\frac{x}{2} \Rightarrow P(1.000,0)\rightarrow No.$

x	0	2.000
y	0	1.000



La región factible es la zona que aparece sombreada en la figura adjunta.

La función de objetivos es $f(x, y) = x + y$.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 500 \\ y = 700 \end{array}\right\} \Rightarrow A(500, 700).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x + 5y = 6.000 \\ y = 700 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x + 3.500 = 6.000;\;\; 3x = 2.500;\;\; x = \frac{2.500}{3} =$$

$$= 833{,}33 \Rightarrow B(833{,}33;\; 700).$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x + 5y = 6.000 \\ x = 2y \end{array}\right\} \Rightarrow 6y + 5y = 6.000;\;\; 11y = 6.000;\;\; y = \frac{6.000}{11} =$$

$$= 545{,}45;\;\; x = 1.090{,}91 \Rightarrow B(1.090{,}91;\; 545{,}45).$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 500 \\ x = 2y \end{array}\right\} \Rightarrow D(500, 250).$$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(500, 700) = 500 + 700 = 1.200.$$

$$B \Rightarrow f(833{,}33;\; 700) = 833{,}33 + 500 = 1.333{,}33.$$

$$C \Rightarrow f(1.090{,}91;\; 545{,}45) = 1.090{,}91 + 545{,}45 = 1.636{,}36.$$

$$D \Rightarrow f(500, 250) = 500 + 250 = 750.$$

El valor máximo se produce en el punto $C(1.090{,}91;\; 545{,}45)$.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = x + y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{1}x = -\frac{2}{2}x \Rightarrow m = -\frac{2}{2}.$$

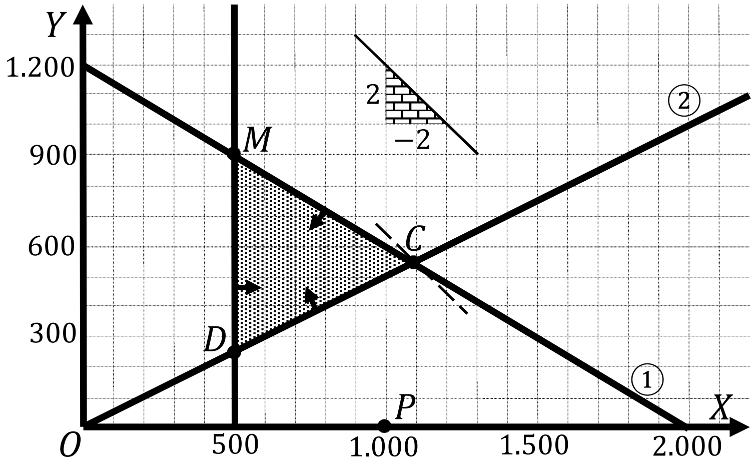
$$\underline{El\ máximo\ número\ de\ niños\ beneficiados\ es\ 1.636.}$$

$iii)$

El nuevo sistema de inecuaciones resultante es $\left.\begin{array}{r} 3x + 5y \le 6.000 \\ x - 2y \le 0 \\ x \ge 500 \end{array}\right\}.$

La región factible es la zona que aparece sombreada en la figura siguiente.

La función de objetivos sigue siendo la misma: $f(x, y) = x + y$.



Los nuevos vértices de la sección factible son los siguientes:

Los puntos D y C se mantienen; desaparecen los puntos A y B y aparece el nuevo vértice M.

$$M \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 500 \\ 3x + 5y = 6.000 \end{array}\right\} \Rightarrow 1.500 + 5y = 6.000;\;\; 300 + y = 1.200;$$

$$y = 900 \Rightarrow M(500; 1.200).$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x + 5y = 6.000 \\ x = 2y \end{array}\right\} \Rightarrow 6y + 5y = 6.000;\;\; 11y = 6.000;\;\; y = \frac{6.000}{11} =$$

$$= 545{,}45;\;\; x = 1.090{,}91 \Rightarrow B(1.090{,}91;\; 545{,}45).$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 500 \\ x = 2y \end{array}\right\} \Rightarrow D(500, 250).$$

El valor máximo se sigue produciendo en el punto $C(1.090{,}91;\; 545{,}45)$.

$\underline{\textit{El máximo número de niños beneficiados sigue siendo de } 1.636.}$

****

2º) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x & si \;\; x < -1 \\ 2x^3 + 4x^2 - 3 & si - 1 \leq x < 2 \\ \frac{5x}{x^2+1} & si \;\; x \geq 2 \end{cases}$.

i) Estudie la continuidad de la función.

ii) Calcule $f'(1)$ aplicando la definición de derivada.

iii) Calcule $I = \int_3^4 f(x) \cdot dx$.

----

i)

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = -1 \; y \; x = 2$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

Para $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1} x = -1 \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1} (2x^3 + 4x^2 - 3) = -2 + 4 - 3 = -1 = f(-1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = f(1).$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ para\ x = -1.}$$

$$Para\ x = 2 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} (2x^3 + 4x^2 - 3) = 16 + 16 - 3 = 29 \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{5x}{x^2+1} = \frac{10}{5} = 2 = f(2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2).$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ no\ es\ continua\ para\ x = 2.}$$

ii)

Para $x = 1$ la función es $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[2 \cdot (x+h)^3 + 4 \cdot (x+h)^2 - 3] - (2x^3 + 4x^2 - 3)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\{2 \cdot (x+h)^2 [(x+h) + 2] - 3\} - (2x^3 + 4x^2 - 3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[2 \cdot (x^2 + 2hx + h^2)(x + h + 2) - 3] - (2x^3 + 4x^2 - 3)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 \cdot (x^3 + hx^2 + 2x^2 + 2hx^2 + 2h^2x + 4hx + h^2x + h^3 + 2h^2) - 3 - (2x^3 + 4x^2 - 3)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2x^3+6hx^2+4x^2+6h^2x+8hx+2h^3+4h^2-3-2x^3-4x^2+3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6hx^2+6h^2x+8hx+2h^3+4h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h(3x^2+3hx+4x+h^2+2h)}{h} =$$

$$= 2 \cdot \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3hx + 4x + h^2 + 2h) = 2 \cdot (3x^2 + 4x) = f'(x).$$

$$f'(-1) = 2 \cdot [3 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1)] = 2 \cdot (3 - 4) = -2.$$

$$\underline{f'(-1) = -2}.$$

$iii)$

$$I = \int_3^4 f(x) \cdot dx = \int_3^4 \frac{5x}{x^2+1} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c|c} x^2 + 1 = 2 & \\ 2xdx = dt & \begin{array}{l} x = 4 \to t = 17 \\ x = 3 \to t = 10 \end{array} \\ 5xdx = \frac{5}{2} dt & \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{10}^{17} \frac{1}{t} \cdot dt = [Lt]_{10}^{17} = L17 - L10 = L\frac{17}{10} = L1{,}7.$$

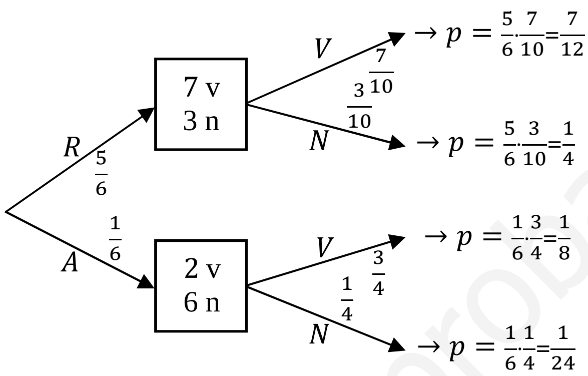
$$\underline{I = \int_3^4 f(x) \cdot dx = L1{,}7.}$$

****

3º) Dos estudiantes construyen un dado con 5 caras rojas y una cara azul, colocan 7 bolas verdes y 3 bolas negras en una caja A y colocan 6 bolas negras y 2 bolas verdes en una caja B. Se plantean el siguientes juego: lanzar el dado y sacar una bola de la caja A si la cara es roja y una bola de la caja B si la cara es azul. Lanzan el dado y sacan una bola. Calcule:

i) La probabilidad de que la bola sea verde.

ii) La probabilidad de que la cara del dado sea azul, sabiendo que la bola no es verde.



i)

$$P = P(V) = P(R \cap V) + P(A \cap V) = P(R) \cdot P(V/R) + P(A) \cdot P(V/A) =$$

$$= \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{12} + \frac{1}{8} = \frac{14+3}{24} = \underline{\frac{17}{24} = 0{,}7083.}$$

ii)

$$P = P\left(A/\overline{V}\right) = \frac{P\left(A \cap \overline{V}\right)}{P\left(\overline{V}\right)} = \frac{P(A) \cdot P\left(\overline{V}/A\right)}{1 - P(V)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4}}{1 - \frac{17}{24}} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{7}{24}} = \underline{\frac{1}{7} = 0{,}1429.}$$

****