

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE NAVARRA****SEPTIEMBRE - 2008**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Responde a una opción del Grupo 1 y a una opción del Grupo 2.

GRUPO 1**OPCIÓN A**1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:
$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ 2x + (a+1)y = 2 \\ 2x + (a+1)y + (a^2 - 1)z = a + 3 \end{cases}.$$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & a+1 & 0 \\ 2 & a+1 & a^2-1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & a+1 & 0 & 2 \\ 2 & a+1 & a^2-1 & a+3 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & a+1 & 0 \\ 2 & a+1 & a^2-1 \end{vmatrix} = 2(a+1)(a^2-1) - 4(a+1) + 4(a+1) - 2(a^2-1) =$$

$$= 2(a+1)(a^2-1) - 2(a^2-1) = 2(a^2-1)(a+1-1) = 2a(a^2-1) = 0 \Rightarrow \underline{a_1=0} \;; \; \underline{a_2=1} \;; \; \underline{a_3=-1}$$

$$\text{Para } \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 1 \\ a \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^\circ \text{ incógnitas} \Rightarrow \text{Compatible Deter min ado}$$

$$\text{Para } a=0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango } M' \Rightarrow \{C_1 = 2C_2\} \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -4 + 2 + 6 = 4 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 3}$$

$$\text{Para } a=1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango } M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{C_1, C_2, C_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -8 + 8 = 0 \\ \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 4 - 8 - 8 = 4 \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 3}$$

$$\text{Para } \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = 2 ; ; \text{Rango } M' = 3 \Rightarrow \text{Incompatible}$$

$$\text{Para } a=-1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango } M' \Rightarrow \{C_2 = -2C_1\} \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 2}$$

$$\text{Para } a=-1 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 < n^{\circ} \text{ incógnitas} \Rightarrow \underline{\text{Compatible Indeterminado}}$$

Resolvemos los casos de compatibilidad.

Para $a \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq -1$ el sistema es compatible determinado; resolvemos aplicando la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & a+1 & 0 \\ a+3 & a+1 & a^2-1 \end{vmatrix}}{2a(a^2-1)} = \frac{-4(a+1) + 2(a+1)(a+3) - 2(a+1)(a-1)}{2a(a+1)(a-1)} = \frac{-4 + 2(a+3) - 2(a-1)}{2a(a-1)} =$$

$$= \frac{-4 + 2a + 6 - 2a + 2}{2a(a-1)} = \frac{4}{2a(a-1)} = \frac{2}{a(a-1)} = x$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & a+3 & a^2-1 \end{vmatrix}}{2a(a^2-1)} = \frac{4(a^2-1) - 4(a+3) + 8}{2a(a+1)(a-1)} = \frac{4a^2 - 4 - 4a - 12 + 8}{2a(a-1)(a+1)} = \frac{4a^2 - 4a - 8}{2a(a-1)(a+1)} =$$

$$= \frac{2a^2 - 2a - 4}{a(a-1)(a+1)} = \frac{2(a^2 - a - 2)}{a(a-1)(a+1)} \stackrel{(*)}{=} \frac{2(a+1)(a-2)}{a(a-1)(a+1)} = \frac{2(a-2)}{a(a-1)} = y$$

$$(*) \quad a^2 - a - 2 = 0 \quad ; ; \quad a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow a_1 = -1 \quad ; ; \quad a_2 = 2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = (a+1)(a-2)$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & a+1 & 2 \\ 2 & a+1 & a+3 \end{vmatrix}}{2a(a^2-1)} = \frac{2(a+1)(a+3) + 4 - 4(a+1) - 2(a+3)}{2a(a+1)(a-1)} = \frac{2(a+1)(a+3) + 4 - 4a - 4 - 2a - 6}{2a(a+1)(a-1)} =$$

$$= \frac{2(a+1)(a+3) - 6a - 6}{2a(a+1)(a-1)} = \frac{2(a+1)(a+3) - 6(a+1)}{2a(a+1)(a-1)} = \frac{(a+3) - 3}{a(a-1)} = \frac{a}{a(a-1)} = z$$

Para $a = -1$ resulta el sistema $\begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ 2x = 2 \\ 2x = -1 + 3 \end{cases}$, equivalente a $\begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ x = 1 \end{cases}$, que es

compatible indeterminado (como se ha comprobado anteriormente) por tener dos ecuaciones con tres incógnitas. Parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo z , resulta:

$$\left. \begin{matrix} 2x + y - 2z = 0 \\ x = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow 2 + y - 2\lambda = 0 \quad ; ; \quad \underline{y = -2 + 2\lambda}$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \quad \forall \lambda \in R$$

2º) Halla la ecuación continua de la recta r que pasa por el punto $P(1, 0, 1)$ y no corta al plano $\pi \equiv 3x - y - z + 1 = 0$ ni al plano π_1 que pasa por los puntos $Q_1(1, -1, 1)$, $Q_2(0, 1, -2)$ y $Q_3(-1, 0, 1)$.

La recta r tiene que ser paralela a la recta s que determinan los planos π y π_1 .

El plano π_1 tiene como vectores directores a:

$$\vec{u} = \overrightarrow{Q_1Q_2} = Q_2 - Q_1 = (0, 1, -2) - (1, -1, 1) = (-1, 2, -3)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{Q_1Q_3} = Q_3 - Q_1 = (-1, 0, 1) - (1, -1, 1) = (-2, 1, 0)$$

La expresión general del plano π_1 , tomando, por ejemplo el punto $Q_3(-1, 0, 1)$, es la siguiente: $\pi_1(Q_3; \vec{u}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$;; $-(z-1) + 6y + 4(z-1) + 3(x+1) = 0$;;

$$3(x+1) + 6y + 3(z-1) = 0 \quad ;; \quad (x+1) + 2y + (z-1) = 0 \quad ;; \quad x+1+2y+z-1=0 \quad ;; \quad \underline{\pi_1 \equiv x+2y+z=0}$$

La recta s que determinan los planos π y π_1 es $s \equiv \begin{cases} 3x - y + z + 1 = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$, cuya expresión por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$s \equiv \begin{cases} 3x - y - z + 1 = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = -1 + \lambda \\ x + 2y = -\lambda \end{cases} \quad \begin{cases} 6x - 2y = -2 + 2\lambda \\ x + 2y = -\lambda \end{cases} \Rightarrow 7x = -2 + \lambda \quad ;;$$

$$\underline{x = -\frac{2}{7} + \frac{1}{7}\lambda} \quad ;; \quad \begin{cases} 3x - y = -1 + \lambda \\ x + 2y = -\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x + y = 1 - \lambda \\ 3x + 6y = -3\lambda \end{cases} \Rightarrow 7y = 1 - 4\lambda \quad ;; \quad \underline{y = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -\frac{2}{7} + \frac{1}{7}\lambda \\ y = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \text{Vector director: } \underline{\vec{w} = (1, -4, 7)}$$

La recta r es la que pasa por P y tiene como vector director a $\vec{w} = (1, -4, 7)$:

$$\underline{\underline{r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z-1}{7}}}$$

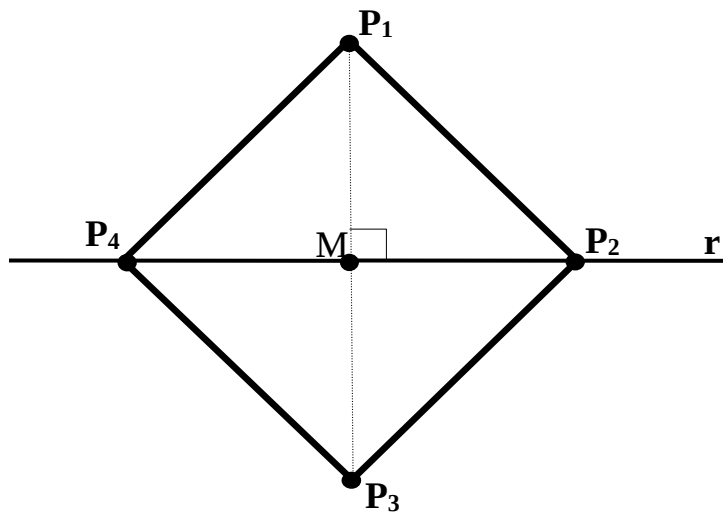
OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & t \end{pmatrix}$, calcula el valor de t para que se cumpla $A \cdot B = B \cdot A$.

$$\left. \begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & -1+t^2 \\ 0+0 & -0+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & t^2-1 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} = A \cdot B \\ B \cdot A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0 & 2t-2 \\ 0+0 & 0+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2t-2 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} = B \cdot A \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & t^2-1 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2t-2 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 - 1 = 2t - 2 \quad ; ; \quad t^2 - 2t + 1 = 0 \quad ; ; \quad (t-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{t=1}}$$

2º) Se sabe que los puntos $P_1(2, -3, 3)$ y $P_3(0, 1, -1)$ son vértices de un cuadrado C. Halla los otros dos vértices de C, sabiendo que están en la recta $r \equiv \frac{x-3}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{2}$.



El punto medio del segmento de extremos los puntos $P_1(2, -3, 3)$ y $P_3(0, 1, -1)$ es $M(1, -1, 1)$, que es el centro del cuadrado, por lo cual equidista de los cuatro vértices del cuadrado.

La distancia $\overline{MP_1}$ es:

$$\begin{aligned}\overline{MP_1} &= \sqrt{(2-1)^2 + (-3+1)^2 + (3-1)^2} = \\ &= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{1+4+4} = \underline{3}\end{aligned}$$

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$ y sus puntos tienen una expresión de la forma $P(3 - 2\lambda, -2 + \lambda, -1 + 2\lambda)$.

Las distancias $\overline{MP_2}$ y $\overline{MP_4}$ son iguales e igual a 3:

$$\overline{MP_2} = \sqrt{(3-2\lambda-1)^2 + (-2+\lambda+1)^2 + (-1+2\lambda-1)^2} = \sqrt{(2-2\lambda)^2 + (\lambda-1)^2 + (2\lambda-2)^2} = 3 \;;$$

$$(2-2\lambda)^2 + (\lambda-1)^2 + (2\lambda-2)^2 = 9 \;; \quad 4-8\lambda+4\lambda^2 + \lambda^2-2\lambda+1+4\lambda^2-8\lambda+4=9 \;;$$

$$9\lambda^2 - 18\lambda + 9 = 9 \;; \quad 9\lambda^2 - 18\lambda = 0 \;; \quad \lambda^2 - 2\lambda = 0 \;; \quad \lambda(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 0} \;; \quad \underline{\lambda_2 = 2}$$

Los puntos pedidos son $P_2(3, -2, -1)$ y $P_4(-1, 0, 3)$.

GRUPO 2

OPCIÓN C

1º) Halla la integral indefinida $I = \int x^2 \cdot \operatorname{sen}(2x) \cdot dx$.

$$I = \int x^2 \cdot \operatorname{sen}(2x) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 \rightarrow du = 2x \, dx \\ \operatorname{sen}(2x) \cdot dx = dv \rightarrow v = -\frac{1}{2} \cos(2x) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 \cdot \left[-\frac{1}{2} \cos(2x) \right] - \int -\frac{1}{2} \cos(2x) \cdot 2x \cdot dx = -\frac{x^2}{2} \cos(2x) + \int x \cdot \cos(2x) \cdot dx =$$

$$= -\frac{x^2}{2} \cos(2x) + I_1 = I \quad (*)$$

$$I_1 = \int x \cdot \cos(2x) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ \cos(2x) \cdot dx = dv \rightarrow v = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) - \int \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) \cdot dx = \frac{x}{2} \operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{2} \int \operatorname{sen}(2x) \cdot dx =$$

$$= \frac{x}{2} \operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \cos(2x) = \frac{x}{2} \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x) = I_1$$

Sustituyendo en valor obtenido de I_1 en el valor de I dado en (*), queda:

$$I = -\frac{x^2}{2} \cos(2x) + \frac{x}{2} \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x) + C = \frac{1}{4} (1 - 2x^2) \cos(2x) + \frac{x}{2} \operatorname{sen}(2x) + C$$

$$I = \frac{1}{4} [(1 - 2x^2) \cos(2x) + 2x \cdot \operatorname{sen}(2x)] + C$$

2º) Dada la función $f(x) = (1 - x^2) \cdot \cos(\pi x)$, demuestra que existe $c \in (1, 2)$ tal que $f'(c) = -2$. Menciona los resultados teóricos que utilices.

El Teorema de Bolzano establece que “si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ son de distinto signo, existe por lo menos un valor c entre a y b para el cual $f(c) = 0$ ” y, generalizando el Teorema de Bolzano, la Propiedad de Darboux dice que “si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y k es un número real cualquiera comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un valor c entre a y b para el cual $f(c) = k$.”

La función $f'(x) = -2x \cos(\pi x) - \pi(1 - x^2) \sin(\pi x)$ es continua en todo su dominio, que es $\mathbb{R}$ por ser la suma algebraica de dos funciones continuas, por lo cual será continua en cualquier intervalo finito considerado, por ejemplo, $(1, 2)$ y, por consiguiente le es aplicable el Teorema de Bolzano y la Propiedad de Darboux.

$$f'(x) = -2x \cos(\pi x) - \pi(1 - x^2) \sin(\pi x) \Rightarrow \begin{cases} f'(1) = -2 \cos \pi - \pi(1 - 1^2) \sin \pi = -2 \cdot (-1) - 0 = 2 \\ f'(2) = -4 \cos(2\pi) - \pi(-3) \sin(2\pi) = -4 \cdot 1 + 0 = -4 \end{cases}$$

Por ser $f'(1) > -2 > f'(2)$, $\exists c \in (1, 2)$ tal que $f'(c) = -2$, c.q.d.

OPCIÓN D

1º) Halla los siguientes límites: a) $\lim_{x \rightarrow 0} [\cos(2x)]^{\frac{1}{\sin(x^2)}}$ b) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1 - \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{L(4x^2)}$.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\cos(2x)]^{\frac{1}{\sin(x^2)}} = 1^{\frac{1}{0}} = 1^\infty \Rightarrow \text{Indeterminado} \Rightarrow L \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} [\cos(2x)]^{\frac{1}{\sin(x^2)}} \right\} = LA ; ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} L[\cos(2x)]^{\frac{1}{\sin(x^2)}} = LA \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\sin(x^2)} \cdot L[\cos(2x)] \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{L[\cos(2x)]}{\sin(x^2)} = \frac{L1}{\sin 0} =$$

$$= \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Ind.} \Rightarrow \{L' \text{ Hopital}\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin(2x)}{2x \cdot \cos(x^2)} =$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(2x) \cdot \cos(x^2)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} = - \frac{1}{1 \cdot 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} =$$

$$= - \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Ind.} \Rightarrow \{L' \text{ Hopital}\} \Rightarrow - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(2x)}{1} = -2 \cdot 1 = -2 = LA = A = e^{-2} = \frac{1}{e^2} = A$$

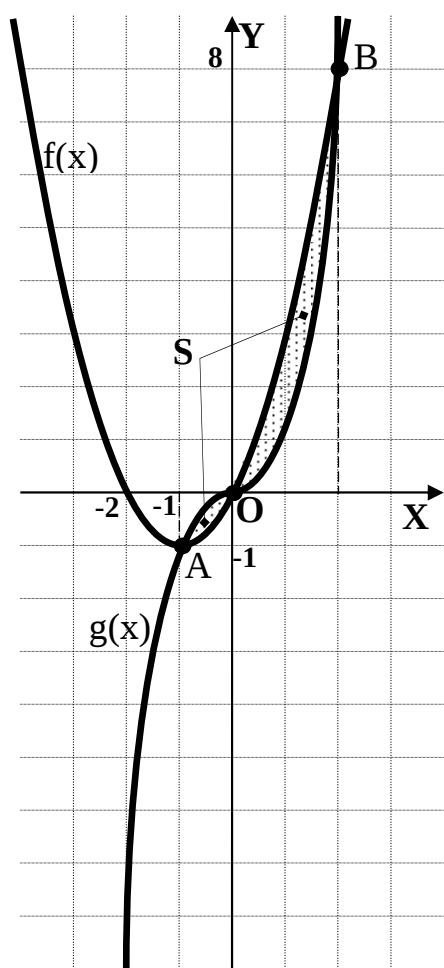
$$\lim_{x \rightarrow 0} [\cos(2x)]^{\frac{1}{\sin(x^2)}} = \frac{1}{e^2}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1 - \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{L(4x^2)} = \frac{1 - \tan \frac{\pi}{4}}{L1} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow \{L' \text{ Hopital}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{0 - \frac{\pi}{2}}{\frac{\cos^2 \frac{\pi x}{2}}{4x^2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{2 \cos^2 \frac{\pi x}{2}}{x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\pi x}{\cos^2 \frac{\pi x}{2}} = \frac{\pi \cdot \frac{1}{2}}{\cos^2 \pi} = \frac{\pi}{2 \cdot (-1)^2} = \frac{\pi}{2}$$

2º) Halla los puntos en que se cortan las funciones $f(x) = x(x+2)$ y $g(x) = x^3$ y calcula el área de la región del plano encerrada entre sus gráficas.



Los puntos de corte de las funciones se obtienen igualando sus ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x(x+2) \\ g(x) = x^3 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + 2x = x^3 \quad ; \quad x^3 - x^2 - 2x = 0 \quad ;$$

$$x(x^2 - x - 2) = 0 \quad ; \quad \underline{x_1 = 0} \rightarrow \underline{O(0, 0)} \quad ; \quad x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -1 \rightarrow \underline{A(-1, -1)} \\ x_3 = 2 \rightarrow \underline{B(2, 8)} \end{cases}$$

La representación gráfica, aproximada, de la situación se puede observar en el gráfico.

Teniendo en cuenta las ordenadas de las funciones, que para valores de x negativos son mayores los de $g(x)$ y para valores positivos de x son mayores los de $f(x)$, el valor de la superficie pedida es:

$$S = \int_{-1}^0 [g(x) - f(x)] \cdot dx + \int_0^2 [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_{-1}^0 [x^3 - (x^2 + 2x)] \cdot dx + \int_0^2 [(x^2 + 2x) - x^3] \cdot dx =$$

$$= \int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x) \cdot dx + \int_0^2 (-x^3 + x^2 + 2x) \cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^2 =$$

$$= 0 - \left[\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 \right] + \left(-\frac{2^4}{4} + \frac{2^3}{3} + 2^2 \right) - 0 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 - 4 + \frac{8}{3} + 4 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{7}{3} =$$

$$= \frac{12 - 3 + 28}{12} = \underline{\underline{\frac{37}{12} \text{ u}^2 = S}}$$
