PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

SEPTIEMBRE – 2000

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se contestará a los tres ejercicios de una de las dos opciones (A o B) propuestas.
No se debe contestar a unos ejercicios de una opción y otros de otra opción.
La evaluación se hará atendiendo a las respuestas a los ejercicios de una única opción.
La puntuación máxima es de 10 puntos.

OPCIÓN A

1º) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y $n \geq 2$ un número natural, encontrar A^n.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & -2+2 \\ 6-6 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = I \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A^n = I}}$$

****

2º) Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas del espacio:

$$r \equiv \frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{6} = \frac{z-1}{-9} \;\; y \;\; s \equiv \frac{x-4}{6} = \frac{y+6}{-2} = \frac{z+3}{2}.$$

Los vectores directores de las rectas son $\overrightarrow{v_r} = (5,\ 6,\ -9)$ y $\overrightarrow{v_s} = (6,\ -2,\ 2)$. Como se observa fácilmente, son linealmente independientes, por lo tanto las rectas no son paralelas, es decir, se cortan o se cruzan.

Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente: consideramos el vector $\overrightarrow{w}$ de origen $A(2,\ 3,\ 1) \in r$ y extremo $B(4,\ -6,\ -3) \in s$.

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = B - A = (4,\ -6,\ -3) - (2,\ 3,\ 1) = (2,\ -9,\ -4).$$

Ahora determinamos el rango de los vectores $\left[\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right]$. Si el rango es 2 significa que los tres vectores están situados en un mismo plano, lo cual implica que las rectas también están situadas en el mismo plano, por lo tanto se cortan; por el contrario, si el rango de los vectores $\left[\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right]$ es 3, los vectores no están en un mismo plano y, en consecuencia, las rectas se cruzan.

$$Rang\ \left[\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right] \Rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 6 & -9 \\ 6 & -2 & 2 \\ 2 & -9 & -4 \end{vmatrix} = 40 + 486 + 24 - 36 + 90 + 144 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{Rang\ \left[\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right] = 3}$$

<u>Las rectas r y s se cruzan</u>

****

3º) Encontrar el máximo y el mínimo de la función $f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x<1 \\ \frac{3-x}{2} & si \quad x \geq 1 \end{cases}$ en el intervalo $\left[-\frac{1}{2},\ 2\right]$.

El dominio de f(x) es R.

El crecimiento y decrecimiento de la función f(x) en el intervalo $(-\infty,\ 1)$ es el siguiente:

$$f(x)=x^2 \;\;;;\;\; f'(x)=2x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x<0 \;\Rightarrow\; f'(x)<0 \;\Rightarrow\; \underline{Decreciente} \\ x>0 \;\Rightarrow\; f'(x)>0 \;\Rightarrow\; \underline{Creciente} \end{cases}$$

En el intervalo $(-\infty,\ 1) \Rightarrow \begin{cases} \underline{(-\infty,\ 0) \Rightarrow Decreciente} \\ \underline{(0,\ 1) \Rightarrow Creciente} \end{cases} \Rightarrow \underline{M\acute{a}ximo \quad para \quad x=1}$

Para $f(x)=x^2 \Rightarrow \begin{cases} \underline{M\acute{a}ximo \rightarrow A(1,\ 1)} \\ \underline{M\acute{\imath}nimo \rightarrow para \quad x=-\infty \Rightarrow No \quad tiene} \end{cases}$

El crecimiento y decrecimiento de la función f(x) en el intervalo $(1,\ \infty)$ es el siguiente:

$$f(x)=\frac{3-x}{2} \;\;;;\;\; f'(x)=-\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad f'(x)<0,\ \forall x \in (1,\ \infty) \Rightarrow \underline{Decreciente}$$

En el intervalo $(1,\ \infty)$ la función es monótona decreciente, por lo tanto:

Para $f(x)=\frac{3-x}{2} \Rightarrow \begin{cases} \underline{M\acute{a}ximo \rightarrow A(1,\ 1)} \\ \underline{M\acute{\imath}nimo \rightarrow para \quad x=\infty \Rightarrow No \quad tiene} \end{cases}$

Como puede observarse, se trata de una función continua en su dominio.

<u>Máximo: A(1, 1). Mínimo: no tiene</u>

****

1º) Calcular el determinante de la matriz $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-d\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 4 & 5 \end{vmatrix}=-c\cdot d\cdot\begin{vmatrix} 2 & a \\ b & 0 \end{vmatrix}=\underline{\underline{a\cdot b\cdot c\cdot d=|M|}}$$

****

2º) Calcular la derivada de la función $f(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$.

$$f(x)=\frac{1}{u} \Rightarrow f'(x)=-\frac{u'}{u^2} \qquad (*) \qquad \left\{\begin{array}{l} u=x+z \Rightarrow \underline{u'=1+z'} \qquad (**) \\ \\ z=\sqrt{x^2+1} \Rightarrow z'=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2+1} \\ \\ \textit{Sustituyendo el valor de } z' \textit{ en } (**): \\ \\ u'=1+\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}=\dfrac{x^2+1+x\sqrt{x^2+1}}{x^2+1} \end{array}\right.$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido para u’ obtenemos el valor de f’(x):

$$f(x)=\frac{1}{u} \Rightarrow f'(x)=-\frac{u'}{u^2}=-\frac{\dfrac{x^2+1+x\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\underline{\underline{\frac{x^2+1+x\sqrt{x^2+1}}{\left(x^2+1\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}}}=f'(x)$$

****

3º) Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x)=-4x^3+5$, el eje de abscisas, la recta x = -1 y la recta x = 1.

$f'(x)=-12x^2<0,\ \forall x\in D(f)\ \Rightarrow$ f(x) es monótona decreciente en su dominio, que es R.

El punto de corte de f(x) con el eje X es el siguiente:

$$f(x)=0\ \Rightarrow\ -4x^3+5=0\ ;;\ 4x^3=5\ ;;\ x^3=\frac{5}{4}\ ;;\ x=\sqrt[3]{\tfrac{5}{4}}\ \Rightarrow\ \underline{P\left(\sqrt[3]{\tfrac{5}{4}},\ 0\right)}.$$

$$f(x)=-4x^3+5\ \Rightarrow\ f(-1)=-4\cdot(-1)^4+5=-4+5=1>0\,.$$

Por ser $x=\sqrt[3]{\tfrac{5}{4}}>1$, todas las ordenadas de f(x) son positivas en (-1, 1).

$$A=\int_{-1}^{1}\left(-4x^3+5\right)\cdot dx=\left[-\frac{4x^4}{4}+5x\right]_{-1}^{1}=\left[-x^4+5x\right]_{-1}^{1}=(-1+5)-(-1-5)=4+6=\underline{\underline{10\ u^2=A}}$$

****