PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

JUNIO - 2009

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responde a una opción del Grupo 1 y a una opción del Grupo 2.

GRUPO 1

OPCIÓN A

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real α y resuélvelo en los casos en que es compatible: $\begin{cases} x+y-az=0 \\ -x+ay+az=2a+1 \\ x+y+(a^3-2a)z=a-1 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ -1 & a & a \\ 1 & 1 & a^3-2a \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -a & 0 \\ -1 & a & a & 2a+1 \\ 1 & 1 & a^3-2a & a-1 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ -1 & a & a \\ 1 & 1 & a^3-2a \end{vmatrix}=a\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a^2-2 \end{vmatrix}=a\cdot\left[a(a^2-2)+1+1+a-1+(a^2-2)\right]=$$

$$=a(a^3-2a+a+1+a^2-2)=a(a^3+a^2-a-1)=0 \;\Rightarrow\; \underline{a_1=0}$$

Resolviendo por Ruffini la ecuación $a^3+a^2-a-1=0$, se obtienen las raíces siguientes: $\underline{a_2=a_3=-1}$ *y* $\underline{a_4=1}$.

$$Para \begin{Bmatrix} a\neq 0 \\ a\neq -1 \\ a\neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \; Rango\;\; M = Rango\;\; M' = 3 = n^o\; incóg. \;\Rightarrow\; Compatible\;\; \det er\min ado$$

www.yoquieroaprobar.es

$$\underline{Para\ \ a=0}\ \Rightarrow\ M'=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\-1&0&0&1\\1&1&0&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\ Equivalente\ \ a\ \ M'=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\ Rango\ \ M'\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \begin{vmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\1&1&-1\end{vmatrix}=1-1-1=-1\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M'=3}$$

$$\underline{\underline{Para\ a=0\Rightarrow\ Rango\ \ M=2\ \ ;;\ \ Rango\ M'=3\ \Rightarrow\ Incompatible}}$$

$$\underline{Para\ \ a=-1}\ \Rightarrow\ \begin{cases}M=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&-1\\1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\ \{C_1=C_2=C_3\}\Rightarrow\ \ \underline{Rango\ \ M=1}\\ M'=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\-1&-1&-1&-1\\1&1&1&-2\end{pmatrix}\Rightarrow\ \{C_1=C_2=C_3\}\Rightarrow\ \ \underline{Rango\ \ M'=2}\end{cases}$$

$$\underline{\underline{Para\ a=-1\Rightarrow\ Rango\ \ M=1\ \ ;;\ \ Rango\ M'=2\ \Rightarrow\ Incompatible}}$$

$$\underline{Para\ \ a=1}\ \Rightarrow\ M'=\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\-1&1&1&3\\1&1&-1&0\end{pmatrix}\Rightarrow\ \{F_1=F_3\}\Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para\ a=1\Rightarrow\ Rango\ \ M=Rango\ M'=2<n^{o}\ \ incóg.\ \Rightarrow\ Compatible\ \ In\det er\min ado}}$$

Resolvemos para el caso de $\begin{Bmatrix}a\neq 0\\a\neq 1\\a\neq -1\end{Bmatrix}$, compatible determinado, mediante la Regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0&1&-a\\2a+1&a&a\\a-1&1&a^3-2a\end{vmatrix}}{a\left(a^3+a^2-a-1\right)}=\frac{a\cdot\begin{vmatrix}0&1&-1\\2a+1&a&1\\a-1&1&a^2-2\end{vmatrix}}{a(a-1)(a+1)^2}=\frac{(a-1)-(2a+1)+a(a-1)-(2a+1)\left(a^2-2\right)}{(a-1)(a+1)^2}=$$

$$=\frac{a-1-2a-1+a^2-a-\left(2a^3-4a+a^2-2\right)}{(a-1)(a+1)^2}=\frac{a^2-2a-2-2a^3-a^2+4a+2}{(a-1)(a+1)^2}=\frac{-2a^3+2a}{(a-1)(a+1)^2}=$$

$$=\frac{-2a\left(a^2-1\right)}{(a-1)(a+1)^2}=\frac{-2a(a+1)(a-1)}{(a-1)(a+1)^2}=\underline{\underline{\frac{-2a}{(a+1)}=x}}$$

www.yoquieroaprobar.es

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & -a\\ -1 & 2a+1 & a\\ 1 & a-1 & a^3-2a\end{vmatrix}}{a\left(a^3+a^2-a-1\right)}=\frac{a\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 2a+1 & 1\\ 1 & a-1 & a^2-2\end{vmatrix}}{a(a-1)(a+1)^2}=\frac{(2a+1)\left(a^2-2\right)+(a-1)+(2a+1)-(a-1)}{(a-1)(a+1)^2}=$$

$$=\frac{2a^3-4a+a^2-2+a-1+2a+1-a+1}{(a-1)(a+1)^2}=\frac{2a^3+a^2-2a-1}{(a-1)(a+1)^2}=\frac{(a-1)(a+1)(2a+1)}{(a-1)(a+1)^2}=\underline{\underline{\frac{2a+1}{a+1}=y}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & a & 2a+1\\ 1 & 1 & a-1\end{vmatrix}}{a\left(a^3+a^2-a-1\right)}=\frac{a(a-1)+(2a+1)-(2a+1)+(a-1)}{a(a-1)(a+1)^2}=\frac{a^2-a+a-1}{a(a-1)(a+1)^2}=\frac{a^2-1}{a(a-1)(a+1)^2}=$$

$$=\frac{(a+1)(a-1)}{a(a-1)(a+1)^2}=\underline{\underline{\frac{1}{a(a+1)}=z}}$$

Resolvemos para el caso de a = 1: compatible indeterminado. El sistema resulta $\begin{cases}x+y-z=0\\ -x+y+z=3\\ x+y-z=0\end{cases}$, equivalente al sistema $\left.\begin{matrix}x+y-z=0\\ -x+y+z=3\end{matrix}\right\}$.

Parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo $\underline{z=\lambda}$, resulta:

$$\left.\begin{matrix}x+y=\lambda\\ -x+y=3-\lambda\end{matrix}\right\}\Rightarrow 2y=3\ ;;\ \underline{y=\frac{3}{2}}\ ;;\ x=\lambda-y=\lambda-\frac{3}{2}=\underline{-\frac{3}{2}+\lambda=x}$$

$$\underline{Solución\ \ para\ \ a=1}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\left.\begin{matrix}x=-\frac{3}{2}+\lambda\\ y=\frac{3}{2}\\ z=\lambda\end{matrix}\right\}\ \forall\lambda\in}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

2º) Encuentra el punto de la recta $r \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{1}$ que forma un triángulo isósceles con los puntos P(1, 3, -2) y Q(3, 1, 0).

Este problema, en teoría, tiene varias interpretaciones, dependiendo de las distancias de los puntos P y Q a r y de la distancia entra P y Q.

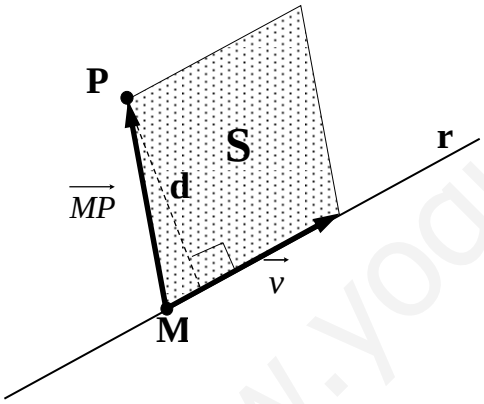
La distancia entre los puntos es:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(3-1)^2 + (1-3)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \underline{\sqrt{12} = \overline{PQ}}$$

La distancia de un punto P a la recta r se determina del modo siguiente:

La recta r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases}$ y un punto genérico de la misma es $A(-2+\lambda,\ 1-2\lambda,\ -2+\lambda)$.

Un punto y un vector director de r son: $M(-2,\ 1,\ -2)$ y $\vec{v} = (1,\ -2,\ 1)$.



Teniendo en cuenta que $S = d \cdot \left|\vec{v}\right|$ y que también puede ser $S = \left|\vec{v} \wedge \overrightarrow{MP}\right|$, se deduce que la distancia es: $d(N,\ r) = \dfrac{\left|\vec{v} \wedge \overrightarrow{MP}\right|}{\left|\vec{v}\right|}$.

$$\overrightarrow{MP} = P - M = (1,\ 3,\ -2) - (-2,\ 1,\ -2) = \underline{(3,\ 2,\ 0) = \overrightarrow{MP}}$$

$$d(P,\ r) = \frac{\left|\overrightarrow{MP} \wedge \vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|} = \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{\left|2i - 6k - 2k - 3j\right|}{\sqrt{6}} = \frac{\left|2i - 3j - 8k\right|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2^2 + 3^2 + 8^2}}{\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{\sqrt{4 + 9 + 64}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{77}{6}} = \underline{\sqrt{12'83} = d(P,\ r) > \overline{PQ}}$$

La distancia del punto Q a la recta r es la siguiente:

Teniendo en cuenta que $S = d \cdot \left|\vec{v}\right|$ y que también puede ser $S = \left|\vec{v} \wedge \overrightarrow{MQ}\right|$, se

www.yoquieroaprobar.es

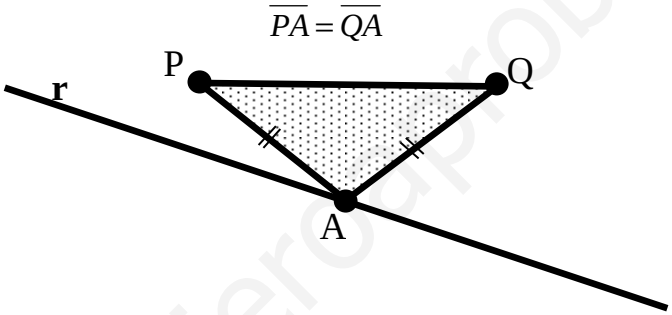
deduce que la distancia es: $d(Q,\ r)=\dfrac{\left|\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{MQ}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}$.

$\overrightarrow{MQ}=Q-M=(3,\ 1,\ 0)-(-2,\ 1,\ -2)=\underline{(5,\ 0,\ 2)=\overrightarrow{MQ}}$

$$d(Q,\ r)=\frac{\left|\overrightarrow{MQ}\wedge\overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}=\frac{\begin{Vmatrix} i & j & k \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{Vmatrix}}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{|\,2j-10k+4i-5j\,|}{\sqrt{6}}=\frac{|\,4i-3j-10k\,|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{4^2+3^2+10^2}}{\sqrt{6}}=$$

$$=\frac{\sqrt{16+9+100}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{125}{6}}=\underline{\sqrt{20'83}=d(Q,\ r)>\overline{PQ}}$$

La única solución posible es que $\overline{PA}=\overline{QA}$



$$\overline{PA}=\sqrt{(-2+\lambda-1)^2+(1-2\lambda-3)+(-2+\lambda+2)^2}=\sqrt{(\lambda-3)^2+(-2\lambda-2)^2+\lambda^2}=$$

$$=\sqrt{\lambda^2-6\lambda+9+4\lambda^2+8\lambda+4+\lambda^2}=\underline{\sqrt{6\lambda^2+2\lambda+13}=\overline{PA}}$$

$$\overline{QA}=\sqrt{(-2+\lambda-3)^2+(1-2\lambda-1)+(-2+\lambda-0)^2}=\sqrt{(\lambda-5)^2+(-2\lambda)^2+(\lambda-2)^2}=$$

$$=\sqrt{\lambda^2-10\lambda+25+4\lambda^2+\lambda^2-4\lambda+4}=\underline{\sqrt{6\lambda^2-14\lambda+29}=\overline{QA}}$$

$$\overline{PQ}=\overline{PA}\ \Rightarrow\ \sqrt{6\lambda^2+2\lambda+13}=\sqrt{6\lambda^2-14\lambda+29}\ ;;\ 2\lambda+13=-14\lambda+29\ ;;\ 16\lambda=16\ ;;\ \underline{\lambda=1}$$

<u>El punto de la recta es A(-1, -1, -1).</u>

****

www.yoquieroaprobar.es

OPCIÓN B

1º) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & -7\\ 1 & -3\end{pmatrix}$, calcula A^3 y A^{38}.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix}2 & -7\\ 1 & -3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & -7\\ 1 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4-7 & -14+21\\ 2-3 & -7+9\end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix}-3 & 7\\ -1 & 2\end{pmatrix} = A^2}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix}-3 & 7\\ -1 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & -7\\ 1 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6+7 & 21-21\\ -2+2 & 7-6\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = I = A^3}}$$

Teniendo en cuenta que $A^3 = I$, la potencia n-ésima de A es equivalente a la potencia de A cuyo exponente es el resto de la división de n entre tres.

En general: $A^n = A^r \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c|c} n & 3 \\ \hline (r) & c \end{array}$

En el caso que nos ocupa es: $\Rightarrow \quad \begin{array}{c|c} 38 & 3 \\ \hline (2) & 12 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \underline{A^{38} = A^2}$

$$\underline{\underline{A^{38} = A^2 = \begin{pmatrix}-3 & 7\\ -1 & 2\end{pmatrix}}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

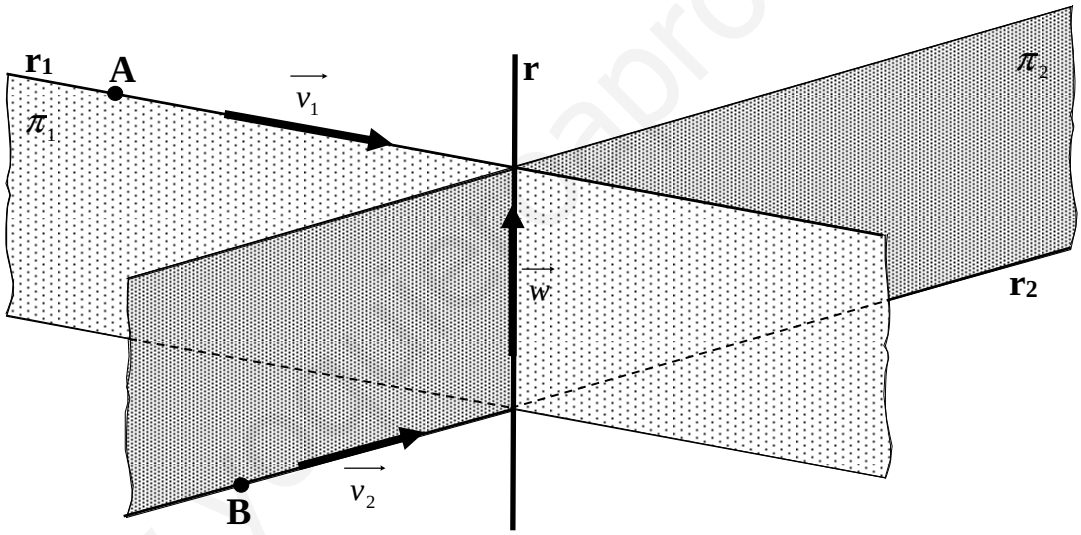
2º) Halla la ecuación continua de la recta r que es perpendicular común a las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x+3y-z+8=0 \\ x+4y-2z+12=0 \end{cases}$ y $r_2 \equiv \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-5}{-2}$.

La expresión de la recta r_1 por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x+3y-z+8=0 \\ x+4y-2z+12=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3y=-8+\lambda \\ x+4y=-12+2\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x-3y=8-\lambda \\ x+4y=-12+2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{y=-4+\lambda} \;;;$$

$$x=-8+\lambda-3y=-8+\lambda+12-3\lambda=\underline{4-2\lambda=x} \Rightarrow \underline{r_1 \equiv \begin{cases} x=4-2\lambda \\ y=-4+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}$$

El procedimiento para hallar la ecuación de la recta r se refleja en el gráfico siguiente.



1.- Determinamos los puntos $A \in r_1$ y $B \in r_2$: <u>A(4, -4, 0)</u> y <u>B(0, -2, 5)</u>.

2.- Hallamos unos vectores directores de las rectas: $\underline{\vec{v}_1 = (-2,\ 1,\ 1)}$ y $\underline{\vec{v}_2 = (1,\ 1,\ -2)}$.

3.- Obtenemos un vector $\vec{w}$, perpendicular a $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, que es cualquier vector que sea linealmente dependiente del producto vectorial de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$:

$$\vec{w} = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2i + j - 2k - k - i - 4j = -3i - 3j - 3k \Rightarrow \underline{\vec{w} = (1,\ 1,\ 1)}.$$

4.- Determinamos los planos π_1 y π_2, de la forma siguiente:

www.yoquieroaprobar.es

$$\pi_1\left(A;\ \overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{w}\right)\equiv\begin{vmatrix} x-4 & y+4 & z \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0\ ;;\ (x-4)+(y+4)-2z-z-(x-4)+2(y+4)=0\ ;;$$

$$3(y+4)-3z=0\ ;;\ y+4-z=0\ \Rightarrow\ \underline{\pi_1\equiv y-z+4=0}$$

$$\pi_2\left(B;\ \overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{w}\right)\equiv\begin{vmatrix} x & y+2 & z-5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0\ ;;\ x-2(y+2)+(z-5)-(z-5)+2x-(y-2)=0\ ;;$$

$$3x-3(y+2)=0\ ;;\ x-(y+2)=0\ \Rightarrow\ \underline{\pi_2\equiv x-y-2=0}$$

La recta r pedida es la que determinan los planos π_1 y π_2: $r\equiv\begin{cases} y-z+4=0 \\ x-y-2=0 \end{cases}$.

La expresión continua de r se obtiene de la siguiente forma:

$$r\equiv\begin{cases} y-z+4=0 \\ x-y-2=0 \end{cases}\ \Rightarrow\ \underline{y=\lambda}\ ;;\ \underline{x=2+\lambda}\ ;;\ \underline{z=4+\lambda}\ \Rightarrow\ \underline{r\equiv\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=\lambda \\ z=4+\lambda \end{cases}}\ .$$

$$\underline{\underline{r\equiv\frac{x-2}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{1}}}\ \ o\ \ también:\ \underline{\underline{r\equiv x-2=y=z-4}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

GRUPO 2

OPCIÓN C

1º) Halla las integrales indefinidas: $I_1 = \int \frac{dx}{x^2 - 2x - 3}$ *e* $I_2 = \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$.

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 - 2x - 3} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x^2 - 2x - 3 = 0 \;;;\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 \;\Rightarrow\; x_1 = -1 \;;;\; x_2 = 3 \\ x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; I_1 = \int \frac{dx}{x^2 - 2x - 3} = \int \frac{dx}{(x+1)(x-3)} = \int \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} \right) \cdot dx = \underline{A \int \frac{dx}{x+1} + B \int \frac{dx}{x-3} = I_1} \quad (*)$$

$$\frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} = \frac{Ax - 3A + Bx + B}{x^2 - 2x - 3} = \frac{(A+B)x + (-3A+B)}{x^2 - 2x - 3} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} A + B = 0 \\ -3A + B = 1 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} A + B = 0 \\ 3A - B = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow\; 4A = -1 \;;;\; \underline{A = -\frac{1}{4}} \;;;\; \underline{B = \frac{1}{4}} \;\Rightarrow$$ Sustituyendo éstos valores en (*):

$$I_1 = -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-3} = \frac{1}{4} \left[L|x-3| - L|x+1| \right] + C = \underline{\underline{\frac{1}{4} L \left| \frac{x-3}{x+1} \right| + C = I_1}}$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 2} \;\Rightarrow\; \left\{ x^2 - 2x + 2 = 0 \;;;\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} \;\Rightarrow\; x \notin R \right\} \;\Rightarrow\; I_2 = \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 1 + 1} =$$

$$= \int \frac{dx}{(x-1)^2 + 1} \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} x - 1 = t \\ dx = dt \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; I_2 = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = arc\ tag\ t + C = \underline{\underline{arc\ tag\,(x-1) + C = I_2}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

2º) Demuestra que la función $f(x)=L(1+x\,sen\ x)$ tiene un máximo relativo en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$. Menciona los resultados teóricos que utilices.

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo en un punto es que su derivada se anule para ese punto: $f'(x)=\frac{sen\ x+x\cos\ x}{1+x\,sen\ x}$.

La función f'(x) es continua en su dominio, que es R, por lo cual es continua y derivable en cualquier intervalo considerado, por lo cual le es aplicable el Teorema de Bolzano, que dice que: "si una función f es continua en un intervalo cerrado [a, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c\in(a,\ b)$ tal que $f(c)=0$".

Aplicando el Teorema de Bolzano a la función $f'(x)=\frac{sen\ x+x\cos\ x}{1+x\,sen\ x}$ en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$:

$$f'(x)=\frac{sen\ x+x\cos\ x}{1+x\,sen\ x}\ \Rightarrow\ \begin{cases} f'(\frac{\pi}{2})=\dfrac{sen\ \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}}{1+\frac{\pi}{2}\cdot sen\ \frac{\pi}{2}}=\dfrac{1+\frac{\pi}{2}\cdot 0}{1+\frac{\pi}{2}\cdot 1}=\dfrac{1}{\frac{2+\pi}{2}}=\dfrac{2}{2+\pi}>0 \\ f'(\pi)=\dfrac{sen\ \pi+\pi\cdot\cos\pi}{1+\pi\cdot sen\ \pi}=\dfrac{0+\pi\cdot(-1)}{1+\pi\cdot 0}=\dfrac{-\pi}{1}=-\pi<0 \end{cases}$$

Lo anterior demuestra que la función f(x) tiene un extremo relativo en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$. Considerando la continuidad de la función y teniendo en cuenta que la derivada es positiva para $x=\frac{\pi}{2}$ (función creciente) y negativa para $x=\pi$ (función decreciente), necesariamente la función f(x)

Tiene un máximo relativo en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$, *c.q.d.*

****

www.yoquieroaprobar.es

OPCIÓN D

1º) Demuestra que la derivada de la función $f(x)=\sqrt{sen\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{sen\ x}\right)}$ se anula en algún punto del intervalo $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$. Menciona los resultados teóricos que utilices.

$$f(x)=\sqrt{sen\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{sen\ x}\right)}=\sqrt{sen\ u}=\sqrt{z}$$

$$f'(x)=\frac{z'}{2\sqrt{z}}\ \Rightarrow\ \underline{z=sen\ u}\ ;;\ \underline{z'=u'\cdot\cos u}\ \Rightarrow\ f'(x)=\frac{u'\cdot\cos u}{2\sqrt{sen\ u}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \underline{u=\frac{\pi}{4}\cdot 3^{sen\ x}}\ ;;\ L\,u=L\,\pi-L\,4+sen\ x\cdot L\,3\ ;;\ \frac{u'}{u}=0-0+L\,3\cdot\cos\ x\ ;;$$

$$u'=u\ \cdot L\,3\cdot\cos\ x=\frac{\pi}{4}\ \cdot 3^{sen\ x}\ \cdot L\,3\cdot\cos\ x=\underline{\frac{\pi\,L\,3}{4}\ \cdot 3^{sen\ x}\cdot\cos\ x=u'}$$

$$z'=u'\cdot\cos\ u=\left(\frac{\pi\,L\,3}{4}\ \cdot 3^{sen\ x}\cdot\cos\ x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{sen\ x}\right)=\underline{\frac{\pi\,L\,3}{4}\ \cdot 3^{sen\ x}\cdot\cos\ x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{sen\ x}\right)=z'}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{\pi\,L\,3}{4}\ \cdot 3^{sen\ x}\cdot\cos\ x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{sen\ x}\right)}{2\sqrt{sen\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{sen\ x}\right)}}=\underline{\underline{\frac{\pi\ \cdot L\ 3\cdot 3^{sen\ x}\cdot\cos\ x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{sen\ x}\right)}{8\sqrt{sen\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{sen\ x}\right)}}=f'(x)}}$$

La función f'(x) es continua en R, por consiguiente le es aplicable el Teorema de Bolzano en cualquier intervalo considerado.

El Teorema de Bolzano dice que: "si una función f es continua en un intervalo cerrado [a, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c\in(a,\ b)$ tal que $f(c)=0$".

Aplicando el Teorema del Bolzano a la función f'(x) en el intervalo $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$:

$$f'(0)=\frac{\pi\ \cdot L\ 3\cdot 3^{sen\ 0}\cdot\cos\ 0\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{sen\ 0}\right)}{8\sqrt{sen\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{sen\ 0}\right)}}=\frac{\pi\ \cdot L\ 3\cdot 3^{0}\cdot 1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{0}\right)}{8\sqrt{sen\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{0}\right)}}=\frac{\pi\ \cdot L\,3\cdot\cos\frac{\pi}{4}}{8\sqrt{sen\frac{\pi}{4}}}=$$

www.yoquieroaprobar.es

$$= \frac{\pi \cdot L\,3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{8\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \frac{\pi \cdot L\,3 \cdot \sqrt{2}}{16 \cdot \frac{\sqrt[2]{2}}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi \cdot L\,3 \cdot 2}{16 \cdot \sqrt[4]{2}} = \frac{\pi \cdot L\,3}{8 \cdot \sqrt[4]{2}} = \underline{f'(0) > 0}$$

$$f'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi \cdot L\,3 \cdot 3^{sen\,\frac{\pi}{2}} \cdot \cos\tfrac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 3^{sen\,\frac{\pi}{2}}\right)}{8\sqrt{sen\left(\frac{\pi}{4} \cdot 3^{sen\,\frac{\pi}{2}}\right)}} = \frac{\pi \cdot L\,3 \cdot 3^{1} \cdot 0 \cdot \cos\frac{3\pi}{4}}{8\sqrt{sen\left(\frac{\pi}{4} \cdot 3^{1}\right)}} = \frac{0^{-}}{8\sqrt{sen\,\frac{3\pi}{4}}} = \underline{0^{-}}$$

La expresión $f'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0^{-}$ debe interpretarse que $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-}} f'(x) = 0^{-} < 0$, con lo que debemos concluir que la función f'(x) cumple los requisitos del Teorema de Bolzano en el intervalo $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, y en consecuencia:

La función $f'(x)$ se anula, al menos una vez, en el intervalo $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, c.q.d.

****

www.yoquieroaprobar.es

2º) Sabemos que las funciones $f(x)=\pi x-x^2$ y $g(x)=sen\ x$ se cortan sólo en dos puntos. Encuentra esos dos puntos y calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de f(x) y g(x).

Los puntos de corte de las funciones se hallan de la igualación de sus ecuaciones:

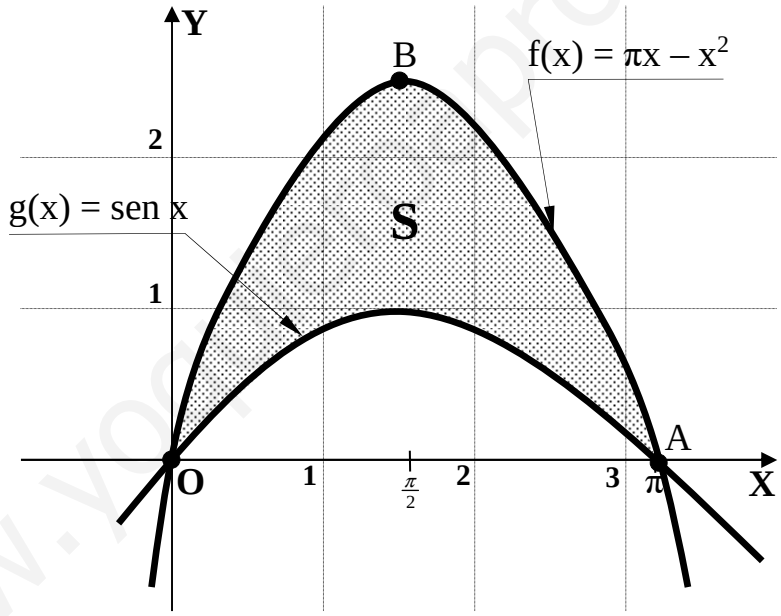
$$f(x)=g(x)\ \Rightarrow\ \pi x-x^2=sen\ x\ ;;\ x^2-\pi x+sen\ x=0\ \Rightarrow\ \underline{x_1=0}\ ;;\ \underline{x_2=\pi}\,.$$

Los puntos de corte de las funciones son O(0, 0) y $A(\pi,\ 0)$.

El punto máximo de la parábola cóncava $(\cap)$ $f(x)=\pi x-x^2$ es el siguiente:

$$f'(x)=\pi-2x=0\ ;;\ x=\frac{\pi}{2}\cong 1'57\ ;;\ f\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=\pi\cdot\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{4}\cong 2'47\ \Rightarrow\ \underline{B(1'57,\ 2'47)}.$$

La representación gráfica, aproximada, de la situación es la siguiente:



Como puede observarse, todas las ordenadas correspondientes a la función f(x) son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la función g(x) en el intervalo correspondiente al área a calcular.

$$S=\int_0^{\pi}[f(x)-g(x)]\cdot dx=\int_0^{\pi}\left[\left(\pi x-x^2\right)-sen\ x\right]\cdot dx=\int_0^{\pi}\left(\pi x-x^2-sen\ x\right)\cdot dx=\left[\frac{\pi x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\cos\ x\right]_0^{\pi}=$$

$$=\left(\frac{\pi\cdot\pi^2}{2}-\frac{\pi^3}{3}+\cos\ \pi\right)-(\cos\ 0)=\frac{\pi^3}{2}-\frac{\pi^3}{3}-1-1=\frac{3\pi^3-2\pi^3-12}{6}=\frac{\pi^3-12}{6}\cong\frac{31'01-12}{6}=$$

$$=\frac{19'01}{6}=\underline{\underline{3'17\ u^2=S}}$$

****