

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDADES DE NAVARRA****JUNIO – 2016**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B).

OPCIÓN A1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro a yresuélvelo en los casos en que sea compatible:
$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ x + (a + 1)y - z = 1 \\ -2x - (2a + 2)y + (a^2 - 2)z = a \end{cases}.$$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & a+1 & -1 \\ -2 & -2a-2 & a^2-2 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & a+1 & -1 & 1 \\ -2 & -2a-2 & a^2-2 & a \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & a+1 & -1 \\ -2 & -2a-2 & a^2-2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+1)(a^2-2) + 2(-2a-2) + 4 + 4(a+1) + (-2a-2) - 2(a^2-2) =$$

$$= a^3 - 2a + a^2 - 2 - 4a - 4 + 4 + 4a + 4 - 2a - 2 - 2a^2 + 4 =$$

$$= a^3 - a^2 - 4a + 4 = 0.$$

Resolviendo por Ruffini:

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = -2.$$

1	-1	-4	4
1	1	0	-4
2	0	-4	0
2	2	4	
1	2	0	
-2	-2		
1	0		

$$\text{Para } \begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq 2 \\ a \neq -2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } A = \text{Rang } A' = 3 = n^{\circ} \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.D.}$$

$$\text{Para } a = 1 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang. } A' \Rightarrow (C_1, C_3, C_4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 - 4 - 2 + 1 - 2 = -9 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang. } A' = 3.$$

$$\text{Para } a = 2 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & -6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang. } A' \Rightarrow (C_1, C_2, C_4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 6 - 4 + 6 + 6 - 4 = 4 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang. } A' = 3.$$

$$\text{Para } \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } A = 2; \text{ Rang } A' = 3 \Rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

$$\text{Para } a = -2 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang. } A' \Rightarrow (C_1 = C_4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Rang. } A' = 2.$$

$$\underline{\text{Para } a = -2 \Rightarrow \text{Rang } A = \text{Rang } A' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.I.}}$$

Se resuelve, en primer lugar, para $\{a \neq 1, a \neq -1, a \neq -2\}$:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & a+1 & -1 & 1 \\ -2 & -2a-2 & a^2-2 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 + 2F_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & -3 & 0 \\ 0 & 2-2a & a^2+2 & a+2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 + 2F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a+2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \rightarrow \frac{1}{a+2}F_3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-2)z = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{a-2}. \quad (a-1)y - 3z = 0 \Rightarrow y = \frac{3z}{a-1} = \frac{3}{(a-1)(a-2)}.$$

$$x = 1 - 2y - 2z = 1 - \frac{6}{(a-1)(a-2)} - \frac{2}{a-2} = \frac{(a-1)(a-2)-6-2(a-1)}{(a-1)(a-2)} =$$

$$= \frac{a^2-3a+2-6-2a+2}{(a-1)(a-2)} = \frac{a^2-5a-2}{(a-1)(a-2)} = x.$$

$$\underline{\text{Solución: } x = \frac{a^2-5a-2}{(a-1)(a-2)}, y = \frac{3}{(a-1)(a-2)}, z = \frac{1}{a-2}.$$

Para $a = -2$ el sistema resulta $\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ -2x + 2y + 2z = -2 \end{cases}$, que es equivalente al sistema $\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$ o, también: $\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$, que es compatible indeterminado. Haciendo $z = \lambda$:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 - 2\lambda \\ x - y = 1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 - 2\lambda \\ 2x - 2y = 2 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow 3x = 3; \quad x = 1.$$

$$y = x - 1 - \lambda = 1 - 1 - \lambda = -\lambda.$$

$$\underline{\text{Solución: } \begin{cases} x = 1 \\ y = -\lambda, \forall \lambda \in R. \\ z = \lambda \end{cases}}$$

2º) Se considera el plano π que pasa por los puntos $P(1, 1, 3)$, $Q(2, 1, 0)$ y $R(-1, -4, -1)$. Encuentra el punto de π que más cerca está del punto $S(-3, 1, 1)$ (o sea, el pie de la perpendicular de S a π).

Los puntos P, Q y R determinan los vectores:

$$\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = [(2, 1, 0) - (1, 1, 3)] = (1, 0, -3).$$

$$\overrightarrow{PR} = [R - P] = [(-1, -4, -1) - (1, 1, 3)] = (-2, -5, -4).$$

Considerando el punto $P(1, 1, 3)$:

$$\pi(P; \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-3 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -5 & -4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$6(y-1) - 5(z-3) - 15(x-1) + 4(y-1) = 0;$$

$$-15(x-1) + 10(y-1) - 5(z-3) = 0; \quad 3(x-1) - 2(y-1) + (z-3) = 0;$$

$$3x - 3 - 2y + 2 + z - 3 = 0 \Rightarrow \pi \equiv 3x - 2y + z - 4 = 0.$$

Un vector normal de π es $\vec{n} = (3, -2, 1)$.

La expresión de la recta r , perpendicular a π es: $r \equiv \begin{cases} x = -3 + 3\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$.

El punto M de π pedido es la intersección de la recta r con el plano π :

$$\pi \equiv 3x - 2y + z - 4 = 0 \quad \left. \begin{matrix} r \equiv \begin{cases} x = -3 + 3\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \end{matrix} \right\} \Rightarrow 3(-3 + 3\lambda) - 2(1 - 2\lambda) + (1 + \lambda) - 4 = 0;$$

$$-9 + 9\lambda - 2 + 4\lambda + 1 + \lambda - 4 = 0; \quad 14\lambda - 14 = 0; \quad \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1.$$

$$\begin{cases} x = -3 + 3\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \underline{M(0, -1, 2)}.$$

3º) Calcula los siguientes límites: a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \tan x}{1 - \cos(2x)}$. b) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{x}{\sin(\pi x)}}$.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \tan x}{1 - \cos(2x)} = \frac{0 \cdot \tan 0}{1 - \cos 0} = \frac{0}{1 - 1} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot \tan x + x \cdot (1 + \tan^2 x)}{+2 \cdot \sin(2x)} = \frac{\tan 0 + 0 \cdot (1 + 0)}{2 \cdot \sin 0} = \frac{0 + 0 \cdot 0}{2 \cdot 0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan^2 x + 1 \cdot (1 + \tan^2 x) + x \cdot 2 \cdot \tan x \cdot (1 + \tan^2 x)}{2 \cdot 2 \cdot \cos(2x)} = \frac{1 + 0 + 1 \cdot 1 + 0}{4 \cdot 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \tan x}{1 - \cos(2x)} = \frac{1}{2}.$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{x}{\sin(\pi x)}} = 1^{\frac{1}{\sin \pi}} = 1^{\frac{1}{0}} = 1^\infty \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{x}{\sin(\pi x)}} = A; \quad LA = L \left[\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{x}{\sin(\pi x)}} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} Lx^{\frac{x}{\sin(\pi x)}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{\sin(\pi x)} \cdot Lx \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot Lx}{\sin(\pi x)} = \frac{1 \cdot L1}{\sin \pi} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 \cdot Lx + x \cdot \frac{1}{x}}{\pi \cdot \cos(\pi x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + Lx}{\pi \cdot \cos(\pi x)} = \frac{1 + L1}{\pi \cdot \cos \pi} = \frac{1 + 0}{\pi \cdot (-1)} = -\frac{1}{\pi} = LA \Rightarrow A = e^{-\frac{1}{\pi}} = \frac{1}{\sqrt[e]{e}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{x}{\sin(\pi x)}} = \frac{1}{\sqrt[e]{e}}.$$

4º) Dadas las funciones $f(x) = |x - 1| - 1$ y $g(x) = \text{sen } \frac{\pi x}{2}$, encuentra los dos puntos en que se cortan. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas curvas.

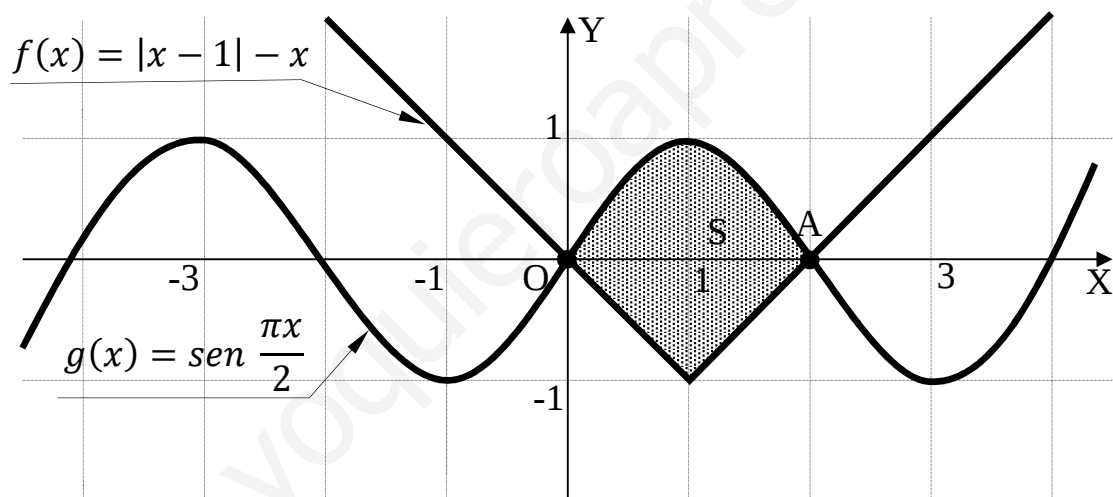
Teniendo en cuenta que $|x - 1| = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, la función $f(x)$ puede redefinirse de la forma siguiente: $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 1 \\ x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Los puntos de corte se obtienen igualando las dos funciones:

$$\text{Para } x < 1 \Rightarrow -x = \text{sen } \frac{\pi x}{2} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \underline{O(0,0)}.$$

$$\text{Para } x > 1 \Rightarrow x - 2 = \text{sen } \frac{\pi x}{2} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \underline{A(2,0)}.$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la siguiente:



$$\begin{aligned} \int \text{sen } \frac{\pi x}{2} \cdot dx &\Rightarrow \left\{ \frac{\pi x}{2} = t \rightarrow \frac{\pi}{2} dx = dt \rightarrow dx = \frac{2}{\pi} dt \right\} \Rightarrow \frac{2}{\pi} \int \text{sen } t \cdot dt = \\ &= -\frac{2}{\pi} \cdot \cos t = -\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta lo anterior y de la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 [g(x) - f(x)] dx = \int_0^1 \left[\text{sen } \frac{\pi x}{2} - (-x) \right] dx + \int_1^2 \left[\text{sen } \frac{\pi x}{2} - (x - 2) \right] dx = \\ &= \int_0^1 \left(\text{sen } \frac{\pi x}{2} + x \right) dx + \int_1^2 \left(\text{sen } \frac{\pi x}{2} - x + 2 \right) dx = \\ &= \left[-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_1^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{1^2}{2}\right) - \left(-\frac{2}{\pi} \cos 0 + 0\right) + \\
&+ \left(-\frac{2}{\pi} \cos \pi - \frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2\right) - \left(-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} - \frac{1^2}{2} + 2 \cdot 1\right) = \\
&= -0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot 1 - \frac{2}{\pi} \cdot (-1) - 2 + 4 + 0 + \frac{1}{2} - 2 = \frac{4}{\pi} + 1 = \frac{4+\pi}{\pi}.
\end{aligned}$$

$$\underline{S = \frac{4+\pi}{\pi} \cong 2,27 \, u^2.}$$

www.yoquieroaprobar.es

OPCIÓN B

1º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, calcula A^{57} y A^{-68} .

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

.....

$$A^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ n \cdot (-1)^{n+1} & (-1)^n \end{bmatrix}.$$

$$A^{57} = \begin{bmatrix} (-1)^{57} & 0 \\ 57 \cdot (-1)^{58} & (-1)^{57} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 57 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{A^{57} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 57 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-68} = \begin{bmatrix} (-1)^{-68} & 0 \\ -68 \cdot (-1)^{-67} & (-1)^{-68} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 68 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{A^{-68} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 68 & 1 \end{pmatrix}.$$

También puede hacerse del siguiente modo:

$$A^{-68} = \frac{1}{A^{68}} = \frac{1}{\begin{bmatrix} (-1)^{58} & 0 \\ 68 \cdot (-1)^{69} & (-1)^{68} \end{bmatrix}} = \frac{1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -68 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -68 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Procediendo por el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -68 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 + 68F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 68 & 1 \end{array} \right).$$

2º) Encuentra la ecuación en forma continua de la recta que corta perpendicularmente a $r \equiv \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x - 2y + z - 3 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+2}{1}$.

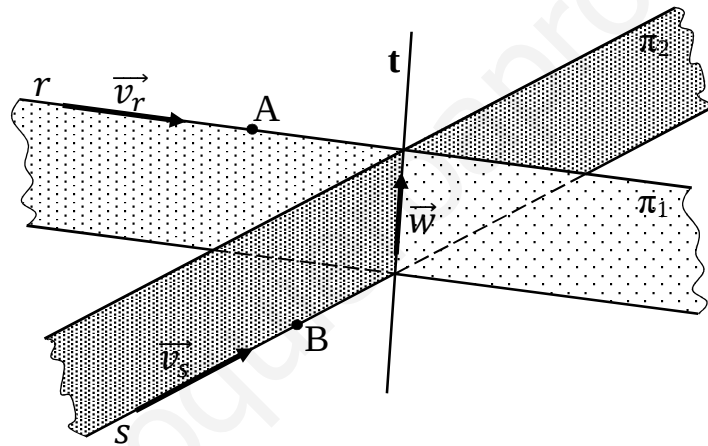
La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x - 2y + z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \lambda \Rightarrow y = -2 + 2\lambda; \quad z = 3 - x + 2y =$$

$$= 3 - \lambda - 4 + 4\lambda = -1 + 3\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + 2\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$$

Un punto y un vector director de r son $A(0, -2, -1)$ y $\vec{v}_r = (1, 2, 3)$.

Un punto y un vector director de s son $B(2, 4, -2)$ y $\vec{v}_s = (2, -1, 1)$.



Un vector $\vec{w}$ perpendicular a los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de estos vectores:

$$\vec{w}' = \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2i + 6j - k - 4k + 3i - j = 5i + 5j - 5k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{w} = (1, 1, -1).$$

Determinamos dos planos π_1 y π_2 de las siguientes características:

$$\pi_1(A; \vec{v}_r, \vec{w}) \equiv \begin{vmatrix} x & y + 2 & z + 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2x + 3(y + 2) + (z + 1) - 2(z + 1) - 3x + (y + 2) = 0;$$

$$= -5x + 4(y + 2) - (z + 1) = 0; \quad -5x + 4y + 8 - z - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\pi_1 \equiv 5x - 4y + z - 7 = 0.$$

$$\pi_2(B; \vec{v}_s, \vec{w}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z+2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-2) + (y-4) + 2(z+2) + (z+2) - (x-2) + 2(y-4) = 0;$$

$$= 3(y-4) + 3(z+2) = 0; \quad y-4 + z+2 = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv y + z - 2 = 0.$$

La recta pedida t es la intersección de los planos obtenidos anteriormente, π_1 y π_2 : $t \equiv \begin{cases} 5x - 4y + z - 7 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}.$

Para expresar t en función continua hacemos:

$$z = \lambda; \quad y = 2 - \lambda; \quad 5x = 7 + 4y - z = 7 + 8 - 4\lambda - \lambda = 15 - 5\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 3 - \lambda \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}.$$

La expresión de t dada por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$t \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}.$$

3º) Hallar las asíntotas de la función $y = f(x) = \frac{4x^2-1}{2x+4}$.

Las asíntotas pueden ser horizontales, verticales y oblicuas.

Horizontales: Son los valores finitos de x para los cuales la función toma valores finitos, es decir, es el límite cuando $x \rightarrow \infty$ de la función.

$$y = k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2-1}{2x+4} = \infty \Rightarrow \underline{\text{No tiene asíntotas horizontales.}}$$

Verticales: Son los valores finitos de x que anulan el denominador.

$$2x + 4 = 0; \quad x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2.$$

La recta $x = -2$ es asíntota vertical de la función.

Oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ y } n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx], \text{ con m finito y } m \neq 0.$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2-1}{2x^2+4x} = 2.$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2-1}{2x+4} - 2 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2-1-4x^2-8x}{2x+4} = -4.$$

Asíntota oblicua: $y = 2x - 4$.

4º) Dada la función $f(x) = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} x^2 \right) \cdot e^{x^2}$, demuestra que existe un valor $a \in (-1, 1)$ tal que $f'(a) = 2$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Por ser $f(-x) = f(x)$, la función es simétrica con respecto al eje de ordenadas, lo que implica que $f(-1) = f(1)$ y, en consecuencia, no le es aplicable el teorema del valor medio o de Lagrange, que dice que: “Si una función es continua en $[m, n]$ y derivable en (m, n) , entonces existe al menos un valor $a \in (m, n)$ que cumple lo siguiente: $f'(a) = \frac{f(m)-f(n)}{m-n}$ ”.

La derivada de la función es la siguiente:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \pi x \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} x^2 \right) \cdot e^{x^2} + \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} x^2 \right) \cdot 2x \cdot e^{x^2} = \\ &= x \cdot e^{x^2} \cdot \left[\pi \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} x^2 \right) + 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} x^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $f'(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ le es aplicable el teorema de los valores intermedios, que dice que: “*si Escriba aquí la ecuación. es una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces para cada valor m tal que $f(a) < m < f(b)$, exista al menos un valor c perteneciente al intervalo (a, b) tal que $f(c) = m$* ”.

$$f'(-1) = -1 \cdot e^1 \cdot \left(\pi \cdot \cos \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right) = -e \cdot 2 = -2e < 2.$$

$$f'(1) = 1 \cdot e^1 \cdot \left(\pi \cdot \cos \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right) = e \cdot 2 = 2e > 2.$$

Lo anterior demuestra que $\exists c \in (-1, 1)$ tal que $f'(c) = 2$.
