PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

JUNIO – 2011 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realizar una de las dos opciones propuestas (A o B).

OPCIÓN A

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real α y resuélvelo en los casos en que es compatible: $\begin{cases} 2y + a^2z = a+4 \\ ax - y + (a+2)z = 1 \\ ax - 2y + az = 0 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & a^2 \\ a & -1 & a+2 \\ a & -2 & a \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & a^2 & a+4 \\ a & -1 & a+2 & 1 \\ a & -2 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de A en función del parámetro real α es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & a^2 \\ a & -1 & a+2 \\ a & -2 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 0 & 2 & a^2 \\ 1 & -1 & a+2 \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix} = a\left[-2a^2 + 2(a+2) + a^2 - 2a\right] = a\left(-a^2 + 2a + 4 - 2a\right) =$$

$$= a\left(4 - a^2\right) = 0 \Rightarrow \underline{a_1 = 0} \;;;\; \underline{a_2 = 2} \;;;\; \underline{a_3 = -2}.$$

$$Para \begin{Bmatrix} a \neq 0 \\ a \neq 2 \\ a \neq -2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ A = Rango\ A' = 3 = n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ Determinado$$

$$Para\ a = 0\ ez\ A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ A' \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 16 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ A' = 3}.$$

$$Para\ \ a=2\ \ es\ \ A'=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ \ A' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$=-24+4+12=-8\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ A'=3}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \left\{\begin{matrix} a=0 \\ a=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow Rango\ \ A=2\ ;;\ Rango\ \ A'=3 \Rightarrow Incompatible}}$$

$$Para\ \ a=-2\ \ es\ \ A'=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1+C_4=C_2\} \Rightarrow \underline{Rango\ \ A'=2}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=-2 \Rightarrow Rango\ \ A=Rango\ \ A'=2<n^o\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ Indeterminado}}$$

Resolvemos los casos de compatibilidad; primero cuando $\left\{\begin{matrix} a\neq 0 \\ a\neq 2 \\ a\neq -2 \end{matrix}\right\}$ mediante la regla de Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} a+4 & 2 & a^2 \\ 1 & -1 & a+2 \\ 0 & -2 & a \end{vmatrix}}{a(2+a)(2-a)}=\frac{-a(a+4)-2a^2+2(a+2)(a+4)-2a}{a(2+a)(2-a)}=$$

$$=\frac{-a^2-4a-2a^2+2(a^2+6a+8)-2a}{a(2+a)(2-a)}=\frac{-3a^2-6a+2a^2+12a+16}{a(2+a)(2-a)}=\frac{-a^2+6a+16}{a(2+a)(2-a)}=\frac{-(a+2)(a-8)}{a(2+a)(2-a)}=$$

$$=\underline{\underline{\frac{8-a}{a(2-a)}=x}}.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 0 & a+4 & a^2 \\ a & 1 & a+2 \\ a & 0 & a \end{vmatrix}}{a(2+a)(2-a)}=\frac{a(a+2)(a+4)-a^3-a^2(a+4)}{a(2+a)(2-a)}=\frac{(a+2)(a+4)-a^2-a(a+4)}{(2+a)(2-a)}=$$

$$=\frac{a^2+6a+8-a^2-a^2-4a}{(2+a)(2-a)}=\frac{2a+8-a^2}{(2+a)(2-a)}=\frac{-a^2+2a+8}{(2+a)(2-a)}=\frac{-(a+2)(a-4)}{(2+a)(2-a)}=\underline{\underline{\frac{4-a}{2-a}}}=y.$$

www.yoquieroaprobar.es

$$z=\frac{\begin{vmatrix}0 & 2 & a+4\\ a & -1 & 1\\ a & -2 & 0\end{vmatrix}}{a(2+a)(2-a)}=\frac{-2a(a+4)+2a+a(a+4)}{a(2+a)(2-a)}=\frac{-2(a+4)+2+(a+4)}{(2+a)(2-a)}=\frac{-2a-8+2+a+4}{(2+a)(2-a)}=$$

$$=\frac{-a-2}{(2+a)(2-a)}=\frac{-(a+2)}{(2+a)(2-a)}=\underline{\underline{\frac{-1}{2-a}}}=z\,.$$

Resolvemos para α = -2; el sistema resulta $\begin{cases}2y+4z=2\\ -2x-y=1\\ -2x-2y-2z=0\end{cases}$, que es compatible indeterminado y cuya solución es:

$$\begin{cases}y+2z=1\\ 2x+y=-1\\ x+y+z=0\end{cases}\Rightarrow \underline{z=\lambda}\ ;;\ \underline{y=1-2\lambda}\ ;;\ x=-y-z=-1+2\lambda-\lambda=\underline{-1+\lambda=x}\,.$$

$$\underline{\underline{Solución:\begin{Bmatrix}x=-1+\lambda\\ y=1-2\lambda\\ z=\lambda\end{Bmatrix},\ \forall\lambda,\ m\in R}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

2º) Encuentra la ecuación continua de la recta s que está contenida en el plano $\pi \equiv x+2y-z+2=0$ y corta perpendicularmente a la recta $r \equiv \begin{cases} 2x+y-z+1=0 \\ x+2y-2z-1=0 \end{cases}$.

El punto de intersección de la recta r con el plano π es la solución del sistema que forman: $\left.\begin{array}{l} 2x+y-z+1=0 \\ x+2y-2z-1=0 \\ x+2y-z+2=0 \end{array}\right\}$.

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y-z+1=0 \\ x+2y-2z-1=0 \\ x+2y-z+2=0 \end{array}\right\} \rightarrow z=1+2x+y \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y-2(1+2x+y)-1=0 \\ x+2y-(1+2x+y)+2=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x+2y-2-4x-2y-1=0 \\ x+2y-1-2x-y+2=0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} -3x-3=0 \\ -x+y+1=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x+1=0 \\ -x+y=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x=-1} \;;;\; 1+y=-1 \;;;\; \underline{y=-2} \;;;\; z=1-2-2=\underline{-3=z} \Rightarrow \underline{P(-1,\ -2,\ -3)}.$$

Un vector director de la recta r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los dos planos que la definen al cortarse, que son $\overrightarrow{n_1}=(2,\ 1,\ -1)$ y $\overrightarrow{n_2}=(1,\ 2,\ -2)$.

$$\overrightarrow{v'_r}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=-2i-j+4k-k+2i+4j=3j+3k=(0,\ 3,\ 3) \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_r}=(0,\ 1,\ 1)}.$$

El haz de planos perpendiculares a r tienen como vector normal al vector director de r y su expresión general es de la forma $\alpha \equiv y+z+D=0$.

De los infinitos planos del haz $\alpha \equiv y+z+D=0$, el plano μ que contiene al punto P es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv y+z+D=0 \\ P(-1,\ -2,\ -3) \end{array}\right\} \Rightarrow -2-3+D=0 \;;;\; \underline{D=5} \Rightarrow \underline{\mu \equiv y+z+5=0}.$$

La recta s pedida es la que determinan los planos π y μ: $s \equiv \begin{cases} x+2y-z+2=0 \\ y+z+5=0 \end{cases}$.

La expresión de s por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$s \equiv \begin{cases} x+2y-z+2=0 \\ y+z+5=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \;;;\; y=-5-\lambda \;;;\; x=-2-2y+z=-2-2(-5-\lambda)+\lambda=$$

$$=-2+10+2\lambda+\lambda=\underline{8+3\lambda=x}.$$

www.yoquieroaprobar.es

$$s \equiv \frac{x-8}{3} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z}{1}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

3º) Halla las integrales definidas $I_1=\int \frac{tag^3\,x+tag\,x}{tag^2\,x-1}\cdot dx$ e $I_2=\int \frac{dx}{x^2+x-2}$.

$$I_1=\int \frac{tag^3\,x+tag\,x}{tag^2\,x-1}\cdot dx=\int tag\,x\cdot\frac{tag^2\,x+1}{tag^2\,x-1}\cdot dx=\int tag\,x\cdot\frac{tag^2\,x-1+2}{tag^2\,x-1}\cdot dx=$$

$$=\int tag\,x\cdot\left(1+\frac{2}{tag^2\,x-1}\right)\cdot dx=\int tag\,x\cdot dx+\int\frac{2tag\,x}{tag^2\,x-1}\cdot dx=\underline{A+B=I_1}.\qquad (*)$$

$$A=\int tag\,x\cdot dx=\int\frac{sen\,x}{\cos\,x}\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}\cos\,x=t\\ -sen\,x\cdot dx=dt\\ sen\,x\cdot dx=-dt\end{array}\right\}\Rightarrow A=-\int\frac{dt}{t}=-L\,t+C_1=\underline{-L\cos\,x+C_1=A}.$$

$$B=\int\frac{2tag\,x}{tag^2\,x-1}\cdot dx=\int\frac{2\cdot\frac{sen\,x}{\cos\,x}}{\frac{sen^2\,x}{\cos^2\,x}-1}\cdot dx=\int\frac{2\cdot\frac{sen\,x}{\cos\,x}}{\frac{sen^2\,x-\cos^2\,x}{\cos^2\,x}}\cdot dx=\int\frac{2sen\,x\cdot\cos\,x}{-\left(\cos^2\,x-sen^2\,x\right)}\cdot dx=$$

$$=-\int\frac{sen\,(2x)}{\cos\,(2x)}\cdot dx\;\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}\cos\,(2x)=u\\ -2sen\,(2x)\cdot dx=du\\ sen\,(2x)\cdot dx=-\frac{1}{2}du\end{array}\right\}\Rightarrow B=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{2}Lu+C_2=\underline{\frac{1}{2}L[\cos\,(2x)]+C_2=B}.$$

Sustituyendo en (*) los valores de A y B queda: $\underline{\underline{I_1=\frac{1}{2}L[\cos\,(2x)]-L\cos\,x+C}}$.

Esta integral puede resolverse de otra forma teniendo en cuenta que la derivada de $tag^2\,x-1$ es $2\cdot tag\,x\cdot\left(1+tag^2\,x\right)=2\cdot\left(tag\,x+tag^3\,x\right)$. Sería como sigue:

$$I_1=\int\frac{tag^3\,x+tag\,x}{tag^2\,x-1}\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{2\cdot\left(tag^3\,x+tag\,x\right)}{tag^2\,x-1}\cdot dx=\underline{\underline{\frac{1}{2}\cdot L\left|tag^2\,x-1\right|+C=I_1}}.$$

Nótese que aunque son expresiones diferentes tienen la misma derivada, que es la expresión $\frac{tag^3\,x+tag\,x}{tag^2\,x-1}$, como puede comprobarse.

$$I_2=\int\frac{dx}{x^2+x-2}.\qquad x^2+x-2=0\;;;\;x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\underline{x_1=1}\\ \underline{x_2=-2}\end{array}\right..$$

$$\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{1}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{Ax+2A+Bx-B}{x^2+x-2}=\frac{(A+B)x+(2A-B)}{x^2+x-2}\;\Rightarrow$$

www.yoquieroaprobar.es

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} A+B=0 \\ 2A-B=1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow 3A=1 \;;;\; \underline{A=\frac{1}{3}} \;;;\; \underline{B=-\frac{1}{3}}.$$

$$I_2=\int \frac{dx}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\cdot dx-\frac{1}{3}\int \frac{1}{x+2}\cdot dx=\frac{1}{3}L(x-1)-\frac{1}{3}L(x+2)+C=\underline{\underline{L\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+2}}+C=I_2}}.$$

****

www.yoquieroaprobar.es

4º) Dada la función $f(x)=\sqrt{2+sen\sqrt[3]{x+1}+sen\left(\pi-\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}\right)}$, demuestra que existe un valor $x\in(1,\ 2)$ tal que $f'(\alpha)=0$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

Vamos a utilizar el teorema de Rolle, que se puede enunciar diciendo:

"Si f(x) es una función continua en el intervalo [a, b] y derivable en (a, b) y si se cumple que f(a) = f(b), existe al menos un punto $c\in(a,\ b)$ tal que f'(x) = 0".

La función $f(x)$ es continua y derivable en todo su dominio, que es R, por lo tanto, le es aplicable el Teorema de Rolle en el intervalo (1, 2).

Aplicando el Teorema de Rolle:

$$f(1)=\sqrt{2+sen\sqrt[3]{1+1}+sen\left(\pi-\sqrt[3]{1+\frac{2}{1}}\right)}=\sqrt{2+sen\sqrt[3]{2}+sen\left(\pi-\sqrt[3]{3}\right)}=\underline{\sqrt{2+sen\sqrt[3]{2}+sen\sqrt[3]{3}}}.$$

$$f(2)=\sqrt{2+sen\sqrt[3]{2+1}+sen\left(\pi-\sqrt[3]{1+\frac{2}{2}}\right)}=\sqrt{2+sen\sqrt[3]{3}+sen\left(\pi-\sqrt[3]{2}\right)}=\underline{\sqrt{2+sen\sqrt[3]{3}+sen\sqrt[3]{2}}}.$$

Como se aprecia, se cumple que $f(1)=f(2)$.

De todo lo anterior se deduce que:

$$\underline{\underline{\exists c\in(1,\ 2)\ tal\ \ que\ \ f'(c)=0,\ como\ \ teníamos\ \ que\ \ demostrar}}.$$

****

www.yoquieroaprobar.es

OPCIÓN B

1º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, encuentra todas las matrices G que cumplen $A \cdot G = G \cdot A$.

Sea la matriz $G = \begin{pmatrix} b & c \\ x & y \end{pmatrix}$. Por condición del problema tiene que cumplirse:

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & c \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \\ \\ G \cdot A = \begin{pmatrix} b & c \\ x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 2c \\ x & 2y \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cdot G = G \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} b & c \\ 2x & 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 2c \\ x & 2y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \underline{c = 0} \\ \underline{x = 0} \end{cases}.$$

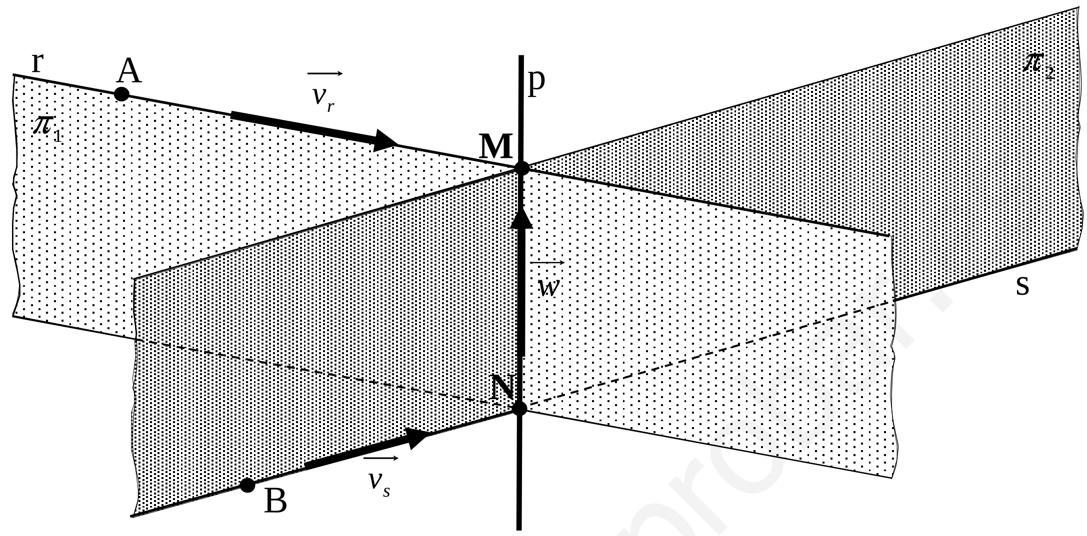
$$\underline{\underline{G = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, \ \forall (b,\ y) \in R}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

2º) Encuentra la ecuación continua de la recta t que corta perpendicularmente a la recta $r \equiv \begin{cases} 3x - y - z + 2 = 0 \\ 5x - 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$ y a la recta $s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$.

En primer lugar vamos a determinar la recta p, perpendicular común a las rectas dadas, para lo cual nos guiamos por el siguiente gráfico.



Determinamos un punto y un vector director de cada una de las rectas dadas, para lo cual expresamos la recta r por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - y - z + 2 = 0 \\ 5x - 2y - z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x = \lambda} \Rightarrow \begin{cases} -y - z = -2 - 3\lambda \\ -2y - z = 1 - 5\lambda \end{cases} \begin{cases} -y - z = -2 - 3\lambda \\ 2y + z = -1 + 5\lambda \end{cases} \Rightarrow \underline{y = -3 + 2\lambda} \ ;;$$

$$-y - z = -2 - 3\lambda \ ;; \ z = 2 + 3\lambda - y = 2 + 3\lambda + 3 - 2\lambda \ ;; \ \underline{z = 5 + \lambda} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases}}.$$

Un punto y un vector director de r son: $A(0, -3, 5)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1, 2, 1)$.

Un punto y un vector director de s son: $B(1, -1, 0)$ y $\overrightarrow{v_s} = (2, 1, -1)$.

Un vector $\overrightarrow{w}$, perpendicular a $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ es cualquiera que sea linealmente dependiente de su producto vectorial:

$$\overrightarrow{w'} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2i + 2j + k - 4k - i + j = -3i + 3j - 3k \Rightarrow \underline{\overrightarrow{w} = (1, -1, 1)}.$$

Ahora determinamos los planos π_1 y π_2, de la forma siguiente:

$$\pi_1\left(A;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{w}\right)\equiv\begin{vmatrix} x & y+3 & z-5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0\ ;;\ 2x+(y+3)-(z-5)-2(z-5)+x-(y+3)=0\ ;;$$

$$3x-3(z-5)=0\ ;;\ x-(z-5)=0\ \Rightarrow\ \underline{\pi_1\equiv x-z+5=0}.$$

$$\pi_2\left(B;\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right)\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0\ ;;\ (x-1)-(y+1)-2z-z-(x-1)-2(y+1)=0\ ;;$$

$$-3(y+1)-3z=0\ ;;\ (y+1)+z=0\ \Rightarrow\ \underline{\pi_2\equiv y+z+1=0}.$$

La recta pedida p, es la que determinan los planos π_1 y π_2 en su intersección, que es la siguiente: $p\equiv\begin{cases} x-z+5=0 \\ y+z+1=0 \end{cases}$.

Como se nos pide, expresamos la recta p por unas ecuaciones continuas:

$$p\equiv\begin{cases} x-z+5=0 \\ y+z+1=0 \end{cases}\Rightarrow\ \underline{z=\lambda}\ \Rightarrow\ \underline{x=-5+\lambda}\ ;;\ \underline{y=-1-\lambda}.$$

$$\underline{\underline{p\equiv\frac{x+5}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{1}}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

3º) Encuentra los extremos absolutos de la función $f(x)=\cos x+sen\ x$ en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right]$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

El teorema de los valores extremos dice que toda función continua en un intervalo cerrado tiene extremos absolutos en dicho intervalo (mínimo absoluto y máximo absoluto).

La función $f(x)=\cos\ x+sen\ x$ es continua en R, por lo cual lo será en cualquier intervalo cerrado considerado.

Los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)=\cos x+sen\ x$ en el intervalo dado $\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right]$ son los siguientes:

$$f'(x)=-sen\ x+\cos\ x\ \Rightarrow\ f'(x)=0\ \Rightarrow\ sen\ x=\cos\ x.$$

El único valor que satisface la ecuación $sen\ x=\cos\ x$ en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right]$ es para $x=\frac{5\pi}{4}$.

$$f''(x)=-\cos\ x-sen\ x\ \Rightarrow\ f''\left(\tfrac{5\pi}{4}\right)=-\cos\frac{5\pi}{4}-sen\frac{5\pi}{4}=-\cos\ 225º-sen\ 225º=$$

$$=-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}>0\ \Rightarrow\ \underline{Mínimo\ \ para\ \ x=\frac{5\pi}{4}}.$$

$$f\left(\tfrac{5\pi}{4}\right)=\cos\frac{5\pi}{4}+sen\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}\ \Rightarrow\ \underline{Mínimo:\ P\left(\frac{5\pi}{4},\ -\sqrt{2}\right)}.$$

Los valores de la función es los extremos del intervalo son los siguientes:

$$f\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}+sen\frac{\pi}{2}=0+1=1\Rightarrow \underline{A\left(\frac{\pi}{2},\ 1\right)};;\ f\left(\tfrac{3\pi}{2}\right)=\cos\frac{3\pi}{2}+sen\frac{3\pi}{2}=0-1=-1\Rightarrow \underline{B\left(\frac{3\pi}{2},\ -1\right)}.$$

De todo lo anterior se deduce que la función $f(x)=\cos\ x+sen\ x$ tiene los siguientes extremos absolutos en el intervalo dado:

$$\underline{\underline{Máximo\ \ absoluto:\ A\left(\frac{\pi}{2},\ 1\right)\ \ y\ \ Mínimo\ \ absoluto:\ P\left(\frac{5\pi}{4},\ -\sqrt{2}\right)}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

4º) Calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ y $g(x)=\frac{1-x^2}{2}$. (Observa que f(x) es parte no negativa de la circunferencia de centro y radio 1).

Las dos funciones son simétricas con respecto al eje OY por ser $f(x)=f(-x)$ y también $g(x)=g(-x)$. Los puntos de corte de las funciones son los que se obtienen de la igualación de sus expresiones:

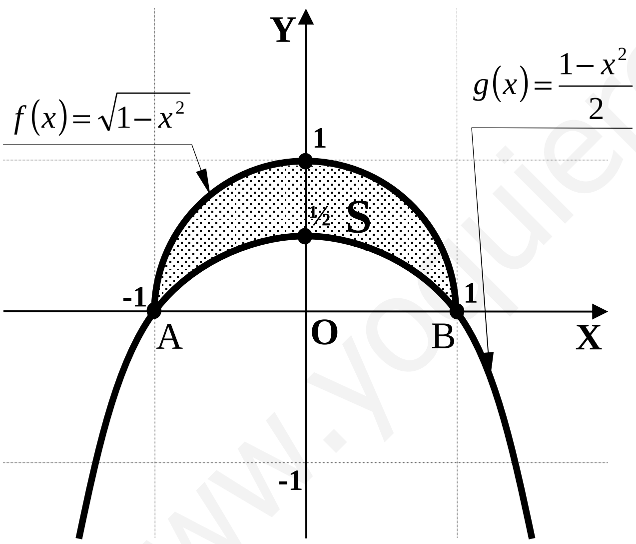
$$f(x)=g(x) \Rightarrow \sqrt{1-x^2}=\frac{1-x^2}{2} \;;;\; 2\sqrt{1-x^2}=1-x^2 \;;;\; 4\left(1-x^2\right)=\left(1-x^2\right)^2 \;;;$$

$$4-4x^2=1-2x^2+x^4 \;;;\; x^4+2x^2-3=0 \;;;\; x^2=y \Rightarrow y^2+2y-3=0 \;;;\; y=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=$$

$$=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}=-1\pm 2 \Rightarrow \underline{y_1=-3} \;;;\; \underline{y_2=1}.$$

Deshaciendo el cambio de variable con el valor posible (el positivo), resulta:

$$x^2=1 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \rightarrow \underline{A(-1,\ 0)} \\ x_1=1 \rightarrow \underline{B(1,\ 0)} \end{cases}.$$



La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que se indica en la figura adjunta.

Teniendo en cuenta que el área limitada por f(x) es un semicírculo (como se nos indica en el enunciado del problema), el área pedida es la siguiente:

$$S=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 1^2-\int_{-1}^{1} g(x)\cdot dx=\frac{\pi}{2}-\int_{-1}^{1}\frac{1-x^2}{2}\cdot dx=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)\cdot dx=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left\{1-\frac{1^3}{3}-\left[-1-\frac{(-1)^3}{3}\right]\right\}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(2-\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}=$$

$$=\underline{\underline{\frac{3\pi-4}{6}\cong 0'904\ u^2=S}}.$$

****

www.yoquieroaprobar.es