PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

SEPTIEMBRE - 2010

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realizar una de las dos opciones propuestas (A o B).

OPCIÓN A

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real α y resuélvelo en los casos en que es compatible: $\begin{cases} (a^2+a)x+(2a+1)y+az=1 \\ (a^2+a)x+(3a+3)y+(a+1)z=2 \\ (a+2)y-az=a+2 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a^2+a & 2a+1 & a \\ a^2+a & 3a+3 & a+1 \\ 0 & a+2 & -a \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} a^2+a & 2a+1 & a & 1 \\ a^2+a & 3a+3 & a+1 & 2 \\ 0 & a+2 & -a & a+2 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a^2+a & 2a+1 & a \\ a^2+a & 3a+3 & a+1 \\ 0 & a+2 & -a \end{vmatrix}=(a^2+a)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2a+1 & a \\ 1 & 3a+3 & a+1 \\ 0 & a+2 & -a \end{vmatrix}=(a^2+a)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2a+1 & a \\ 0 & a+2 & 1 \\ 0 & a+2 & -a \end{vmatrix}=$$

$$=(a^2+a)\begin{vmatrix} a+2 & 1 \\ a+2 & -a \end{vmatrix}=a(a+1)(a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix}=a(a+1)(a+2)(-a-1)=-a(a+1)^2(a+2)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{a_1=0} \;;;\; \underline{a_2=a_3=-1} \;;;\; \underline{a_4=-2}.$$

$$Para \begin{Bmatrix} a\neq 0 \\ a\neq -1 \\ a\neq -2 \end{Bmatrix} \Rightarrow\; Rango\;\; M = Rango\;\; M' = 3 = n^o\;\; incóg. \;\Rightarrow\; Compatible\;\; \det er\min ado$$

$$Para \;\; a=0 \;\Rightarrow\; M'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; Rango \;\; M' \;\Rightarrow\; \{C_2,\; C_3,\; C_4\} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{Rango \;\; M'=2}.$$

$$\underline{\underline{Para \;\; a=0 \Rightarrow \;\; Rango \;\; M = Rango \;\; M'=2 < n^o \;\; incóg. \;\Rightarrow\; Compatible \;\; Indeterminado}}$$

$$Para \;\; a=-1 \;\Rightarrow\; M'=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \{C_2 = C_3\} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \underline{Rango \;\; M = 1} \\ \\ \underline{Rango \;\; M'=2} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; a=-1 \Rightarrow \;\; Rango \;\; M = 1 \;\;;; \;\; Rango \;\; M'=2 \;\Rightarrow\; Incompatible}}$$

$$Para \;\; a=-2 \;\Rightarrow\; M'=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; Rango \;\; M' \;\Rightarrow\; \{C_1 = -\tfrac{2}{3}C_2\} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \{C_1,\; C_3,\; C_4\} \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2(4-2) = -4 \neq 0 \;\Rightarrow\; \underline{Rango \;\; M'=3}.$$

$$\underline{\underline{Para \;\; a=-2 \Rightarrow \;\; Rango \;\; M = 2 \;\;;; \;\; Rango \;\; M'=3 \;\Rightarrow\; Incompatible}}$$

Resolvemos para el caso de $\begin{Bmatrix} a \neq 0 \\ a \neq -1 \\ a \neq -2 \end{Bmatrix}$, (sistema compatible determinado), mediante la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2a+1 & a \\ 2 & 3a+3 & a+1 \\ a+2 & a+2 & -a \end{vmatrix}}{-a(a+1)^2(a+2)} =$$

$$= \frac{-a(3a+3)+2a(a+2)+(a+1)(a+2)(2a+1)-a(a+2)(3a+3)-(a+1)(a+2)+2a(2a+1)}{-a(a+1)^2(a+2)} =$$

$$= \frac{-a(3a+3)(1+a+2)+(a+2)(2a-a-1)+(2a+1)(a^2+3a+2+2a)}{-a(a+1)^2(a+2)} =$$

$$= \frac{-3a(a+1)(a+3)+(a+2)(a-1)+(2a+1)\left(a^2+5a+2\right)}{-a(a+1)^2(a+2)} =$$

$$= \frac{-3a\left(a^2+4a+3\right)+a^2-a+2a-2+2a^3+10a^2+4a+a^2+5a+2}{-a(a+1)^2(a+2)} =$$

$$= \frac{-3a^3-12a^2-9a+2a^3+12a^2+10a}{-a(a+1)^2(a+2)} = \frac{-a^3+a}{-a(a+1)^2(a+2)} = \frac{-a\left(a^2-1\right)}{-a(a+1)^2(a+2)} = \frac{(a+1)(a-1)}{(a+1)^2(a+2)} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{a-1}{(a+1)(a+2)}}} = x.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a^2+a & 1 & a \\ a^2+a & 2 & a+1 \\ 0 & a+2 & -a \end{vmatrix}}{-a(a+1)^2(a+2)} = \frac{\left(a^2+a\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & a+1 \\ 0 & a+2 & -a \end{vmatrix}}{-a(a+1)^2(a+2)} = \frac{a(a+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & a+1 \\ 0 & a+2 & -a \end{vmatrix}}{-a(a+1)^2(a+2)} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & a+1 \\ 0 & a+2 & -a \end{vmatrix}}{-(a+1)(a+2)} = \frac{-2a+a(a+2)-(a+1)(a+2)+a}{-(a+1)(a+2)} = \frac{-a+a^2+2a-\left(a^2+3a+2\right)}{-(a+1)(a+2)} =$$

$$= \frac{a^2+a-a^2-3a-2}{-(a+1)(a+2)} = \frac{-2a-2}{-(a+1)(a+2)} = \frac{-2(a+1)}{-(a+1)(a+2)} = \underline{\underline{\frac{2}{a+2}}} = y.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a^2+a & 2a+1 & 1 \\ a^2+a & 3a+3 & 2 \\ 0 & a+2 & a+2 \end{vmatrix}}{-a(a+1)^2(a+2)} = \frac{\left(a^2+a\right)\begin{vmatrix} 1 & 2a+1 & 1 \\ 1 & 3a+3 & 2 \\ 0 & a+2 & a+2 \end{vmatrix}}{-a(a+1)^2(a+2)} = \frac{a(a+1)\begin{vmatrix} 1 & 2a+1 & 1 \\ 1 & 3a+3 & 2 \\ 0 & a+2 & a+2 \end{vmatrix}}{-a(a+1)^2(a+2)} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2a+1 & 1 \\ 1 & 3a+3 & 2 \\ 0 & a+2 & a+2 \end{vmatrix}}{-(a+1)(a+2)} = \frac{(3a+3)(a+2)+(a+2)-2(a+2)-(a+2)(2a+1)}{-(a+1)(a+2)} =$$

$$= \frac{(a+2)(3a+3+1-2-2a-1)}{-(a+1)(a+2)} = \frac{a+1}{-(a+1)} = \underline{\underline{-1 = z}}.$$

Resolvemos para el caso de α = 0; el sistema resulta $\begin{cases} y = 1 \\ 3y+z=2 \\ 2y=2 \end{cases}$, equivalente al

www.yoquieroaprobar.es

sistema $\begin{cases} y = 1 \\ 3y + z = 2 \end{cases}$, que es compatible indeterminado cuya solución es:

$$\underline{\underline{\begin{Bmatrix} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = -1 \end{Bmatrix}, \ \forall \lambda \in R}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

2º) Dados los puntos P(2, 1, 1) y Q(1, 2, -1), encuentra los puntos R y S de la recta r de ecuación $r \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{0}$ que cumple que PQR y PQS son triángulos equiláteros.

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = -2+\lambda \\ y = -2+\lambda \\ z = 0 \end{cases}$.

Los putos genéricos de la recta r tienen por expresión: $R(-2+\lambda,\ -2+\lambda,\ 0)$.

La distancia entre los puntos P y Q es la siguiente:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(1-2)^2 + (2-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{1+1+4} = \underline{\sqrt{6} = \overline{PQ}}.$$

Por condición del ejercicio es $\overline{PR} = \overline{PS} = \overline{PQ} = \sqrt{6}$

$$\overline{PR} = \overline{PQ} = \sqrt{(-2+\lambda-2)^2 + (-2+\lambda-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{6} \;\;;;\;\; \sqrt{(\lambda-4)^2 + (\lambda-3)^2 + 1} = \sqrt{6}$$

$$(\lambda-4)^2 + (\lambda-3)^2 + 1 = 6 \;\;;;\;\; \lambda^2 - 8\lambda + 16 + \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 5 \;\;;;\;\; 2\lambda^2 - 14\lambda + 20 = 0 \;\;;;$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \;\;;;\;\; \lambda = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 2} \;\;;;\;\; \underline{\lambda_2 = 5}.$$

Para $\lambda = 2 \Rightarrow R(-2+2,\ -2+2,\ 0) \Rightarrow \underline{\underline{R(0,\ 0,\ 0)}}$.

Para $\lambda = 5 \Rightarrow S(-2+5,\ -2+5,\ 0) \Rightarrow \underline{\underline{S(3,\ 3,\ 0)}}$.

****

www.yoquieroaprobar.es

3º) Halla la derivada y su valor en el punto x = 1 para cada una de las siguientes funciones: a) $f(x) = x^{x+2^x}$ b) $g(x) = arc\ tag\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)$.

----

a)

$f(x) = x^{x+2^x}$. Tomando logaritmos neperianos: $L[f(x)] = L\, x^{x+2^x} = \left(x+2^x\right) L\, x$.

Derivando ahora, teniendo en cuenta que $f(x) = y \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{y'}{y}$:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \left(x+2^x\right)' \cdot L\, x + \left(x+2^x\right) \cdot \frac{1}{x}. \qquad (*)$$

Teniendo en cuenta que si $y = x + 2^x = x + u \;\Rightarrow\; y' = 1 + u'$. (**)

$$u = 2^x \;\Rightarrow\; L\, u = L\, 2^x = x\, L\, 2 \;;;\; \frac{u'}{u} = 1 \cdot L\, 2 = L\, 2 \;;;\; u' = uL\, 2 = \underline{2^x\, L\, 2 = u'}.$$

Sustituyendo en (**) el valor obtenido de u': $\underline{y' = 1 + 2^x\, L\, 2}$.

Sustituyendo en valor obtenido en (**) en la expresión (*), resulta finalmente:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \left(1+2^x\, L\, 2\right) \cdot L\, x + \left(x+2^x\right) \cdot \frac{1}{x} \;;;\; f'(x) = f(x) \cdot \left[\left(1+2^x\, L\, 2\right) \cdot L\, x + \left(x+2^x\right) \cdot \frac{1}{x}\right].$$

$$\underline{\underline{f'(x) = x^{x+2^x} \cdot \left[\left(1+2^x\, L\, 2\right) \cdot L\, x + \left(x+2^x\right) \cdot \frac{1}{x}\right]}}$$

Para x = 1 es:

$$f'(1) = 1^{1+2^1} \cdot \left[\left(1+2^1\, L\, 2\right) \cdot L\, 1 + \left(1+2^1\right) \cdot \frac{1}{1}\right] = 1 \cdot \left[\left(1+2L\, 2\right) \cdot 0 + (1+2) \cdot 1\right] = 3.$$

$$\underline{\underline{f'(1) = 3}}$$

b)

$$g(x) = arc\ tag\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right).$$

Teniendo en cuenta que si $\begin{cases} f(x) = arc\ tag\ u \;\Rightarrow\; f'(x) = \dfrac{u'}{1+u^2} \\ h(x) = \cos z \;\Rightarrow\; h'(x) = -z' \cdot sen\ z \end{cases}$, la derivada pedida

es la siguiente:

www.yoquieroaprobar.es

$$g'(x)=\frac{-\frac{\pi}{2}\cdot sen\,\frac{\pi x}{2}}{1+\left(\cos\,\frac{\pi x}{2}\right)^2}=\underline{\underline{-\frac{\frac{\pi}{2}\cdot sen\,\frac{\pi x}{2}}{1+\cos^2\,\frac{\pi x}{2}}=g'(x)}}.$$

Para x = 1 es: $g'(1)=-\frac{\frac{\pi}{2}\cdot sen\,\frac{\pi}{2}}{1+\cos^2\,\frac{\pi}{2}}=-\frac{\frac{\pi}{2}\cdot 1}{1+0^2}=-\frac{\pi}{2}$.

$$\underline{\underline{g'(1)=-\frac{\pi}{2}}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

4º) Dada la función $f(x)=L\left(3+x+sen\ \frac{\pi x^3}{x^2+x+2}\right)$ demuestra que existe un valor $c\in(-1,\ 2)$ tal que $f(\alpha)=1$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

Vamos a utilizar el teorema del valor intermedio, (que es una generalización del teorema de Bolzano), que se puede enunciar de la siguiente forma:

"Sea f(x) una función continua en un intervalo [a, b] y supongamos que $f(a)<f(b)$. Entonces para cada μ tal que $f(a)<\mu<f(b)$, existe al menos un valor $c\in(a,\ b)$ tal que $f(c)=\mu$". (La misma conclusión se obtiene para el caso de f(b) < f(a)).

La función $f(x)=L\left(3+x+sen\ \frac{\pi x^3}{x^2+x+2}\right)$ es continua en el intervalo [-1, 2], por lo cual, le es aplicable el teorema del valor intermedio.

$$f(-1)=L\left[3-1+sen\ \frac{\pi\cdot(-1)^3}{(-1)^2-1+2}\right]=L\left(2+sen\ \frac{-\pi}{1+1}\right)=L\left(2+sen\ \frac{-\pi}{2}\right)=L(2-1)=$$

$=L1=\underline{0=\ f(-1)}$.

$$f(2)=L\left[3+2+sen\ \frac{\pi\cdot 2^3}{2^2+2+2}\right]=L\left(5+sen\ \frac{8\pi}{8}\right)=L(5+sen\ \pi)=L(5+0)=L5\cong$$

$\cong\underline{1'61=\ f(2)}$.

De lo anterior se deduce que:

$$\underline{\underline{\exists c\in(-1,\ 2)\ \ tal\ \ que\ \ f(c)=1,\ \ c.\ q.\ d}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$, calcula el determinante de $A\cdot B$ y el de A + B.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2+0 & 0+3-6 & 0-0+3\\ 0+2-0 & 0-3+4 & 0+0-2\\ 0+4-0 & 0-6+4 & 0+0-2\end{pmatrix}=$$

$$=\underline{\begin{pmatrix}0 & -3 & 3\\ 2 & 1 & -2\\ 4 & -2 & -2\end{pmatrix}=A\cdot B}.$$

$$|A\cdot B|=\begin{vmatrix}0 & -3 & 3\\ 2 & 1 & -2\\ 4 & -2 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 3\\ 2 & -1 & -2\\ 4 & -4 & -2\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & -4\end{vmatrix}=3\cdot(-8+4)=\underline{-12}.$$

$$\underline{\underline{|A\cdot B|=-12}}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}3 & -1 & 3\\ 2 & -2 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=A+B}.$$

$$|A+B|=\begin{vmatrix}3 & -1 & 3\\ 2 & -2 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-(-6+2)=\underline{4}.$$

$$\underline{\underline{|A+B|=4}}$$

****

2º) Encuentra la ecuación continua de la recta t que corta perpendicularmente a las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x+y+z-6=0 \\ x-y+2z-3=0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+2}{4}$.

El procedimiento que se va a utilizar para hallar la ecuación de la recta t requiere el conocimiento de un punto y un vector director de cada una de las rectas, para lo cual expresamos la recta r por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} 2x+y+z-6=0 \\ x-y+2z-3=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y=6-\lambda \\ x-y=3-2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=9-3\lambda \;;;\; \underline{x=3-\lambda} \;;;$$

$$y = x-3+2\lambda = 3-\lambda-3+2\lambda = \underline{\lambda = y} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=3-\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}.$$

1.- Consideramos los puntos $A \in r \; y \; B \in s$: <u>A(3, 0, 0)</u> y <u>B(-1, -2, -2)</u>.

2.- Unos vectores directores de las rectas r y s son: $\underline{\overrightarrow{v_r} = (-1, \; 1, \; 1)}$ y $\underline{\overrightarrow{v_s} = (2, \; 1, \; 4)}$.

3.- Obtenemos un vector $\overrightarrow{w}$, perpendicular a $\overrightarrow{v_r} \; y \; \overrightarrow{v_s}$:

$$\overrightarrow{w'} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4i+2j-k-2k-i+4j = 3i+6j-3k \Rightarrow \underline{\overrightarrow{w} = (1, \; 2, \; -1)}.$$

4.- Determinamos los planos $\pi_1 \; y \; \pi_2$, de la forma siguiente:

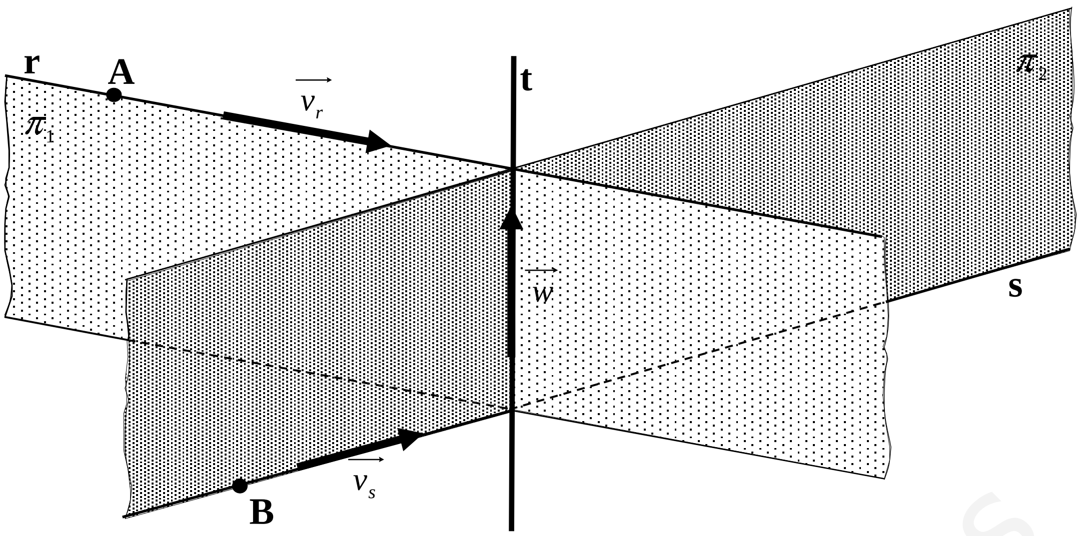
$$\pi_1(A; \; \overrightarrow{v_r}, \; \overrightarrow{w}) \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \;;;\; -(x-3)+y-2z-z-2(x-3)-y=0 \;;;$$

$$-3(x-3)-3z=0 \;;;\; x-3+z=0 \;;;\; \underline{\pi_1 \equiv x+z-3=0}.$$

$$\pi_2(B; \; \overrightarrow{v_s}, \; \overrightarrow{w}) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z+2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \;;;$$

$$-(x+1)+4(y+2)+4(z+2)-(z+2)-8(x+1)+2(y+2)=0 \;;;\; -9(x+1)+6(y+2)+3(z+2)=0 \;;;$$

$$3(x+1)-2(y+2)-(z+2)=0 \;;;\; 3x+3-2y-4-z-2=0 \Rightarrow \underline{\pi_2 \equiv 3x-2y-z-3=0}.$$



La recta t es la que determinan los planos π_1 y π_2: $t \equiv \begin{cases} x+z-3=0 \\ 3x-2y-z-3=0 \end{cases}$.

La expresión de t por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$t \equiv \begin{cases} x+z-3=0 \\ 3x-2y-z-3=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \;;;\; \underline{x=3-\lambda} \;;;\; 3(3-\lambda)-2y-\lambda-3=0 \;;;$$

$$2y=9-3\lambda-\lambda-3=6-4\lambda \;;;\; \underline{y=3-2\lambda} \Rightarrow \underline{t \equiv \begin{cases} x=3-\lambda \\ y=3-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}.$$

$$\underline{\underline{t \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

3º) Dada la función $f(x) = sen\ (\pi\, 2^x) + \cos\ (\pi\, x)$ demuestra que existe un valor $c \in (-1,\ 2)$ tal que $f'(c) = \frac{1}{3}$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

$$f(-1) = sen\ (\pi\, 2^{-1}) + \cos\ (-\pi) = sen\ \frac{\pi}{2} + \cos\ (-\pi) = 1 + (-1) = \underline{0}.$$

$$f(2) = sen\ (\pi\, 2^2) + \cos\ (2\pi) = sen\ (4\pi) + \cos\ (2\pi) = 0 + 1 = \underline{1}.$$

Teniendo en cuenta que $\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{1 - 0}{3} = \frac{1}{3}$, a la función $f(x)$ le es aplicable el Teorema del Valor Medio o de Lagrange, que dice:

Si f es una función continua en [a, b] y derivable en (a, b), entonces existe al menos un punto $c \in (a,\, b)$ que cumple que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

La función $f(x) = sen\ (\pi\, 2^x) + \cos\ (\pi\, x)$ es continua y derivable en su dominio, que es R, por lo cual se le puede aplicar el mencionado teorema a cualquier intervalo finito considerado.

Considerando el intervalo dado, $(-1,\ 2)$, se cumple que: $f'(c) = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)}$, como hemos visto anteriormente.

****

www.yoquieroaprobar.es

4º) Encuentra los tres puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x)=x^3-x$ y $g(x)=sen\ (\pi x)$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de f(x) y g(x).

Teniendo en cuenta que las raíces de la función $g(x)=sen\ (\pi x)$ son el conjunto de los números enteros y que las raíces de $f(x)=x^3-x$ son -1, 0 y 1, sus puntos de corte son los siguientes: A(-1, 0), O(0, 0) y B(1, 0).

Teniendo que cuenta que las dos funciones son simétricas con respecto al origen por cumplirse que $f(-x)=-f(x)$ y $g(-x)=-g(x)$, el área pedida es la siguiente:

$$S=2\cdot\left|\int_0^1\left[\left(x^3-x\right)-sen\ (\pi x)\right]\right|=2\cdot\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\cos\ (\pi x)\right]_0^1\right|=$$

$$=2\left|\left(\frac{1^4}{4}-\frac{1^2}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\cos\ \pi\right)-\left(\frac{0^4}{4}-\frac{0^2}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\cos\ 0\right)\right|=2\left|\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot(-1)\right]-\left(0-0+\frac{1}{\pi}\cdot 1\right)\right|=$$

$$=2\left|\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}-\frac{1}{\pi}\right|=2\left|\frac{1-2}{4}-\frac{2}{\pi}\right|=2\left|-\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi}\right|=2\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{\pi}\right)=2\cdot\frac{\pi+8}{4\pi}=\frac{\pi+8}{2\pi}\ u^2=S.$$

****

www.yoquieroaprobar.es