PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

SEPTIEMBRE - 2006

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responde a una cuestión de cada una de las opciones.

OPCIÓN A

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible: $\begin{cases} x+(a-1)y=2 \\ -x+(a^2-a)y+2z=a-1 \\ ax+(a^2-a)y+(a^2+1)z=2a \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & a-1 & 0 \\ -1 & a^2-a & 2 \\ a & a^2-a & a^2+1 \end{pmatrix} \quad y \quad M'=\begin{pmatrix} 1 & a-1 & 0 & 2 \\ -1 & a^2-a & 2 & a-1 \\ a & a^2-a & a^2+1 & 2a \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & a-1 & 0 \\ -1 & a^2-a & 2 \\ a & a^2-a & a^2+1 \end{vmatrix}=(a-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & a & 2 \\ a & a & a^2+1 \end{vmatrix}=(a-1)\left[a(a^2+1)+2a-2a+(a^2+1)\right]=$$

$$=(a-1)(a^3+a+a^2+1)=(a-1)(a^3+a^2+a+1)=(a-1)\left[a^2(a+1)+(a+1)\right]=$$

$$=(a-1)(a+1)(a^2+1)=0 \Rightarrow Las\ \ raíces\ \ reales\ \ son\ \ \underline{a_1=1}\ \ y\ \ \underline{a_2=-1}.$$

$$Para\ \begin{Bmatrix} a\neq 1 \\ a\neq -1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ \ M=Rango\ \ M'=3=n^{o}\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ Determinado$$

Para a = 1 la matriz ampliada es $M'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, que por tener la segunda columna todos sus elementos nulos, es equivalente a la matriz $M''=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, cuyo rango es el siguiente:

$$Rango\ \ M' = Rango\ \ M'' \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4-4-4=-4 \neq 0 \ \Rightarrow \ \underline{Rango\ \ M'=3}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=1 \Rightarrow Rango\ \ M \neq Rango\ \ M' \Rightarrow Incompatible}}$$

Para a = -1 la matriz ampliada es $M'=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, que por tener las dos últimas filas iguales, es equivalente a la matriz $M''=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 2.

$$\underline{\underline{Para\ \ a=-1 \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M' = 2 < n^o\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ Indeterminado}}$$

Resolvemos en los casos de compatibilidad:

Resolviendo por la Regla de Cramer para $\left\{ \begin{matrix} a \neq 1 \\ a \neq -1 \end{matrix} \right\}$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a-1 & 0 \\ a-1 & a^2-a & 2 \\ 2a & a^2-a & a^2+1 \end{vmatrix}}{(a-1)(a+1)(a^2+1)} = \frac{(a-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ a-1 & a & 2 \\ 2a & a & a^2+1 \end{vmatrix}}{(a-1)(a+1)(a^2+1)} = \frac{2a(a^2+1)+4a-4a-(a-1)(a^2+1)}{(a+1)(a^2+1)} =$$

$$= \frac{2a^3+2a-a^3-a+a^2+1}{(a+1)(a^2+1)} = \frac{a^3+a^2+a+1}{(a+1)(a^2+1)} = \underline{\underline{1=x}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & a-1 & 2 \\ a & 2a & a^2+1 \end{vmatrix}}{(a-1)(a+1)(a^2+1)} = \frac{(a-1)(a^2+1)+4a-4a+2(a^2+1)}{(a+1)(a^2+1)} = \frac{a^3+a-a^2-1+2a^2+2}{(a+1)(a^2+1)} =$$

$$= \frac{a^3+a^2+a+1}{(a+1)(a^2+1)} = \underline{\underline{1=y}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & a-1 & 2\\ -1 & a^2-a & a-1\\ a & a^2-a & 2a\end{vmatrix}}{(a-1)(a+1)(a^2+1)}=\frac{(a-1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & a & a-1\\ a & a & 2a\end{vmatrix}}{(a-1)(a+1)(a^2+1)}=\frac{a\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & a & a-1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}}{(a+1)(a^2+1)}=\underline{\underline{0=z}}$$

(El valor del determinante es cero por tener iguales las filas primera y tercera)

Resolvemos ahora para a = -1, en cuyo caso resulta el sistema $\begin{cases}x-2y=2\\ -x+2y+2z=-2\end{cases}$.

Parametrizando $\underline{y=\lambda}$, resulta: $\begin{cases}\underline{x=2+2\lambda}\\ -2-2\lambda+2\lambda+2z=-2\end{cases} \Rightarrow \underline{z=0}$.

$$\underline{\underline{Solución:\ \begin{cases}x=2+2\lambda\\ y=\lambda\\ z=0\end{cases},\quad \forall\lambda\in R}}$$

****

2º) Halla la ecuación general del plano α que equidista de los puntos $P(2,\ 1,\ 3)$ y $Q(0,\ 3,\ -1)$ y es paralelo al plano $\pi \equiv 3x - y + z + 1 = 0$.

El haz de los infinitos planos paralelos a $\pi \equiv 3x - y + z + 1 = 0$ tiene por ecuación $\beta \equiv 3x - y + z + D = 0$, uno de los cuales es α, que equidista de los puntos $P(2,\ 1,\ 3)$ y $Q(0,\ 3,\ -1)$, o sea: $d(P,\ \alpha) = d(Q,\ \alpha)$.

$$d(P,\ \alpha) = \frac{|\ 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + D|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 1^1}} = \frac{|6 - 1 + 3 + D|}{\sqrt{9 + 1 + 1}} = \underline{\frac{|8 + D|}{\sqrt{11}} = d(P,\ \alpha)}$$

$$d(Q,\ \alpha) = \frac{|\ 3 \cdot 0 - 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + D|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 1^1}} = \frac{|0 - 3 + 1 + D|}{\sqrt{9 + 1 + 1}} = \underline{\frac{|D - 2|}{\sqrt{11}} = d(Q,\ \alpha)}$$

$$d(P,\ \alpha) = d(Q,\ \alpha) \Rightarrow \frac{|8 + D|}{\sqrt{11}} = \frac{|D - 2|}{\sqrt{11}} \ ;; \ |8 + D| = |D - 2| \Rightarrow \begin{cases} 8 + D = D - 2 \\ 8 + D = -D + 2 \end{cases}$$

De las dos posibilidades anteriores, la primera carece de sentido lógico, por lo cual, el valor del término independiente D es: $2D = 2 - 8 = -6 \ ;; \ \underline{D = -3}$.

$$\underline{\underline{El \quad plano \quad pedido \quad es \quad \alpha \equiv 3x - y + z - 3 = 0}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Calcula el valor del determinante de la matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Sumando a la primera columna la última resulta:

$|A|=\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$. Sumando a la primera fila la segunda $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \ |A|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=2-3=\underline{\underline{-1=|A|}}$$

****

2º) Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto P(1, 0, 0) y corta a las rectas $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$ y $s \equiv \begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ 2x-y-z-3=0 \end{cases}$.

Un punto y un vector director de r son $A(2,\ 1,\ 0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1,\ -1,\ 2)$.

La expresión de la recta s por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$s \equiv \begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ 2x-y-z-3=0 \end{cases} \Rightarrow z=\lambda \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+2y=1-\lambda \\ 2x-y=3+\lambda \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x+2y=1-\lambda \\ 4x-2y=6+2\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5x=5+\lambda \ ;;$$

$$\underline{x=1+\frac{1}{5}\lambda} \ ;; \ 2x-y=3+\lambda \ ;; \ y=2+\frac{2}{5}\lambda-3-\lambda=\underline{-1-\frac{3}{5}\lambda=y} \Rightarrow \underline{s \equiv \begin{cases} x=1+\frac{1}{5}\lambda \\ y=-1-\frac{3}{5}\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}$$

Un punto de la recta s es $B(1,\ -1,\ 0)$ y un vector director es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{w} = \left(\frac{1}{5},\ -\frac{3}{5},\ 1\right)$, por ejemplo: $\overrightarrow{v_s} = (1,\ -3,\ 5)$.

El punto P con los puntos A y B determina los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{PA} = A-P = (2,\ 1,\ 0)-(1,\ 0,\ 0) = \underline{(1,\ 1,\ 0) = \overrightarrow{u_r}}$$

$$\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{PB} = B-P = (1,\ -1,\ 0)-(1,\ 0,\ 0) = \underline{(0,\ -1,\ 0) = \overrightarrow{u_s}}$$

El plano α que pasa por P y contiene a la recta r es el siguiente:

$$\alpha(P;\ \overrightarrow{u_r},\ \overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ ;; \ 2(x-1)-z-z-2y=0 \ ;; \ 2x-2-2z-2y=0 \ ;;$$

$$\underline{\alpha \equiv x-y-z-1=0}$$

El plano β que pasa por P y contiene a la recta s es el siguiente:

$$\beta(P;\ \overrightarrow{u_s},\ \overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \ ;; \ -5(x-1)+z=0 \ ;; \ -5x+5+z=0 \ ;; \ \underline{\beta \equiv 5x-z-5=0}$$

La recta t pedida es la que determinan los planos α y β:

$$t \equiv \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ 5x - z - 5 = 0 \end{cases}$$

****

OPCIÓN C

1º) Halla los siguientes límites: $L = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2+2}{2-2\,sen\ x} \right)^{\frac{2}{x}}$ y $M = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{2x^2+x+5}-2}{1-\sqrt{2x-1}}$.

$$L = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2+2}{2-2\,sen\ x} \right)^{\frac{2}{x}} = \left(\frac{0^2+2}{2-2\,sen\ 0} \right)^{\frac{2}{0}} = 1^\infty \Rightarrow Indeterminación \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = \lim_{x \to 0} \left[\frac{x^2+2}{2(1-sen\ x)} \right]^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{(x^2+2)(1+sen\ x)}{2(1-sen\ x)(1+sen\ x)} \right]^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{(x^2+2)(1+sen\ x)}{2(1-sen^2\ x)} \right]^{\frac{2}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{(x^2+2)(1+sen\ x)}{2\cos^2 x} \right]^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2+2}{2} \cdot \frac{1+sen\ x}{\cos^2 x} \right)^{\frac{2}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2+2}{2} \right)^{\frac{2}{x}} \cdot \lim_{x \to 0} \left(\frac{1+sen\ x}{\cos^2 x} \right)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \to 0} \left(1+\frac{x^2}{2} \right)^{\frac{2}{x}} \cdot \lim_{x \to 0} \left(\frac{1+sen\ x}{\cos^2 x} \right)^{\frac{2}{x}} = \underline{L_1 \cdot L_2 = L}$$

$$L_1 = \lim_{x \to 0} \left(1+\frac{x^2}{2} \right)^{\frac{2}{x}} = (1+0)^{\frac{2}{0}} = 1^\infty \Rightarrow Indeterminado \Rightarrow L_1 = \lim_{x \to 0} \left[\left(1+\frac{x^2}{2} \right)^{\frac{2}{x^2}} \right]^{\frac{x^2}{2} \cdot \frac{2}{x}} =$$

$$= \left[\lim_{x \to 0} \left(1+\frac{x^2}{2} \right)^{\frac{2}{x^2}} \right]^{x} = e^{\lim\limits_{x \to 0} x} = e^0 = \underline{1 = L_1}$$

$$L_2 = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1+sen\ x}{\cos^2 x} \right)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{\cos^2 x} \cdot (1+sen\ x) \right]^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)^{\frac{2}{x}} \cdot \lim_{x \to 0} (1+sen\ x)^{\frac{2}{x}} =$$

$$= 1^\infty \cdot \lim_{x \to 0} \left[(1+sen\ x)^{\frac{1}{sen\ x}} \right]^{sen\ x \cdot \frac{2}{x}} = 1 \cdot e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{2\ sen\ x}{x}} = \underline{e^2 = L_2}$$

$$\left(Se\ tiene\ en\ cuenta\ que\ \lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1 \right)$$

Teniendo en cuenta lo anterior: $L = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2+2}{2-2\,sen\ x} \right)^{\frac{2}{x}} = 1 \cdot e^2 = \underline{\underline{e^2}}$.

$$M = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2 + x + 5} - 2}{1 - \sqrt{2x - 1}}$$

Para la resolución de éste límite conviene recordar los siguientes productos notables: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ *y* $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

$$M = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2 + x + 5} - 2}{1 - \sqrt{2x - 1}} = \frac{\sqrt[3]{2 + 1 + 5} - 2}{1 - \sqrt{2 - 1}} = \frac{\sqrt[3]{8} - 2}{1 - \sqrt{1}} = \frac{2 - 2}{1 - 1} = \frac{0}{0} \Rightarrow In\det. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{\left(\sqrt[3]{2x^2 + x + 5} - 2\right) \cdot \left[\left(2x^2 + x + 5\right)^2 + \left(2x^2 + x + 5\right) \cdot 2 + 2^2\right] \cdot \left(1 + \sqrt{2x - 1}\right)}{\left(1 - \sqrt{2x - 1}\right) \cdot \left[\left(2x^2 + x + 5\right)^2 + \left(2x^2 + x + 5\right) \cdot 2 + 2^2\right] \cdot \left(1 + \sqrt{2x - 1}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\left[\left(\sqrt[3]{2x^2 + x + 5}\right)^3 - 2^3\right] \cdot \left(1 + \sqrt{2x - 1}\right)}{\left[1^2 - \left(\sqrt{2x - 1}\right)^2\right] \cdot \left[\left(2x^2 + x + 5\right)^2 + 4x^2 + 2x + 10 + 4\right]} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\left(2x^2 + x + 5 - 8\right)\left(1 + \sqrt{2x - 1}\right)}{\left(1 - 2x + 1\right)\left[\left(2x^2 + x + 5\right)^2 + 4x^2 + 2x + 14\right]} = \lim_{x \to 1} \frac{\left(2x^2 + x - 3\right)\left(1 + \sqrt{2x - 1}\right)}{2\left(1 - x\right)\left[\left(2x^2 + x + 5\right)^2 + 4x^2 + 2x + 14\right]} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\left(2x + 3\right)\left(x - 1\right)\left(1 + \sqrt{2x - 1}\right)}{-2\left(x - 1\right)\left[\left(2x^2 + x + 5\right)^2 + 4x^2 + 2x + 14\right]} = \lim_{x \to 1} \frac{\left(2x + 3\right)\left(1 + \sqrt{2x - 1}\right)}{-2\left[\left(2x^2 + x + 5\right)^2 + 4x^2 + 2x + 14\right]} =$$

$$= \frac{\left(2 + 3\right)\left(1 + \sqrt{2 - 1}\right)}{-2\left[\left(2 + 1 + 5\right)^2 + 4 + 2 + 14\right]} = \frac{5 \cdot 2}{-2 \cdot \left(8^2 + 20\right)} = -\frac{5}{64 + 20} = \underline{\underline{-\frac{5}{84} = M}}$$

****

2º) Demuestra que la función $y = x^3 - x - sen(\pi x)$ tiene un máximo relativo en el intervalo (-1, 0) y un mínimo relativo en el intervalo (0, 1). Menciona los resultados teóricos que utilices.

La función $y = f(x) = x^3 - x - sen(\pi x)$ es continua y derivable en su dominio, que es el conjunto de los números reales, por ser la suma algebraica de tres funciones continuas y derivables en sus dominios, que también es R en cada uno de los casos.

Los valores de la función en los extremos del intervalo (-1, 0) son los siguientes:

$$f(0) = 0 - 0 - sen\, 0 = 0 \;\; ;; \;\; f(-1) = (-1)^3 - (-1) - sen(-\pi) = -1 + 1 - 0 = 0$$

Teniendo en cuenta el teorema de Rolle, que dice: "si una función f(x) es continua en [a, b] y derivable en (a, b) y si se cumple que f(a) = f(b), existe al menos un valor x = c perteneciente al intervalo (a, b) tal que f'(c) = 0".

Teniendo en cuenta las derivas primera y segunda de la función, que son las siguientes: $y' = f'(x) = 3x^2 - 1 - \pi \cos(\pi x) \;\; ;; \;\; y'' = f''(x) = 6x + 2\pi\, sen(\pi x)$, se cumple que la segunda derivada es menor que cero para todos los valores de x pertenecientes al intervalo (-1, 0) considerado, o sea:

$f'(c) = 0,\; c \in (-1,\; 0)\;\; y\;\; f''(c) < 0 \Rightarrow$ La función tiene un máximo relativo en (-1, 0), c.q.d.

Aplicando los cálculos anteriores al intervalo (0, 1) resulta:

$$f(0) = 0 - 0 - sen\; 0 = 0 \;\; ;; \;\; f(1) = 1^3 - 1 - sen\, \pi = 1 - 1 - 0 = 0$$

$f'(c) = 0,\; c \in (0,\; 1)\;\; y\;\; f''(c) > 0 \Rightarrow$ La función tiene un mínimo relativo en (0, 1), c.q.d.

****

OPCIÓN D

1º) Demuestra que la función $f(x)=x^x$ tiene un mínimo relativo en $x=\frac{1}{e}$.

Si la función $f(x)=x^x$ tiene un mínimo relativo para $x=\frac{1}{e}$ tiene que cumplirse que su primera derivada tiene que anularse para el valor dado de x:

$$f(x)=y=x^x \;\;;;\;\; L\,y=x\,L\,x \;\;;;\;\; \frac{y'}{y}=1\cdot L\,x+x\cdot\frac{1}{x}=1+L\,x \;\;;;\;\; y'=f'(x)=x^x\,(1+L\,x)$$

$$f'\left(\tfrac{1}{e}\right)=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}\cdot\left(1+L\frac{1}{e}\right)=c^{-\frac{1}{e}}\cdot(1+L1-L\,e)=\frac{1}{\sqrt[e]{e}}\cdot(1+0-1)=\underline{0=f'\left(\tfrac{1}{e}\right)}$$

Para que exista un mínimo relativo, el valor de la segunda derivada tiene que ser positivo para el valor dado de x:

$$f''(x)=x^x\,(1+L\,x)\cdot(1+L\,x)+x^x\cdot\frac{1}{x}=\underline{x^x\left[(1+L\,x)^2+\frac{1}{x}\right]=f''(x)}$$

$$f''\left(\tfrac{1}{e}\right)=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}\cdot\left[\left(1+L\frac{1}{e}\right)^2+\frac{1}{\frac{1}{e}}\right]=\frac{1}{\sqrt[e]{e}}\cdot\left[(1+L1-L\,e)^2+e\right]=\frac{1}{\sqrt[e]{e}}\cdot e=\frac{e}{\sqrt[e]{e}}=\underline{f''\left(\tfrac{1}{e}\right)>0}$$

En efecto, la función $f(x)$ tiene un mínimo relativo para $x=\frac{1}{e}$, c.q.d.

****

2º) Se consideran las funciones $f(x)=x^4-x^2$ y $g(x)=2-2x^2$. Dibuja sus gráficas y calcula el área de la región encerrada por ellas.

Los puntos de corte de las funciones se obtienen resolviendo el sistema que forman sus ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^4-x^2 \\ g(x)=2-2x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^4-x^2=2-2x^2 \;\;;;\;\; x^4+x^2-2=0 \;\;;;\;\; x^2=a \;\Rightarrow\; a^2+a-2=0$$

$$a=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2} \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} a_1=1 \\ a_2=-2 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x^2=1 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1=1 \;\rightarrow\; \underline{A(1,\ 0)} \\ x_2=-1 \;\rightarrow\; \underline{B(-1,\ 0)} \end{array}\right\} \\ x^2=-1 \;\rightarrow\; x \notin R \end{array}\right.$$

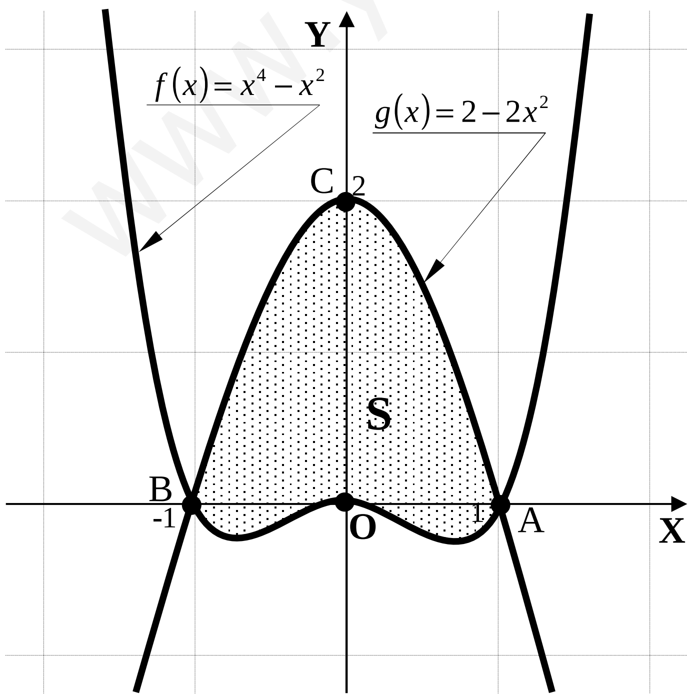
La función $f(x)=x^4-x^2$ es polinómica, par y que corta a los eje de abscisas en los puntos A(1, 0), B(-1, 0) y O(0, 0).

Los máximos y mínimos relativos de $f(x)=x^4-x^2$ son los siguientes:

$$f'(x)=4x^3-2x=2x\left(2x^2-1\right)=0 \text{, cuyas raíces son } x_1=0,\; x_2=\frac{\sqrt{2}}{2} \;\; y \;\; x_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$f''(x)=12x^2-2 \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=6-4>0 \;\Rightarrow\; Mín.\; relativos \;\; para \;\; x=\frac{\sqrt{2}}{2} \;\; y \;\; x=-\frac{\sqrt{2}}{2}. \\ f''(0)=-2<0 \;\Rightarrow\; Máx.\; relativo \;\; para \;\; x=0 \end{array}\right.$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4} \;\Rightarrow\; Mín.\; P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\; -\frac{1}{4}\right) \;\; y \;\; Q\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\; -\frac{1}{4}\right) \;\; (Simetría)$$



El punto máximo es el origen de coordenadas. (cortes con el eje de abscisas).

La función $g(x)=2-2x^2$ es una parábola cóncava $(\cap)$ cuyos puntos de corte con el eje de abscisas son A(1, 0) y B(-1, 0), obtenidos en los puntos de corte de las dos funciones. El punto de corte con el eje de ordenadas es para x = 0, que es C(0, 2).

La representación gráfica de la situación se refleja en el gráfico adjunto.

De la observación de la representación gráfica se deduce que la superficie limitada por las dos funciones es la siguiente, teniendo en cuenta la simetría con respecto al eje de ordenadas de las funciones:

$$S = 2 \cdot \int_0^1 [g(x) - f(x)] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^1 [(2 - 2x^2) - (x^4 - x^2)] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^1 (-x^4 - x^2 + 2) \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \left[-\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 2x \right]_0^1 = 2 \cdot \left[\left(-\frac{1^5}{5} - \frac{1^3}{3} + 2 \right) - 0 \right] = 2 \cdot \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + 2 \right) = -\frac{2}{5} - \frac{2}{3} + 4 =$$

$$= \frac{-6 - 10 + 60}{15} = \underline{\underline{\frac{44}{15}\ u^2 = S}}$$

****