

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE NAVARRA****JUNIO - 2004**

(RESUELTOS) por Antonio Menguiano.

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Contestar una opción en cada grupo de preguntas.

Grupo 1**Opción A**1º) Estudiar el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro a yresolverlo en los casos en que sea compatible:
$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + ay + 3z = 1 \\ x - y + (2 - a)z = a \end{cases}.$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 3 \\ 1 & -1 & 2-a \end{pmatrix} ; ; M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2-a & a \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 3 \\ 1 & -1 & 2-a \end{vmatrix} = a(2-a) - 2 + 3 - 2a + 3 - (2-a) = 2a - a^2 + 4 - 2a - 2 + a =$$

$$-a^2 + a + 2 = 0 ; ; a^2 - a - 2 = 0 ; ; a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = -1 \end{cases}$$

Para $\begin{cases} a \neq 2 \\ a \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^\circ \text{ incógnitas} \Rightarrow \text{Compatible Determinado}$

$$\text{Para } a = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{El rango de } M' \text{ es:}$$

$$M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 + 1 - 2 = 4 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } M' = 3$$

Para $a = 2 \Rightarrow \text{Rango } M \neq \text{Rango } M' \Rightarrow \text{Incompatible}$

$$\text{Para } a = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{El rango de } M' \text{ es :}$$

$$M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1+1+1+1 = 4 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } M' = 3$$

Para $a = -1 \Rightarrow \text{Rango } M \neq \text{Rango } M' \Rightarrow \text{Incompatible}$

Resolviendo para $\begin{cases} a \neq 2 \\ a \neq -1 \end{cases}$, aplicando la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & a & 3 \\ a & -1 & 2-a \end{vmatrix}}{(a-2)(a+1)} = \frac{-2a+3a-2a^2-(2-a)}{(a-2)(a+1)} = \frac{-2a^2+2a-2}{(a-2)(a+1)} = \frac{-2(a^2-a+1)}{(a-2)(a+1)} = x$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & a & 2-a \end{vmatrix}}{(a-2)(a+1)} = \frac{2-a+2a-2-3a}{(a-2)(a+1)} = \frac{-2a}{(a-2)(a+1)} = y$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix}}{(a-2)(a+1)} = \frac{a^2+1+1-a}{(a-2)(a+1)} = \frac{a^2-a+2}{(a-2)(a+1)} = z$$

2º) Hallar el ángulo que forma la recta $r \equiv \begin{cases} \pi_1 \equiv x + y - 3 = 0 \\ \pi_2 \equiv 3x + y - z = 0 \end{cases}$ con el plano de ecuación $\pi \equiv 2x + y + z + 4 = 0$.

El ángulo que forma la recta r con el plano π es el complementario del ángulo que forman el vector director de r y el vector normal de π .

Para determinar un vector director de la recta r la expresamos mediante unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x = \lambda} \Rightarrow \underline{y = 3 - \lambda} \;; \; z = 3x + y = 3\lambda - 3 + \lambda \;; \; \underline{z = -3 + 4\lambda}$$

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = -3 + 4\lambda \end{cases} \quad \text{Un vector director de la recta } r \text{ es } \vec{v} = (1, -1, 4).$$

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (2, 1, 1)$.

Aplicando el concepto de producto escalar de dos vectores:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = |\vec{v}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{(1, -1, 4) \cdot (2, 1, 1)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} =$$

$$= \frac{2 - 1 + 4}{\sqrt{1 + 1 + 16} \cdot \sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{108}} = 0.4811 \Rightarrow \underline{\beta = 61^\circ 14' 28''} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\alpha = 90^\circ - \beta = 90^\circ - 61^\circ 14' 28'' = 28^\circ 45' 32'' = \alpha}$$

La recta r y el plano π forman un ángulo de $28^\circ 45' 32''$

Opción B

1º) Hallar la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 - 2 - 1 = 4 - 3 = 1 = |A| \quad ; \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj}(A^T) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

De otra forma, vamos a determinar A^{-1} utilizando el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_3 \leftrightarrow F_3 - 2F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1 \leftrightarrow F_1 - 2F_2 \\ F_3 \leftrightarrow F_3 + 3F_2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1 \rightarrow F_1 + F_3 \\ F_2 \rightarrow F_2 - F_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2º) Encontrar la ecuación implícita del plano π que contiene a la recta r de ecuación $r \equiv \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$ y es paralelo a la recta $s \equiv \begin{cases} \pi_1 \equiv 2x + y + 2z = 4 \\ \pi_2 \equiv x - y - z = 0 \end{cases}$.

El plano π pedido puede determinarse teniendo en cuenta que tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas r y s y contiene un punto de r .

Un vector director de la recta r es $\vec{u} = (0, 1, 1)$ y un punto de r es $A(1, 1, 2)$.

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es como sigue:

$$s \equiv \begin{cases} 2x + y + 2z - 4 = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 - 2\lambda \\ x - y = \lambda \end{cases} \Rightarrow 3x = 4 - 2\lambda \quad ; ; \quad \underline{x = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\lambda} \quad ; ;$$

$$x - y = \lambda \quad ; ; \quad y = x - \lambda = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\lambda - \lambda = \underline{\underline{\frac{4}{3} - \frac{5}{3}\lambda}} = y$$

$$s \equiv \begin{cases} x = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\lambda \\ y = \frac{4}{3} - \frac{5}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un vector director de s es $\vec{v} = (3, 5, -2)$.

$$\pi(A; \vec{u}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad ; ; \quad -2(x-1) + 3(y-1) - 3(z-2) - 5(x-1) = 0 \quad ; ;$$

$$-7(x-1) + 3(y-1) - 3(z-2) = 0 \quad ; ; \quad -7x + 7 + 3y - 3 - 3z + 6 = 0 \quad ; ;$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 7x - 3y + 3z - 10 = 0}}$$

Grupo 2

Opción C

1º) Calcular los siguientes límites: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)$; ; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x) = \infty - \infty \Rightarrow \text{In det.} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - x)(\sqrt{x^2 + 2x} + x)}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{\frac{x^2 + 2x}{x^2}} + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{\infty}} + 1} = \frac{2}{1 + 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = \frac{0 \cdot \operatorname{sen} 0}{1 - \cos 0} = \frac{0 \cdot 0}{1 - 1} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{In det.} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{sen} x \cdot (1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{sen} x \cdot (1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{sen} x \cdot (1 + \cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot (1 + \cos x)}{\operatorname{sen} x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = (1 + 1) \cdot 1 = 2$$

De otra forma, aplicando la Regla de L'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = \frac{0 \cdot \operatorname{sen} 0}{1 - \cos 0} = \frac{0 \cdot 0}{1 - 1} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{In det.} \Rightarrow (L' Hopital) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot \operatorname{sen} x + x \cdot \cos x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x + x \cdot \cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{0 + 0 \cdot 1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{In det.} \Rightarrow (L' Hopital) \Rightarrow$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 1 \cdot \cos x - x \cdot \operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{1 + 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0}{1} = \frac{1 + 1 - 0}{1} = 2$$

2º) Demostrar que la función $f(x) = 2 + 2x - e^x$ corta al eje OX en el intervalo $(-1, 1)$ y tiene un máximo relativo en ese intervalo.

La función $f(x) = 2 + 2x - e^x$ es continua en su dominio que es $\mathbb{R}$, por ser la suma algebraica de tres funciones continuas en sus respectivos dominios, que en los tres casos es $\mathbb{R}$, por lo tanto, $f(x)$ es continua en $(-1, 1)$.

Aplicando el teorema de Bolzano en el intervalo dado se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = 2 + 2 \cdot (-1) - e^{-1} = 2 - 2 - \frac{1}{e} = -\frac{1}{e} < 0 \\ f(1) = 2 + 2 \cdot 1 - e^1 = 2 + 2 - e = 4 - e > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0, -1 < x < 1, \text{ c.q.d.}}}$$

$$f'(x) = 2 - e^x \quad ; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 2 = e^x \quad ; \quad \underline{x = L2}$$

$$f''(x) = -e^x \quad ; \quad f''(L2) = e^{L2} > 0 \Rightarrow \text{Máximo}$$

$$f(L2) = 2 + 2 \cdot L2 - e^{L2} = 2 + L4 - 2 = L4 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Máximo : } (L2, L4)}}$$

La abscisa del máximo pertenece al intervalo $(-1, 1)$, por ser $L2 = 0'693$, y entonces: $-1 < L2 < 1$

Opción D

1º) Hallar la derivada de las siguientes funciones y simplificar el resultado:

$$y = L(\operatorname{sen} x^2) \quad ; ; \quad y = x^{Lx}.$$

$$y = L(\operatorname{sen} x^2) \Rightarrow y' = \frac{2x \cdot \cos x^2}{\operatorname{sen} x^2} = \underline{\underline{2x \cdot \cot ag x^2 = y'}}$$

$$y = x^{Lx} \Rightarrow L y = L x \cdot L x = (L x)^2 \quad ; ;$$

$$\frac{y'}{y} = 2 \cdot L x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x} \cdot L x \quad ; ; \quad y' = \underline{\underline{\frac{2 \cdot x^{Lx}}{x} \cdot L x}}$$

www.yoquieroaprobar.es

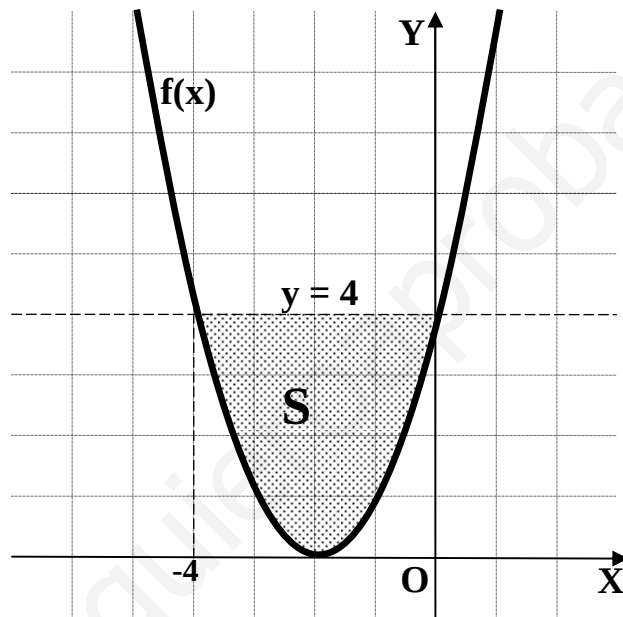
2º) Hallar el área encerrada por las gráficas de la curva $y = x^2 + 4x + 4$ y la recta $y = 4$.

$$y = x^2 + 4x + 4 \quad ; \quad y' = 2x + 4 \quad ; \quad y' = 0 \Rightarrow 2x + 4 = 0 \quad ; \quad x + 2 = 0 \quad ; \quad \underline{x = -2}$$

$$y'' = 2 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo.}$$

$$y_{(-2)} = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 4 = 4 - 8 + 4 = 0 \Rightarrow \underline{\text{Mínimo}(-2, 0)}$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la siguiente:



De la observación de la figura se deduce que el área pedida es la siguiente:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-4}^0 [4 - f(x)] \cdot dx = \int_{-4}^0 [4 - (x^2 + 4x + 4)] \cdot dx = \int_{-4}^0 (4 - x^2 - 4x - 4) \cdot dx = \int_{-4}^0 (-x^2 - 4x) \cdot dx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right]_{-4}^0 = 0 - \left[-\frac{(-4)^3}{3} - 2 \cdot (-4)^2 \right] = -\frac{64}{3} + 32 = \frac{-64 + 96}{3} = \underline{\underline{\frac{32}{3} u^2 = S}} \end{aligned}$$
