PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE NAVARRA

JULIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B).

OPCIÓN A

1º) Estudia el sistema de ecuaciones $\begin{cases} ax+y-z=2 \\ 2ax+(a^2+1)y+(a-1)z=a+5 \\ ax+a^2y+(a-2)z=a+5 \end{cases}$ dependiente del parámetro ɑ y resuélvelo en los casos en que sea compatible.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 2a & a^2+1 & a-1 \\ a & a^2 & a-2 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} a & 1 & -1 & 2 \\ 2a & a^2+1 & a-1 & a+5 \\ a & a^2 & a-2 & a+5 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro ɑ es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 2a & a^2+1 & a-1 \\ a & a^2 & a-2 \end{vmatrix}=a(a^2+1)(a-2)-2a^3+a(a-1)+$$

$$+a(a^2+1)-a^3(a-1)-2a(a-2)=0;$$

$$a(a^3-2a^2+a-2)-2a^3+a^2-a+a^3+a-a^4+a^3-2a^2+4a=0;$$

$$a^4-2a^3+a^2-2a-a^4-a^2+4a=0;\ -2a^3+2a=0;\ -2a(a^2-1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \boldsymbol{a_1=0, a_2=-1, a_3=1}.$$

$$\underline{Para \begin{cases} a \neq -1 \\ a \neq 0 \\ a \neq +1 \end{cases} \Rightarrow Ran\ M = Ran\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

Para α = 0 es $M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} =$

$= -5 - 4 + 10 + 5 = 15 - 9 = 6 \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ M' = 3}.$

$Para\ a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} =$

$= -4 - 6 + 6 + 12 = 8 \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ M' = 3}.$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix} a = 0 \\ a = 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Ran\ M = 2;\ Ran\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2 - C_3 = C_4\} \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ M' = 2}.$$

$$\underline{Para\ a = -1 \Rightarrow Ran\ M = Ran\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Resolvemos en el caso de compatible determinado:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & -1 & 2 \\ 2a & a^2+1 & a-1 & a+5 \\ a & a^2 & a-2 & a+5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & -1 & 2 \\ 0 & a^2-1 & a+1 & a+1 \\ 0 & a^2-1 & a-1 & a+3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & -1 & 2 \\ 0 & a^2-1 & a+1 & a+1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{z = -1} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & -1 & 2 \\ 0 & a-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (a-1)y - 1 = 1 \Rightarrow \boldsymbol{y = \frac{2}{a-1}};\ \ ax + \frac{2}{a-1} + 1 = 2;\ \ ax = 1 - \frac{2}{a-1} = \frac{a-1-2}{a-1} =$

$= \frac{a-3}{a-1} \Rightarrow \boldsymbol{x = \frac{a-3}{a(a-1)}}.$

$$\underline{Solución: x = \frac{a-3}{a^2-a}, y = \frac{2}{a-1}, z = -1.}$$

Para α = -1 el sistema resulta $\begin{cases} -x + y - z = 2 \\ -2x + 2y - 2z = 4 \\ -x + y - 3z = 4 \end{cases}$, que es compatible indeterminado y cuyas dos primeras ecuaciones son equivalentes. Considerando las ecuaciones primera y tercera:

$$\left.\begin{array}{r} -x+y-z=2 \\ -x+y-3z=4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x-y+z=-2 \\ -x+y-3z=4 \end{array}\right\} \Rightarrow -2z=2;\ \boldsymbol{z}=-\mathbf{1}.$$

Haciendo $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\lambda}$: $-\lambda+y+1=2 \Rightarrow \boldsymbol{y}=\mathbf{1}+\boldsymbol{\lambda}$.

$$\underline{Solución: x=\lambda, y=1+\lambda, z=-1, \forall\lambda \in R.}$$

****

2º) Halla los dos puntos de la recta $r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z-3}{1}$ que están a distancia $\sqrt{17}$ del punto P (1, -1, 4).

La ecuación de la esfera de centro P(1, -1, 4) y radio $\sqrt{17}$ es la siguiente:

$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = \left(\sqrt{17}\right)^2;$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 8z + 16 = 17;$

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 8z + 1 = 0.$

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$.

Los puntos de corte de la esfera y la recta son los siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 8z + 1 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$(2+3\lambda)^2 + (-2\lambda)^2 + (3+\lambda)^2 - 2(2+3\lambda) + 2(-2\lambda) - 8(3+\lambda) + 1 = 0;$

$4 + 12\lambda + 9\lambda^2 + 4\lambda^2 + 9 + 6\lambda + \lambda^2 - 4 - 6\lambda - 4\lambda - 24 - 8\lambda + 1 = 0;$

$14\lambda^2 - 14 = 0;\ \ \lambda^2 - 1 = 0 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1}.$

$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \Rightarrow$ Los puntos pedidos son: $\underline{P_1(-1, 2, 2)\ y\ P_2(5, -2, 4)}$.

Otra forma de hacer este ejercicio es la siguiente:

Un punto genérico de r es $A(2 + 3\lambda, -2\lambda, 3 + \lambda)$.

$\overrightarrow{AP} = [P - A] = [(1, -1, 4) - (2 + 3\lambda, -2\lambda, 3 + \lambda)] = (-1 - 3\lambda, -1 + 2\lambda, 1 - \lambda).$

$\left|\overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{17} \ \Rightarrow \ \sqrt{(-1-3\lambda)^2 + (-1+2\lambda)^2 + (1-\lambda)^2} = \sqrt{17} \ \Rightarrow$

$(-1-3\lambda)^2 + (-1+2\lambda)^2 + (1-\lambda)^2 = 17;$

$1 + 6\lambda + 9\lambda^2 + 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 + 1 - 2\lambda + \lambda^2 = 17;\ \ 14\lambda^2 = 14;\ \ \lambda^2 = 1 \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \Rightarrow$$ Los puntos pedidos son: $\underline{P_1(-1, 2, 2)\ y\ P_2(5, -2, 4)}$.

****

3º) Dada la función $f(x) = x \cdot \left(\sqrt{2x^2+3x+2}\right)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$, demuestra que existe un valor $\alpha\epsilon(0,2)$ tal que $f'(a) = \frac{1}{4}$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

$$2x^2+3x+2=0;\ \ x=\frac{-3\pm\sqrt{9-16}}{4} \Rightarrow x \notin R \ \Rightarrow\ 2x^2+3x+2>0, \forall x \in R.$$

La función f(x) es continua y derivable en su dominio, que es R, por cual le es aplicable el teorema del valor medio o de Lagrange, que dice que: "Si una función es continua en $[m,n]$ y derivable en (m,n), entonces existe al menos un valor $a \in (m,n)$ que cumple lo siguiente: $f'(a) = \frac{f(m)-f(n)}{m-n}$„

Aplicando el teorema de Lagrange a la función f(x) en el intervalo (0, 2):

$$f(0) = 0 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{\cos\ 0} = 0.$$

$$f(2) = 2 \cdot \left(\sqrt{8+6+2}\right)^{\cos\ \pi} = 2 \cdot 4^{-1} = \frac{1}{2}.$$

$$f'(a) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{\frac{1}{2}-0}{2} = \underline{\frac{1}{4}}.$$

$\underline{Lo\ anterior\ demuestra\ que\ \exists a \in (0,2)\ tal\ que\ f'(a) = \frac{1}{4}.}$

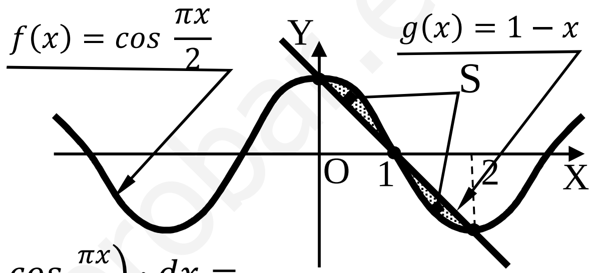
****

4º) Dadas las funciones $f(x) = cos\ \frac{\pi x}{2}$ y $g(x) = 1 - x$, encuentra los tres puntos en que se cortan. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas curvas.

Las abscisas de los tres puntos de corte de las funciones dadas son las soluciones reales de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = g(x) \;\Rightarrow\; cos\ \frac{\pi x}{2} = 1 - x \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2}.$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la indicada en la figura, de la cual se deduce el área a calcular, que es la siguiente:



$$S = \int_0^1 [f(x) - g(x)] \cdot dx +$$

$$+ \int_1^2 [g(x) - f(x)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 \left[cos\ \frac{\pi x}{2} - (1 - x)\right] \cdot dx + \int_1^2 \left(1 - x - cos\ \frac{\pi x}{2}\right) \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{2}{\pi} \cdot sen\ \frac{\pi x}{2} - x + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[x - \frac{x^2}{2} - \frac{2}{\pi} \cdot sen\ \frac{\pi x}{2}\right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi} \cdot sen\ \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{2}{\pi} \cdot sen\ 0\right) + \left(2 - 2 - \frac{2}{\pi} \cdot sen\ \pi\right) - \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \cdot sen\ \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} - 0 - 0 - \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi} - 1 = \underline{\frac{4-\pi}{\pi} \cong 0{,}27\ u^2}.$$

Aclaración:

$$\int \cos\frac{\pi x}{2} \cdot dx \Rightarrow \left\{\frac{\pi x}{2} = t \to dx = \frac{2}{\pi} \cdot dt\right\} \Rightarrow \int \cos t \cdot \frac{2}{\pi} \cdot dt = \frac{2}{\pi} \cdot sen\ t = \frac{2}{\pi} \cdot sen\ \frac{\pi x}{2}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, halla la matriz X que cumple A · X = B.

$$A \cdot X = B;\ \ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B;\ \ I \cdot X = A^{-1} \cdot B \ \Rightarrow \ \underline{X = A^{-1} \cdot B}. \qquad (*)$$

La matriz inversa de A es la siguiente:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 + F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \boldsymbol{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo la matriz obtenida en (*):

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) Encuentra la ecuación continua de la recta r que pasa por el punto P (-1, 1, 2) y corta a las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x-y-z+2=0 \\ 2x+y-z+1=0 \end{cases}$ y $r_2 \equiv \frac{x-4}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z-4}{1}$.

La expresión de r_1 por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x-y-z+2=0 \\ 2x+y-z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-y=-2+\lambda \\ 2x+y=-1+\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3x=-3+2\lambda;$$

$\boldsymbol{x=-1+\frac{2}{3}\lambda}$; $y=x+2-\lambda=-1+\frac{2}{3}\lambda+2-\lambda=\boldsymbol{1-\frac{1}{3}\lambda=y}$.

$$r_1 \equiv \begin{cases} x=-1+\frac{2}{3}\lambda \\ y=1-\frac{1}{3}\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$. Un punto y un vector director de r_1 son: $\begin{cases} Q(-1,1,0) \\ \overrightarrow{v_1}=(2,-1,3) \end{cases}$.

Los puntos P y Q determinan el vector:

$\overrightarrow{PQ}=[Q-P]=[(-1,1,0)-(-1,1,2)]=(0,0,-2)$.

El plano π_1 que contiene a la recta r_1 y al punto P tiene la siguiente expresión general:

$$\pi_1(P;\ \overrightarrow{v_1},\overrightarrow{PQ}) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}=0;\ \ 2(x+1)+4(y-1)=0;$$

$(x+1)+2(y-1)=0$; $x+1+2y-2=0 \ \Rightarrow\ \boldsymbol{\pi_1 \equiv x+2y-1=0}$.

Un punto y un vector director de r_2 son: $R(4,0,4)\ y\ \overrightarrow{v_2}=(1,-2,1)$

Los puntos P y R determinan el vector:

$\overrightarrow{PR}=[R-P]=[(4,0,4)-(-1,1,2)]=(5,-1,2)$.

El plano π_2 que contiene a la recta r_2 y al punto P tiene la siguiente expresión general:

$$\pi_2(P;\ \overrightarrow{v_2},\overrightarrow{PR}) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0;$$

$-4(x+1)+5(y-1)-(z-2)+10(z-2)+(x+1)-2(y-1)=0;$

$-3(x+1)+3(y-1)+9(z-2)=0;\ \ (x+1)-(y-1)-3(z-2)=0;$

$$x + 1 - y + 1 - 3z + 6 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \boldsymbol{\pi_2 \equiv x - y - 3z + 8 = 0}.$$

La recta r pedida es la intersección de los planos π_1 y π_2:

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ x - y - 3z + 8 = 0 \end{cases}}.$$

****

3º) Calcula los siguientes límites: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{sen\,x}$. $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{x+1}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{sen\,x}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow \{L'Hopital\}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{cos\,x}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}}{cos\,x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{1}}}{1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+1}{1}=\underline{1}.$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{x+1}=1^{\infty}\Rightarrow Indet.tipo\ nº\ e\Rightarrow \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+3-2}{x+3}\right)^{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{-2}{x+3}\right)^{x+1}=\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x+3}{-2}}\right)^{x+1}=\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x+3}{-2}}\right)^{(x+1)\cdot\frac{x+3}{-2}\cdot\frac{-2}{x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+3}{-2}}\right)^{\frac{x+3}{-2}}\right]^{(x+1)\cdot\frac{-2}{x+3}}=\left[\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x+3}{-2}}\right)^{\frac{x+3}{-2}}\right]^{\frac{-2x-6}{x+3}}=e^{-2}=\underline{\frac{1}{e^2}}.$$

****

4º) Comprueba que la función $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+2 & si\ \ x\leq 2 \\ 6-2x & si\ \ x>2 \end{cases}$ está definida y es continua en R. Encuentra sus extremos relativos y absolutos en el intervalo [-1, 3].

La función f(x) es continua en R, excepto para x = 2, cuya continuidad es dudosa.

Para que una función sea continua en un punto es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

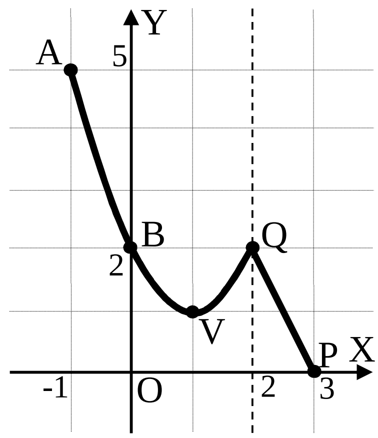
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(x^2-2x+2) = 2 = \mathrm{f}(2) \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(6-2\mathrm{x}) = 6-4 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x).}$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ la\ función\ está\ definida\ y\ es\ continua\ en\ R.}$$

Considerando la función $g(x)=x^2-2x+2$, con $x\in(-\infty,2]$, que es convexa $(\cup)$ en su dominio, tiene su máximo absoluto en el siguiente punto:

$g'(x)=2x-2\ \Rightarrow\ g'(x)=0\ \Rightarrow 2x-2=0;$

$x=1\ \Rightarrow\ g(1)=1^2-2\cdot 1+2=1\ \ \Rightarrow\ \ \boldsymbol{V(1,1)}.$



Teniendo en cuanta que $f(3)=6-2\cdot 3=0\ \Rightarrow$ $\Rightarrow P(3,0)$; que $f(2)=2\Rightarrow Q(2,2)$. También son puntos de la función $A(-1,5)$ y $B(0,2)$.

Con los datos anteriores podemos deducir que la representación gráfica de la función es la indicada en el gráfico adjunto, de donde se deducen los extremos pedidos, que son los siguientes:

$$\underline{Máximo\ absoluto: A(-1,5).\ Mínimo\ absoluto: P(3,0).}$$

$$\underline{Mínimo\ relativo: V(1,1).\ Máximo\ relativo: Q(2,2).}$$

****