PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

JUNIO - 2008

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responde a una opción del Grupo 1 y a una opción del Grupo 2.

GRUPO 1

OPCIÓN A

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible: $\begin{cases} x-y-z=0 \\ x+\left(a^2-a-1\right)y=-1 \\ x+\left(a^2-a-1\right)y+(a-2)z=1-a^2 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & a^2-a-1 & 0 \\ 1 & a^2-a-1 & a-2 \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & a^2-a-1 & 0 & -1 \\ 1 & a^2-a-1 & a-2 & 1-a^2 \end{pmatrix}.$$

Los rangos, en función del parámetro a, de las matrices anteriores son:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & a^2-a-1 & 0 \\ 1 & a^2-a-1 & a-2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a^2-a & 1 \\ 1 & a^2-a & a-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a^2-a & 1 \\ a^2-a & a-1 \end{vmatrix}=\left(a^2-a\right)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a-1 \end{vmatrix}=$$

$$=\left(a^2-a\right)\cdot(a-1-1)=a(a-1)(a-2)=0 \Rightarrow \underline{a_1=0} \;;;\; \underline{a_2=1} \;;;\; \underline{a_3=2}$$

$$Para \begin{Bmatrix} a\neq 0 \\ a\neq 1 \\ a\neq 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=3=n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ \det er\min ado$$

www.yoquieroaprobar.es

$$\underline{Para\ \ a=0} \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2=-C_1\} \Rightarrow Rango\ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3+1=-2 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M'=3}$$

$$\underline{Para\ \ a=1} \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_3\} \Rightarrow \underline{Rango\ \ M'=2}$$

$$\underline{Para\ \ a=2} \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -3+1+1-3=-4 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M'=3}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=1 \Rightarrow\ Rango\ \ M = Rango\ \ M'=2 < n^{o}\ \ incóg. \Rightarrow\ Compatible\ \ Indeterminado}}$$

$$\underline{\underline{Para\ \begin{Bmatrix} a=0 \\ a=2 \end{Bmatrix} \Rightarrow\ Rango\ \ M=2\ \ ;;\ \ Rango\ \ M'=3 \Rightarrow\ Incompatible}}$$

Resolvemos para el caso de $\begin{Bmatrix} a \neq 0 \\ a \neq 1 \\ a \neq 2 \end{Bmatrix}$, compatible determinado, mediante la Regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & a^2-a-1 & 0 \\ 1-a^2 & a^2-a-1 & a-2 \end{vmatrix}}{a(a-1)(a-2)} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & a^2-a-1 & 0 \\ 1-a^2 & a^2-2a+1 & a-2 \end{vmatrix}}{a(a-1)(a-2)} = \frac{-\begin{vmatrix} -1 & a^2-a-1 \\ 1-a^2 & (a-1)^2 \end{vmatrix}}{a(a-1)(a-2)} =$$

$$=\frac{a^2-2a+1+a^2-a-1-a^4+a^3+a^2}{a(a-1)(a-2)} = \frac{-a^4+a^3+3a^2-3a}{a(a-1)(a-2)} = \frac{-a(a^3-a^2-3a+3)}{a(a-1)(a-2)} =$$

$$=-\frac{a^3-a^2-3a+3}{(a-1)(a-2)} = -\frac{(a-1)(a^2-3)}{(a-1)(a-2)} = \underline{\underline{\frac{3-a^2}{a-2}=x}}$$

www.yoquieroaprobar.es

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1-a^2 & a-2\end{vmatrix}}{a(a-1)(a-2)}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1-a^2 & a-1\end{vmatrix}}{a(a-1)(a-2)}=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1-a^2 & a-1\end{vmatrix}}{a(a-1)(a-2)}=\frac{-a+1-1+a^2}{a(a-1)(a-2)}=\frac{a(a-1)}{a(a-1)(a-2)}=\underline{\underline{\frac{1}{a-2}=y}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & a^2-a-1 & -1\\ 1 & a^2-a-1 & 1-a^2\end{vmatrix}}{a(a-1)(a-2)}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & a^2-a & -1\\ 1 & a^2-a & 1-a^2\end{vmatrix}}{a(a-1)(a-2)}=\frac{\begin{vmatrix}a(a-1) & -1\\ a(a-1) & 1-a^2\end{vmatrix}}{a(a-1)(a-2)}=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1-a^2\end{vmatrix}}{a-2}=\frac{1-a^2+1}{a-2}=$$

$$=\underline{\underline{\frac{2-a^2}{a-2}=z}}$$

Resolvemos para el caso de a = 1: compatible indeterminado. El sistema resulta $\left\{\begin{array}{l}x-y-z=0\\ x-y=-1\\ x-y-z=0\end{array}\right.$, equivalente al sistema $\left.\begin{array}{l}x-y-z=0\\ x-y=-1\end{array}\right\}$. Parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo $\underline{y=\lambda}$, resulta:

$$\left.\begin{array}{l}x-y-z=0\\ x-y=-1\end{array}\right\}\Rightarrow \underline{x=-1+\lambda}\ \ ;;\ \ z=x-y=-1+\lambda-\lambda=\underline{-1=z}$$

$$\underline{Solución\ \ para\ \ a=1}\Rightarrow \underline{\underline{\left.\begin{array}{l}x=-1+\lambda\\ y=\lambda\\ z=-1\end{array}\right\}\ \forall\lambda\in}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

2º) Halla la ecuación del plano π que pasa por el punto P(3, -1, 4) y es paralelo a las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} 5x - y + 3z - 4 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$ y $r_2 \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-3}$.

La expresión de la recta r_1 por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r_1 \equiv \begin{cases} 5x - y + 3z - 4 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} 5x - y = 4 - 3\lambda \\ -2x + y = -1 + \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow 3x = 3 - 2\lambda \;;\; \underline{x = 1 - \frac{2}{3}\lambda}$$

$$y = 2x - 1 + \lambda = 2 - \frac{4}{3}\lambda - 1 + \lambda = \underline{1 - \frac{1}{3}\lambda = y} \Rightarrow \underline{r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 - \frac{2}{3}\lambda \\ y = 1 - \frac{1}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Los vectores directores de las rectas son $\overrightarrow{v_1} = (2,\ 1,\ -3)$ y $\overrightarrow{v_2} = (1,\ 2,\ -3)$.

La ecuación general del plano π es:

$$\pi(P;\ \overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2}) \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \;;$$

$$-3(x-3) + 4(z-4) - 3(y+1) - (z-4) + 6(x-3) + 6(y+1) = 0 \;;$$

$$3(x-3) + 3(y+1) + 3(z-4) = 0 \;;\; x - 3 + y + 1 + z - 4 = 0 \;;$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x + y + z - 6 = 0}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, halla su inversa y úsala para encontrar la matriz X que cumple A · X · A = I_2.

Vamos a determinar la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ mediante el Método de Gauss-Jordan:

$$(A/I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 + 2F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to -F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}}$$

Aplicando propiedades del producto de matrices a la expresión A · X · A = I_2, en concreto, multiplicando por la izquierda y por la derecha por A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot I_2 \cdot A^{-1} \;;;\; I_2 \cdot X \cdot I_2 = A^{-1} \cdot A^{-1} \Rightarrow \underline{X = A^{-2}}$$

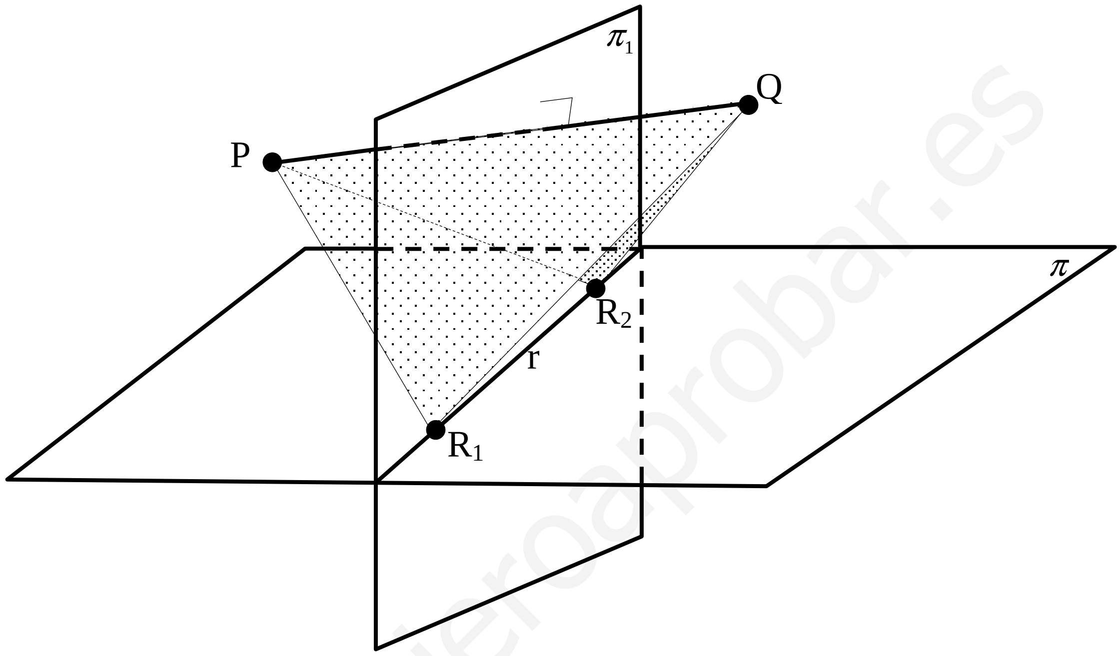
$$X = A^{-2} = A^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & -2-2 \\ -1-1 & 2+1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = X}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

2º) Dados los puntos P(4, 2, 1) y Q(3, 3, 1), encuentra los dos puntos R_1 y R_2, del plano $\pi \equiv x-y-2z+3=0$ tales que PQR_1 y PQR_2 son triángulos equiláteros.

Existen diversas formas de resolver este ejercicio. Vamos a utilizar una, tal vez no la más escueta, pero si lo suficientemente descriptiva para comprender los sucesivos pasos que vallamos dando, además acompañado de un gráfico aproximado de la situación.



El lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los puntos P y Q determinan el plano π_1 perpendicular al segmento $\overline{PQ}$ que pasa por su punto medio. El plano π_1 puede obtenerse de varias formas, por ejemplo considerando el punto genérico del espacio A(x, y, z), tal que $\overline{PA}=\overline{QA}$:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{PA}=\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2+(z-1)^2}\\ \\ \overline{QA}=\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2}\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2+(z-1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2} \;\;;;$$

$$(x-4)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2 \;\;;;$$

$$x^2-8x+16+y^2-4y+4=x^2-6x+9+y^2-6y+9 \;\;;;\;\; 2x-2y-2=0 \;\Rightarrow\; \underline{\pi_1 \equiv x-y-1=0}$$

La recta r es la intersección de los planos $\pi \;\; y \;\; \pi_1$: $r \equiv \begin{cases} x-y-2z+3=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$, cuya expresión por unas ecuaciones paramétricas puede obtenerse haciendo $\underline{y=\lambda}$:

www.yoquieroaprobar.es

$$r \equiv \begin{cases} x - y - 2z + 3 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 2z = -3 + \lambda \\ \underline{x = 1 + \lambda} \end{array} \right\} \rightarrow 2z = x + 3 - \lambda = 1 + \lambda + 3 - \lambda = 4 \;;;\; \underline{z = 2}$$

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases}}$$. Un punto genérico de r es de la forma $R(1+\lambda,\ \lambda,\ 2)$.

Como tiene que ser $\overline{PR} = \overline{QR} = \overline{PQ}$:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(3-4)^2 + (3-2)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1+1} = \underline{\sqrt{2}\ unid. = \overline{PQ}}$$

$$\overline{PR} = \sqrt{(1+\lambda-4)^2 + (\lambda-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{(\lambda-3)^2 + (\lambda-2)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \;;;$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 + \lambda^2 - 4\lambda + 4 + 1 = 2 \;;;\; 2\lambda^2 - 10\lambda + 12 = 0 \;;;\; \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \;;;$$

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \Rightarrow \underline{\underline{R_1(4,\ 3,\ 2)}} \\ \\ \lambda_2 = 2 \Rightarrow \underline{\underline{R_2(3,\ 2,\ 2)}} \end{cases}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

GRUPO 2

OPCIÓN C

1º) Calcula los siguientes límites: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}$ y $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{L\sqrt{1-\cos x}}{L(1-\cos x)}$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}} = \frac{\infty-\infty}{\infty-\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow$ Multiplicando y dividiendo por las conjugadas del numerador y denominador, resulta:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)}{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{[(x+1)-(x-1)]\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)}{[(x+2)-(x-2)]\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1-x+1)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)}{(x+2-x+2)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)}{4\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)} \Rightarrow \left(Dividiendo\ \ numerador\ \ y\ \ denominador\ \ por\ \ \sqrt{x}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{\frac{x+2}{x}}+\sqrt{\frac{x-2}{x}}}{2\left(\sqrt{\frac{x+1}{x}}+\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)} = \frac{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}{2\left(\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}\right)} = \frac{2}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{L\sqrt{1-\cos x}}{L(1-\cos x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2}L(1-\cos x)}{L(1-\cos x)} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{L(1-\cos x)}{L(1-\cos x)} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

****

www.yoquieroaprobar.es

2º) Halla el máximo relativo, el mínimo relativo y la asíntota oblicua de la función $f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x-1}$.

Existe un máximo relativo para los valores reales de x que anulan la primera derivada y hacen negativa la segunda derivada y, existe un mínimo relativo para los valores reales de x que anulan la primera derivada y hacen positiva la segunda derivada.

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(x-1)-(x^2+2x-2)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x+2x-2-x^2-2x+2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\underline{\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}=f'(x)}$$

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}=0 \;;;\; x(x-2)=0 \;\Rightarrow\; \underline{x_1=0} \;;;\; \underline{x_2=2}$$

$$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x)\cdot 2(x-1)\cdot 1}{(x-1)^4}=\frac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x)}{(x-1)^3}=$$

$$=\frac{2x^2-2x-2x+2-x^2+2x}{(x-1)^3}=\underline{\frac{x^2-2x+2}{(x-1)^3}=f''(x)}$$

$$f''(x)=\frac{x^2-2x+2}{(x-1)^3} \;\Rightarrow\; f''(0)=\frac{2}{(-1)^3}=-2<0 \;\Rightarrow \underline{\textit{Máximo relativo para } x=0}$$

$$f(0)=\frac{-2}{-1}=2 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\textit{Máximo relativo}: \; P(0,\ 2)}}$$

$$f''(x)=\frac{x^2-2x+2}{(x-1)^3} \;\Rightarrow\; f''(2)=\frac{4-4+2}{1^3}=2>0 \;\Rightarrow \underline{\textit{Mínimo relativo para } x=2}$$

$$f(2)=\frac{4+4-2}{2-1}=6 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\textit{Mínimo relativo}: \; Q(2,\ 6)}}$$

Las asíntotas oblicuas son de la forma y = mx + n, siendo:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-2}{x(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-2}{x^2-x}=\underline{1=m}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-2-x^2+x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x-2}{x-1}=\underline{3=n}$$

La función $f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x-1}$ tiene como <u>asíntota oblicua la recta y = x + 3.</u>

****

www.yoquieroaprobar.es

OPCIÓN D

1º) Dada la función $f(x) = x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, demuestra que existe $\alpha \in (1,\ 2)$ al que $f'(\alpha) = -2$. Menciona los resultados teóricos que utilices.

Para resolver este ejercicio tenemos que aplicar el Teorema del Valor Medio o de Lagrange, que dice:

Si f es una función continua en [a, b] y derivable en (a, b), entonces existe al menos un punto $\alpha \in (a, b)$ que cumple: $f'(\alpha) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

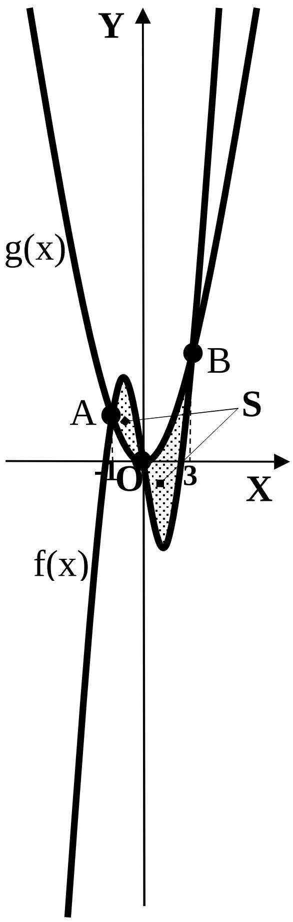
$$f'(\alpha) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(x) = \cos\frac{\pi x}{2} - x \cdot \frac{\pi}{2} \cdot sen\frac{\pi x}{2} = \\ = \cos\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi x}{2} \cdot sen\frac{\pi x}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(\alpha) = \cos\frac{\pi\alpha}{2} - \frac{\pi\alpha}{2} \cdot sen\frac{\pi\alpha}{2} = \frac{2\cos\pi - \cos\frac{\pi}{2}}{2 - 1} = \frac{-2 - 0}{1} = \underline{\underline{-2 = f'(\alpha)\ c.\ q.\ d.}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

2º) Halla los puntos en que se cortan las funciones $f(x)=x^3-3x$ y $g(x)=2x^2$ y calcula el área de la región del plano encerrada entre sus gráficas.



Los puntos de corte de las funciones son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3-3x \\ \\ g(x)=2x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \;\; x^3-3x=2x^2 \;\;;;\;\; x^3-2x^2-3x=0 \;\;;;$$

$$x\left(x^2-2x-3\right)=0 \;\;;;\;\; \underline{x_1=0} \;\rightarrow\; \underline{O(0,\ 0)} \;\;;;\;\; x^2-2x-3=0$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2\pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_2=-1 \;\rightarrow\; \underline{A(-1,\ 2)} \\ \\ x_3=3 \;\rightarrow\; \underline{B(3,\ 18)} \end{cases}$$

La representación gráfica, aproximada, de la situación se puede observar en el gráfico.

Teniendo en cuenta las ordenadas de las funciones, que para valores de x negativos son mayores los de f(x) y para valores positivos de x son mayores los de g(x), el valor de la superficie pedida es:

$$S=\int_{-1}^{0}\left[f(x)-g(x)\right]\cdot dx+\int_{0}^{3}\left[g(x)-f(x)\right]\cdot dx=\int_{-1}^{0}\left[\left(x^3-3x\right)-2x^2\right]\cdot dx+\int_{0}^{3}\left[2x^2-\left(x^3-3x\right)\right]\cdot dx=$$

$$=\int_{-1}^{0}\left(x^3-2x^2-3x\right)\cdot dx+\int_{0}^{3}\left(-x^3+2x^2+3x\right)\cdot dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{3}=$$

$$=0-\left[\frac{(-1)^4}{4}-\frac{2\cdot(-1)^3}{3}-\frac{3\cdot(-1)^2}{2}\right]+\left(-\frac{3^4}{4}+\frac{2\cdot 3^3}{3}+\frac{3\cdot 3^2}{2}\right)=-\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{3}{2}-\frac{81}{4}+18+\frac{27}{2}=$$

$$=18+\frac{30}{2}-\frac{82}{4}-\frac{2}{3}=18+15-\frac{41}{2}-\frac{2}{3}=33-\frac{41}{2}-\frac{2}{3}=\frac{198-123-4}{6}=\frac{198-127}{6}=\underline{\underline{\frac{71}{6}\,u^2=S}}\,.$$

****

www.yoquieroaprobar.es