PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

JULIO – 2019

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B).

PRUEBA A

1º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\ y\ C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, responde a las siguientes preguntas:

$i)$ Calcule A^2-B^2. $ii)$ Calcule $(A-B)(A+B)$. $iii)$ Calcule $C^{-1}\cdot C^t-I$.

$i)$

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 & -5 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{A^2-B^2=\begin{pmatrix} 15 & -5 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}=-5\cdot\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

$ii)$

$$(A-B)(A+B)=\left[\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 & 0 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{(A-B)(A+B)=\begin{pmatrix} 15 & 0 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}=-5\cdot\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Los apartados $i)\ y\ ii)$ justifican la no propiedad conmutativa, en general, del producto de matrices.

$iii)$

La inversa de C se obtiene por el método de Gauss-Jordan.

$$(C/I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - 3F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_2 \to -\tfrac{1}{2}F_2\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 - 2F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$C^{-1} \cdot C^t - I = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - I = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - I =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\underline{C^{-1} \cdot C^t - I = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.}$$

****

2º) Dada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 24$, calcule:

$i)$ Intervalos de concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

$ii)$ La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = -2$.

$i)$

Un función es cóncava $(\cap)$ o convexa $(\cup)$ cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

$f'(x) = 3x^2 - 12x.$ $\qquad$ $f''(x) = 6x - 12.$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 12 = 0;\; 6(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2.$

Como quiera que $f(x)$ es continua y derivable en R, por ser polinómica, la raíz de su segunda derivada divide su dominio en los intervalos $(-\infty, 2)$ y $(2, +\infty)$ en los cuales la segunda derivadas es positiva o negativa de forma alternativa. Considerando, por ejemplo, el valor $x = 0 \in (-\infty, 2)$ es $f''(0) = -12 < 0 \Rightarrow$ Cóncava.

$$\underline{Concavidad\ (\cap): f''(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty, 2).}$$

$$\underline{Convexidad\ (\cup): f''(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon(2, +\infty).}$$

Una función tiene un punto de inflexión cuando se anula su segunda derivada y es distinta de cero su tercera derivada para los valores que anulan la segunda.

$f'''(x) = 6 \neq 0 \Rightarrow Punto\ de\ inflexión\ para\ x = 2.$

$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 24 = 8 - 24 + 24 = 8 \Rightarrow \underline{P.I. \to A(2, 8)}.$

$ii)$

La pendiente de la tangente a la gráfica de una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$f'(x) = 3x^2 - 12x.$

$m = f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) = 12 + 24 = 36.$

El punto de tangencia es el siguiente:

$f(-2) = (-2)^3 - 6 \cdot (-2)^2 + 24 = -8 - 24 + 24 = -8 \Rightarrow T(-2, -8).$

La ecuación de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es la siguiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$.

$$y + 8 = 36(x + 2) = 36x + 72 \;\Rightarrow\; \underline{t \equiv 36x - y + 64 = 0}.$$

****

3º) La duración de un tipo de batería para teléfonos móviles es una variable que sigue una distribución normal con desviación típica de tres meses. Se toma una muestra aleatoria de diez baterías y se miden las siguientes duraciones (en meses):

15,7; 7,2; 21,6; 19,4; 14,5; 17,3; 15,2; 23,4; 21,5 y 15, 8.

i) Construya un intervalo de confianza para la duración media de este tipo de baterías, con un nivel de confianza del 98 %.

ii) Determina cuál debe ser el tamaño de la muestra para que el error máximo se reduzca a la mitad. (Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas).

----

i)

$$\overline{x} = \frac{15{,}7+7{,}2+21{,}6+19{,}4+14{,}5+17{,}3+15{,}2+23{,}4+21{,}5+15{,}8}{10} = \frac{171{,}6}{10} = 17{,}16.$$

Para un nivel de confianza del 98 % es:

$1 - \alpha = 0{,}98 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0{,}98 = 0{,}02 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}01} = 2{,}33.$
$(1 - 0{,}01 = 0{,}9900 \ \rightarrow z = 2{,}33).$

Datos: $n = 10;\ \overline{x} = 17{,}16;\ \sigma = 3;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}33.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(17{,}16 - 2{,}33 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}};\ 17{,}16 + 2{,}33 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}\right);$

$(17{,}16 - 2{,}33 \cdot 0{,}9487;\ 17{,}16 + 2{,}33 \cdot 0{,}9487);$

$(17{,}16 - 2{,}2104;\ 17{,}16 + 2{,}2104).$

$$\underline{I.C._{98\,\%} = (14{,}9496;\ \ 19{,}3704).}$$

b)

$$E = \frac{19{,}3704 - 14{,}9496}{2} = \frac{4{,}4208}{2} = 2{,}2104 \Rightarrow E' = \frac{E}{2} = \frac{2{,}2104}{2} = 1{,}1052.$$

Datos: $\sigma = 3;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}33;\ E = 1{,}1052.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow \ \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2{,}33 \cdot \frac{3}{1{,}1052}\right)^2 =$

$= (2{,}33 \cdot 2{,}7144)^2 = 6{,}3246^2 = 40{,}00.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 40\ baterías}.$

****

OPCIÓN B

1º) Una empresa tiene dos plantas (P1 y P2) en las que produce bobinas de acero de tres anchuras (A1, A2, A3). La planta P1 tiene maquinaria capaz de fabricar cada hora 10 bobinas de anchura A1, 10 bobinas de anchura A2 y 20 bobinas de anchura A3. La planta P2 tiene capacidad para fabricar cada hora 10, 50 y 10 bobinas de cada tipo de anchura, respectivamente. El coste de operación por hora es de 70 euros en la planta P1 y de 120 euros en la planta P2. La empresa tiene que suministrar cada día al menos 180 bobinas de anchura A1, al menos 300 bobinas de anchura A2 y al menos 230 bobinas de anchura A3. ¿Cuántas horas diarias deberá trabajar cada planta para atender la demanda si se desea minimizar el coste total de la operación?

i) Plantee el problema $\qquad\qquad$ ii) Resuélvalo gráficamente.

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si la demanda de bobinas de anchura A1 se redujera a la mitad.

----

i)

Sean x e y el número de horas diarias que trabajan las plantas P1 y P2, respectivamente.

Las restricciones son: $\left.\begin{array}{r} 10x+10y\geq 180 \\ 10x+50y\geq 300 \\ 20x+10y\geq 230 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} x+y\geq 18 \\ x+5y\geq 30 \\ 2x+y\geq 23 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}.$

① $\Rightarrow x+y\geq 18 \Rightarrow y\geq 18-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow No.$

x	18	0
y	0	18

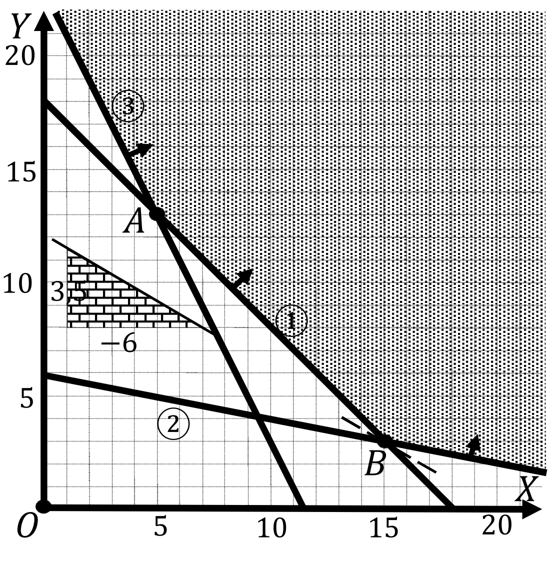
② $\Rightarrow x+5y\geq 30 \Rightarrow y\geq \frac{30-x}{5} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow No.$

x	10	20
y	4	2

③ $\Rightarrow 2x+y\geq 23 \Rightarrow y\geq 23-2x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow No.$

x	10	5
y	3	13

La zona factible, que es abierta, es la que aparece sombreada en la figura.



ii)

Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=18 \\ 2x+y=23 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} -x-y=-18 \\ 2x+y=23 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x=5;\ \ y=13 \Rightarrow A(5,13).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=18 \\ x+5y=30 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} -x-y=-18 \\ x+5y=30 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4y=12;\ \ y=3;\ \ x=15 \Rightarrow B(15,3).$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y)=70x+120y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(5,13)=70\cdot 5+120\cdot 13=350+1.560=1.910.$

$B \Rightarrow f(15,3)=70\cdot 15+120\cdot 3=1.050+360=1.410.$

El mínimo se produce en el punto $B(15,3)$.

También se hubiera obtenido el punto $B(15,3)$ por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y)=70x+120y=0 \Rightarrow y=-\frac{70}{120}x=-\frac{7}{12}x=-\frac{3{,}5}{6}x \Rightarrow m=-\frac{3{,}5}{6}.$$

$\underline{La\ planta\ P1\ debe\ trabajar\ 15\ horas\ diarias\ y\ la\ P2\ 3\ horas\ diarias}.$

$\underline{El\ coste\ mínimo\ es\ de\ 1.410\ euros\ diarios}.$

$iii)$

Si la demanda de bobinas de anchura A1 se redujera a la mitad el problema resulta el siguiente:

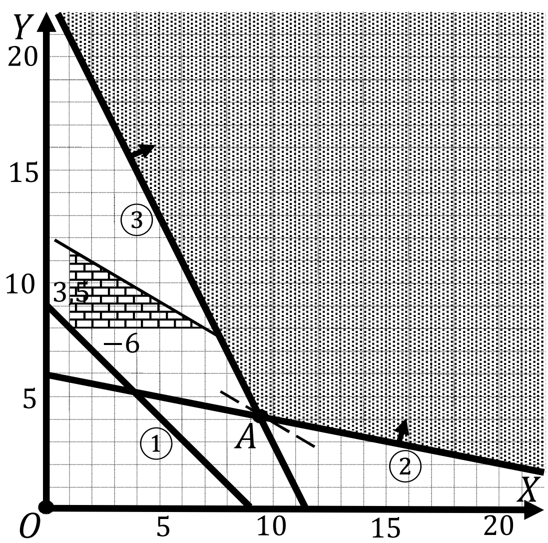
Las restricciones son: $\left.\begin{array}{r} 10x+10y\geq 90 \\ 10x+50y\geq 300 \\ 20x+10y\geq 230 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y\geq 9 \\ x+5y\geq 30 \\ 2x+y\geq 23 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}.$

① $\Rightarrow x+y\geq 9 \Rightarrow y\geq 9-x \Rightarrow O(0,0)\to No.$

x	9	0
y	0	9

El resto continua igual.

La nueva zona factible, que es abierta, es la que aparece sombreada en la figura.



El único vértice de la nueva zona factible es el siguiente:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+5y=30 \\ 2x+y=23 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x+10y=60 \\ -2x-y=-23 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 9y=37;\ \ y=\frac{37}{9};\ \ x+\frac{185}{9}=30;$

$9x+185=270;\ \ 9x=85;\ \ x=\frac{85}{9} \Rightarrow A\left(\frac{85}{9},\ \frac{37}{9}\right).$

La función de objetivos sigue siendo la misma: $f(x, y) = 70x + 120y$.

El valor de la función de objetivos en el vértice es el siguiente:

$$A \Rightarrow f\left(\frac{85}{9},\ \frac{37}{9}\right) = 70 \cdot \frac{85}{9} + 120 \cdot \frac{37}{9} = \frac{5.950+4.440}{9} = \frac{10.390}{9} = 1.154{,}44.$$

El mínimo se produce en el vértice $A\left(\frac{85}{9},\ \frac{37}{9}\right)$.

También se hubiera obtenido el punto $A \Rightarrow f\left(\frac{85}{9},\ \frac{37}{9}\right)$ por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$\frac{85}{9} = 9{,}4444\ horas = 9\ horas + 0{,}4444 \cdot 60 = 9\ horas\ y\ 27\ minutos.$$

$$\frac{37}{9} = 4{,}1111\ horas = 4\ horas + 0{,}1111 \cdot 60 = 4\ horas\ y\ 7\ minutos.$$

$$\underline{P1\ debe\ trabajar\ 9\ horas\ 27\ minutos\ y\ P2, 4\ horas\ y\ 7\ minutos\ diarios.}$$

$$\underline{El\ coste\ mínimo\ es\ de\ 1.154{,}44\ euros\ diarios.}$$

Nótese que la nueva condición hace que la anchura A1 no influye en la nueva zona factible

****

2º) i) Dibuje el recinto comprendido entre las curvas $y = x^3 - 4x, y = -x$ y las rectas $x = 1$ y $x = -1$.

ii) Calcule el área de dicho recinto.

----

i)

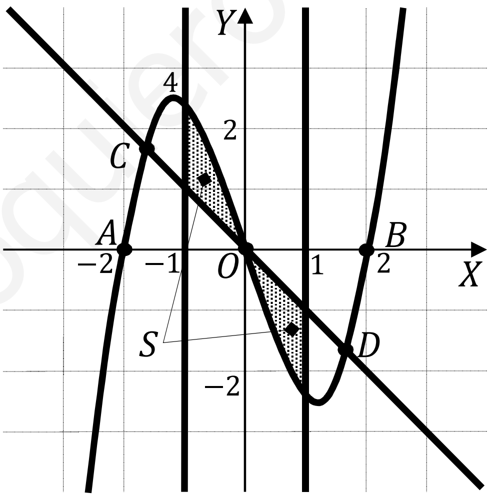
Nótese que las dos curvas son simétricas con respecto al origen, punto al que contienen ambas.

La curva $y = x^3 - 4x$ corta al eje de abscisas en los puntos siguientes:

$$y = 0 \Rightarrow x^3 - 4x = 0;\ \ x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \rightarrow A(-2, 0) \\ x_2 = 0 \rightarrow O(0, 0) \\ x_3 = 2 \rightarrow B(2, 0) \end{cases}.$$

Los puntos de corte de las curvas tienen como abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$x^3 - 4x = -x;\ x^3 - 3x = 0;\ \ x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{3} \rightarrow C\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right) \\ x_2 = 0 \rightarrow O(0, 0) \\ x_3 = \sqrt{3} \rightarrow D\left(\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right) \end{cases}.$$



La representación gráfica de la situación se expresa en la figura adjunta.

ii)

Teniendo en cuenta la simetría de las funciones, el área del recinto es la siguiente:

$$S = 2\int_0^1 [-x - (x^3 - 4x)] \cdot dx = 2\int_0^1 (-x^3 + 3x) \cdot dx = 2 \cdot \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= 2 \cdot \left[\left(-\frac{1^4}{4} + \frac{3 \cdot 1^2}{2}\right) - 0\right] = -\frac{1}{2} + 3 = \underline{\frac{5}{2}\ u^2 = 2{,}5\ u^2}.$$

****

3º) Según un estudio reciente, el 80 % de los jóvenes españoles entre 18 y 23 años estudia, el 40 % tiene contrato laboral y el 25 simultanea estudios y trabajo. Se selecciona un joven al azar:

i) Calcule la probabilidad de que únicamente estudie.

ii) Calcule la probabilidad de que no estudie ni trabaje.

iii) Sabiendo que no estudia, calcule la probabilidad de que trabaje.
(Escriba las fórmulas necesarias).

$$Datos: \; P(E)=0{,}8; \; P(T)=0{,}4; \; P(E\cap T)=0{,}25.$$

i)

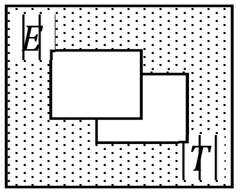
$$P=P\left(E\cap \overline{T}\right)=P(E)-P(E\cap T)=0{,}8-0{,}25=\underline{0{,}55}.$$

ii)

$$P(E\cup T)=P(E)+P(T)-P(E\cap T)=$$

$$=0{,}8+0{,}4-0{,}25=0{,}95.$$

$$P=P\left(\overline{E}\cap \overline{T}\right)=1-P(E\cup T)=1-0{,}95=\underline{0{,}05}.$$

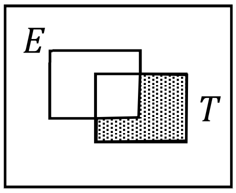


$\overline{E}\cap\overline{T}=1-(E\cup T)$

iii)

$$P\left(T/\overline{E}\right)=\frac{P\left(T\cap\overline{E}\right)}{P\left(\overline{E}\right)}=\frac{P(T)-P(E\cap T)}{1-P(E)}=\frac{0{,}4-0{,}25}{1-0{,}8}=$$

$$=\frac{0{,}15}{0{,}2}=\underline{0{,}75}.$$



$T\cap\overline{E}=T-(E\cap T)$

****