PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

JUNIO - 2006

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responde a una pregunta de cada una de las opciones.

OPCIÓN A

1º) Estudiar el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro a y resolverlo en los casos en que sea compatible: $\left\{\begin{array}{l} x+ay+(a-2)z=1 \\ x+2ay+(a-4)z=3 \\ ax+a^2y+(2a^2-2a-4)z=2a+2 \end{array}\right.$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & a & a-2 \\ 1 & 2a & a-4 \\ a & a^2 & 2a^2-2a-4 \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & a & a-2 & 1 \\ 1 & 2a & a-4 & 3 \\ a & a^2 & 2a^2-2a-4 & 2a+2 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & a & a-2 \\ 1 & 2a & a-4 \\ a & a^2 & 2a^2-2a-4 \end{vmatrix}=2a(2a^2-2a-4)+a^2(a-2)+a^2(a-4)-2a^2(a-2)-$$

$$-a^2(a-4)-a(2a^2-2a-4)=a(2a^2-2a-4)-a^2(a-2)=2a^3-2a^2-4a-a^3+2a^2=$$

$$=a^3-4a=a(a^2-4)=a(a-2)(a+2)=0 \;;;\; \underline{a_1=0} \;;;\; \underline{a_2=2} \;;;\; \underline{a_3=-2}$$

$$Para\ \left\{\begin{array}{c} a\neq 0 \\ a\neq 2 \\ a\neq -2 \end{array}\right\} \Rightarrow Rango\,M=Rango\ M'=3=n^o\ incógnitas \Rightarrow Compatible\ \ Determinado$$

$$Para\ \ a=0\ \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ \ M'\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot (4+2-6-2) = -2 \cdot (-2) = 4 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango \;\; M' = 3}$$

$$Para \;\; a = 2 \;\Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; Rango \;\; M' \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1,\; C_2,\; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 24+4+12-8-12-12 = 8 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango \;\; M' = 3}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; \begin{Bmatrix} a = 0 \\ a = 2 \end{Bmatrix} \;\Rightarrow\; Rango\, M \neq Rango \;\; M' \;\Rightarrow\; Incompatible}}$$

$$Para \;\; a = -2 \;\Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & -6 & 3 \\ -2 & 4 & 8 & -2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; Rango \;\; M' \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \{C_1,\; C_2,\; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 8+4+12-8-12-4 = 0 \\ \{C_1,\; C_3,\; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \\ -2 & 8 & -2 \end{vmatrix} = 12+8+24-12-24-8 = 0 \\ \{C_2,\; C_3,\; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & -4 & 1 \\ -4 & -6 & 3 \\ 4 & 8 & -2 \end{vmatrix} = -24-32-48+24+48+32 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \underline{Rango \;\; M' = 2}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; a = -2 \Rightarrow Rango \;\; M = Rango \;\; M' = 2 < n^{o} \;\; incóg. \;\Rightarrow\; Compatible \;\; Indeterminado}}$$

Resolviendo para $\begin{Bmatrix} a \neq 0 \\ a \neq 2 \\ a \neq -2 \end{Bmatrix}$, aplicando la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & a-2 \\ 3 & 2a & a-4 \\ 2a+2 & a^2 & 2a^2-2a-4 \end{vmatrix}}{a(a-2)(a+2)} = \frac{a\begin{vmatrix} 1 & 1 & a-2 \\ 3 & 2 & a-4 \\ 2a+2 & a & 2a^2-2a-4 \end{vmatrix}}{a(a-2)(a+2)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a-2 \\ 3 & 2 & a-4 \\ 2a+2 & a & 2a^2-2a-4 \end{vmatrix}}{(a-2)(a+2)} =$$

$$= \frac{2\left(2a^2-2a-4\right)+3a(a-2)+(a-4)(2a+2)-2(a-2)(2a+2)-a(a-4)-3\left(2a^2-2a-4\right)}{(a-2)(a+2)} =$$

$$= \frac{-\left(2a^2-2a-4\right)+(a-2)(3a-4a-4)+(a-4)(2a+2-a)}{(a-2)(a+2)} =$$

$$= \frac{-\left(2a^2-2a-4\right)+(a-2)(-a-4)+(a-4)(a+2)}{(a-2)(a+2)} =$$

$$= \frac{-2a^2+2a+4-a^2-4a+2a+8+a^2+2a-4a-8}{(a-2)(a+2)} = \frac{-2a^2+2a+4}{(a-2)(a+2)} = \frac{-2\left(a^2-a-2\right)}{(a-2)(a+2)} =$$

$$= \frac{-2(a-2)(a+1)}{(a-2)(a+2)} = \underline{\underline{\frac{-2(a+1)}{a+2}}} = x$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a-2 \\ 1 & 3 & a-4 \\ a & 2a+2 & 2a^2-2a-4 \end{vmatrix}}{a(a-2)(a+2)} =$$

$$= \frac{3\left(2a^2-2a-4\right)+(2a+2)(a-2)+a(a-4)-3a(a-2)-\left(2a^2-2a-4\right)-(2a+2)(a-4)}{a(a-2)(a+2)} =$$

$$= \frac{2\left(2a^2-2a-4\right)+(a-2)(2a+2-3a)+(a-4)(a-2a-2)}{a(a-2)(a+2)} =$$

$$= \frac{2\left(2a^2-2a-4\right)+(a-2)(2-a)+(a-4)(-a-2)}{a(a-2)(a+2)} =$$

$$= \frac{4a^2-4a-8+2a-a^2-4+2a-a^2-2a+4a+8}{a(a-2)(a+2)} = \frac{2a^2+2a-4}{a(a-2)(a+2)} = \frac{2\left(a^2+a-2\right)}{a(a-2)(a+2)} =$$

$$= \frac{2(a+2)(a-1)}{a(a-2)(a+2)} = \underline{\underline{\frac{2(a-1)}{a(a-2)}}} = y$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2a & 3 \\ a & a^2 & 2a+2 \end{vmatrix}}{a(a-2)(a+2)} = \frac{a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ a & a & 2a+2 \end{vmatrix}}{a(a-2)(a+2)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ a & a & 2a+2 \end{vmatrix}}{(a-2)(a+2)} =$$

$$= \frac{2(2a+2)+a+3a-2a-(2a+2)-3a}{(a-2)(a+2)} = \frac{(2a+2)-a}{(a-2)(a+2)} = \frac{a+2}{(a-2)(a+2)} = \underline{\underline{\frac{1}{a-2}}} = z$$

Para a = -2 resulta el sistema $\begin{cases} x-2y-4z=1 \\ x-4y-6z=3 \\ -2x+4y+8z=-2 \end{cases}$, que por ser compatible indeterminado despreciamos una de las ecuaciones (tercera, que es la primera multiplicada por menos dos) y parametrizamos una de las incógnitas (z), con lo cual resulta:

$$\left.\begin{array}{l} x-2y=1 \\ x-4y-6z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-2y=1 \\ x-4y=3+6\lambda \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x-2y=1 \\ -x+4y=-3-6\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=-2-6\lambda \;;;$$

$$\underline{y=-1-3\lambda} \;;;\; x-2y=1 \;;;\; x=1+2y=1-2-6\lambda=\underline{-1-6\lambda=x}$$

$$\underline{\underline{Soluciones \Rightarrow \begin{cases} x=-1-6\lambda \\ y=-1-3\lambda \quad \forall\lambda\in R \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

****

2º) Hallar la ecuación del plano π que contiene a los puntos P(0, 1, 1) y Q(1, 0, 1) y es paralelo a la recta $r \equiv \frac{x+3}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{2}$.

El vector director de la recta, $\overrightarrow{u} = (1,\ 0,\ 2)$, es un vector director del plano π por ser paralelo al mismo.

Otro vector director de π es $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (1,\ 0,\ 1) - (0,\ 1,\ 1) = (1,\ -1,\ 0)$.

La ecuación general del plano π es la siguiente:

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ 2(y-1) - (z-1) + 2x = 0 \ ;;\ 2y - 2 - z + 1 + 2x = 0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 2x + 2y - z - 1 = 0}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Hallar el valor de a que hace que la matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & a \end{bmatrix}$ no sea regular.

Una matriz es regular cuando su determinante es distinto de cero, por lo tanto, se trata de calcular el valor de a que hace que el determinante de la matriz A sea cero.

$$|A|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & a \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} C_1 \to C_1+C_2 \\ C_4 \to C_4+2C_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & a+4 \end{vmatrix}=0$$

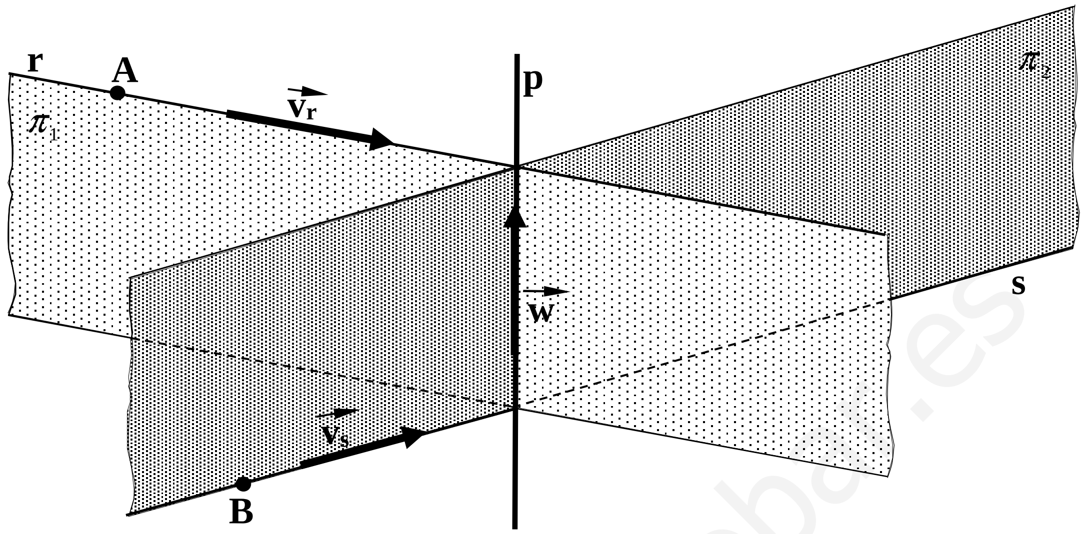
Desarrollando por los menores adjuntos de la primera fila:

$$|A|=+1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & a+4 \end{vmatrix}=(a+4)-2-4-2+4+(a+4)=0 \;;\; 2(a+4)-4=0 \;;$$

$a+4-2=0 \;;\; a+2=0 \;;\; \underline{\underline{a=-2}}$

****

2º) Hallar la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a las rectas r y s de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} x+z-1=0 \\ 2x+y+z+1=0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$.



La situación del problema es la indicada en el gráfico.

El procedimiento para hallar la ecuación de la recta p es el siguiente:

1.- En primer lugar determinamos un punto de cada una de las rectas, para lo cual expresamos la recta r mediante unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x+z-1=0 \\ 2x+y+z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \underline{x=1-\lambda} \ ;;\ 2x+y+z+1=0 \ ;;\ y=-2x-z-1=$$

$$=-2+2\lambda-\lambda-1=\underline{-3+\lambda=y} \quad \Rightarrow \quad \underline{r \equiv \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=-3+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}$$

Los puntos pueden ser: $A \in r \ \ y \ \ B \in s$: <u>A(1, -3, 0)</u> y <u>B(0, 0, -1)</u>.

2.- Hallamos unos vectores directores de las rectas: $\underline{\overrightarrow{v_r}=(-1,\ 1,\ 1)}$ y $\underline{\overrightarrow{v_s}=(-1,\ 1,\ 2)}$.

3.- Obtenemos un vector $\overrightarrow{w}$, perpendicular a $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$, que es su producto vectorial:

$$\overrightarrow{w}=\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{v_s}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2i-j-k+k-i+2j=i+j \Rightarrow \underline{\overrightarrow{w}=(1,\ 1,\ 0)}$$

4.- Determinamos los planos π_1 y π_2, de la forma siguiente:

$$\pi_1\left(A;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{w}\right)\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0\ ;;\ (y+3)-z-z-(x-1)=0\ ;;\ y+3-2z-x+1=0$$

$$\underline{\pi_1\equiv x-y+2z-4=0}$$

$$\pi_2\left(B;\ \vec{v}_s,\ \vec{w}\right)\equiv\begin{vmatrix} x & y & z+1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0\ ;;\ 2y-(z+1)-(z+1)-2x=0\ ;;\ 2y-2z-2-2x=0$$

$$\underline{\pi_2\equiv x-y+z+1=0}$$

La recta pedida p, es la que determinan los planos π_1 y π_2 en su intersección:

$$\underline{\underline{p\equiv\begin{cases} x-y+2z-4=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}}}$$

****

OPCIÓN C

1º) Hallar la integral indefinida $I = \int e^x \cdot sen\ x \cdot dx$.

$$I = \int e^x \cdot sen\ x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = e^x \rightarrow du = e^x \cdot dx \\ sen\ x \cdot dx = dv \rightarrow v = -\cos\ x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -e^x \cdot \cos\ x - \int -\cos x \cdot e^x \cdot dx = -e^x \cdot \cos\ x + \int e^x \cdot \cos x \cdot dx = \underline{-e^x \cdot \cos\ x + I_1 = I} \qquad (*)$$

$$I_1 = \int e^x \cdot \cos\ x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = e^x \rightarrow du = e^x \cdot dx \\ \cos\ x \cdot dx = dv \rightarrow v = sen\ x \end{array} \right\} \Rightarrow e^x \cdot sen\ x - \int sen\ x \cdot e^x \cdot dx =$$

$= \underline{e^x \cdot sen\ x - I = I_1}$ *Sustituyendo éste valor en (*), queda:*

$$I = -e^x \cdot \cos x + e^x \cdot sen\ x - I \ ;; \ 2I = -e^x \cdot \cos x + e^x \cdot sen\ x$$

$$\underline{\underline{I = \frac{e^x}{2}(sen\ x - \cos\ x) + C}}$$

****

2º) Dada la función $f(x) = x^x - 2^x + x - 1$, demostrar que existen $\alpha,\ \beta \in (1,\ 2)$ tales que $f(\alpha) = 0\ \ y\ \ f'(\beta) = 2$. Di que teoremas utilizas.

La función f(x) es continua en todos los puntos del intervalo [1, 2] y derivable en todos los puntos del intervalo (1, 2).

$$f(x) = x^x - 2^x + x - 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(1) = 1^1 - 2^1 + 1 - 1 = 1 - 2 + 1 - 1 = -1 < 0 \\ \\ f(2) = 2^2 - 2^2 + 2 - 1 = 4 - 4 + 2 - 1 = 1 > 0 \end{cases}$$

Aplicando el Teorema de Bolzano, que dice que: "si una función f es continua en un intervalo cerrado [a, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a,\ b)$ tal que $f(c) = 0$", se puede asegurar que existe un valor $\alpha \in (1,\ 2)$ tal que $f(\alpha) = 0$, c. q. d.

El Teorema de los Incrementos Finitos, del Valor Medio o de Lagrange, que dice que: "Si f(x) es una función continua en [a, b] y derivable en (a, b), entonces, existe al menos un punto $c \in (a,\ b)$ que cumple: $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$".

Aplicando el anterior teorema a f(x) en el intervalo dado, sería:

$$f'(\beta) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\beta \in (1,\ 2),\ \ c.q.d.}}$$

****

OPCIÓN D

1º) Representar gráficamente la función $f(x) = x^3 - 3x$.

Por tratarse de una función polinómica su dominio de definición es el conjunto de los números reales. No tiene ningún tipo de asíntotas.

La función f(x) es impar por lo cual es simétrica con respecto al origen.

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$f(x) = x^3 - 3x = 0 \;;;\; x\left(x^2 - 3\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow \underline{O(0,\ 0)} \\ x_2 = \sqrt{3} \rightarrow \underline{A\left(\sqrt{3},\ 0\right)} \\ x_3 = -\sqrt{3} \rightarrow \underline{B\left(-\sqrt{3},\ 0\right)} \end{cases}.$$

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos son los que siguen:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \;;;\; f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 \;;;\; 3\left(x^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = 1} \;;;\; \underline{x_2 = -1}.$$

$$f'(x) = 3\left(x^2 - 1\right) \Rightarrow \begin{cases} Para\ |x| > 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: (-\infty,\ -1) \cup (1,\ \infty)} \\ Para\ |x| < 1 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: (-1,\ 1)} \end{cases}$$

$$f''(x) = 6x \;;;\; f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow Mínimo\ \ para\ \ x = 1 \;;;\; f(1) = 1 - 3 = -2 \Rightarrow \underline{Mín: P(1,\ -2)}$$

Por simetría: $\underline{Máx: Q(-1,\ 2)}$.

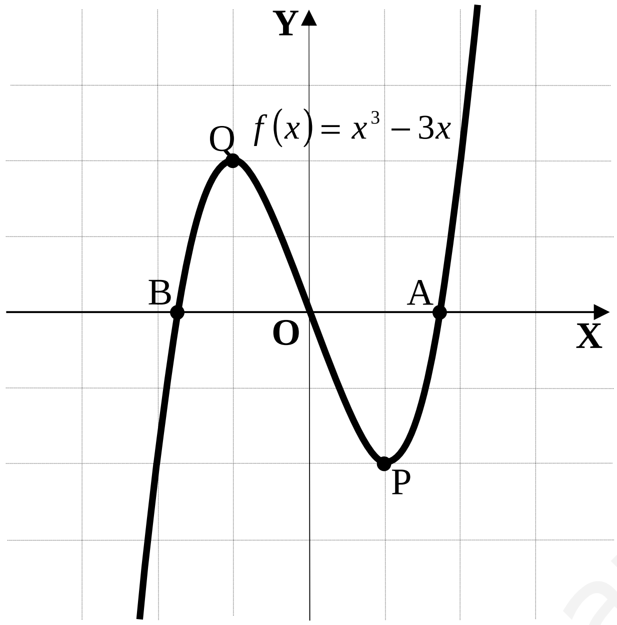
El punto de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad son los siguientes:

$$f''(x) = 6x \;;;\; f''(x) = 0 \Rightarrow \underline{x = 0} \;;;\; f'''(x) = 6 \neq 0 \Rightarrow Punto\ \ de\ \ \inf lexión\ \ para\ \ x = 0..$$

$$\underline{Punto\ \ Inflexión: O(0,\ 0)}$$

$$f''(x) = 6x \Rightarrow \begin{cases} Para\ \ x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow \underline{Concavidad\ (\cap): (-\infty,\ 0)} \\ Para\ \ x > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow \underline{Convexidad\ (\cup): (0,\ \infty)} \end{cases}$$

Con los datos anteriores puede representarse, aproximadamente, su gráfica:



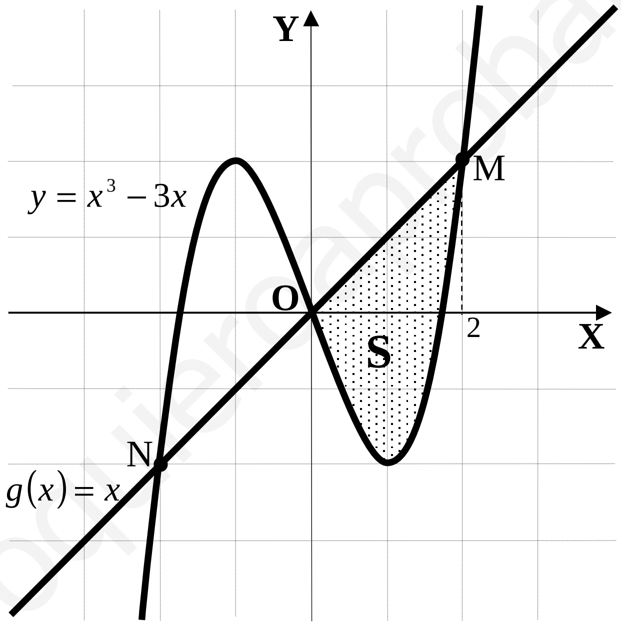
****

2º) Calcular el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de las funciones $y = x^3 - 3x$ y $g(x) = x$.

Los puntos de corte de las dos funciones son las soluciones del sistema de ecuaciones que forman.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 - 3x \\ f(x) = x \end{array}\right\} \Rightarrow x^3 - 3x = x \;;;\; x^3 - 4x = 0 \;;;\; x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \to \underline{O(0,\ 0)} \\ x_2 = 2 \to \underline{M(2,\ 2)} \\ x_1 = -2 \to \underline{N(-2,\ -2)} \end{cases}$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la siguiente:



En el intervalo correspondiente a la superficie a calcular, todas las ordenadas de la recta son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la curva, por lo cual, el valor del área pedida es la siguiente:

$$S = \int_0^2 \left[x - \left(x^3 - 3x\right)\right] \cdot dx = \int_0^2 \left(x - x^3 + 3x\right) \cdot dx = \int_0^2 \left(-x^3 + 4x\right) \cdot dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{4x^2}{2}\right]_0^2 =$$

$$= \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^2\right]_0^2 = \left(-\frac{2^4}{4} + 2 \cdot 2^2\right) - 0 = -\frac{16}{4} + 2 \cdot 4 = -4 + 8 = \underline{\underline{4\ u^2 = S}}$$

****