

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)**UNIVERSIDADES DE NAVARRA****JULIO – 2017**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B).

OPCIÓN A

1º) Estudia el siguiente sistema $\begin{cases} 2x + 4y + z = 1 \\ 2x + (a^2 + 2)y + 3z = 3 \\ -2x - (a^2 + 2)y + (a - 3)z = \sqrt{2} - 3 \end{cases}$ dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible.

a)

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & a^2 + 2 & 3 \\ -2 & -(a^2 + 2) & a - 3 \end{bmatrix}; M' = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & a^2 + 2 & 3 & 3 \\ -2 & -(a^2 + 2) & a - 3 & \sqrt{2} - 3 \end{bmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & a^2 + 2 & 3 \\ -2 & -(a^2 + 2) & a - 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(a - 3)(a^2 + 2) - 2(a^2 + 2) - 24 + 2(a^2 + 2) + 6(a^2 + 2) - 8(a - 3) =$$

$$= 2(a - 3)(a^2 + 2) - 24 + 6(a^2 + 2) - 8a + 24 =$$

$$= (a^2 + 2)(2a - 6 + 6) - 8a = 2a \cdot (a^2 + 2) - 8a = 2a^3 + 4a - 8a =$$

$$= 2a^3 - 4a = 2a(a^2 - 2) = 0 \Rightarrow a_1 = 0, x_2 = -\sqrt{2}, x_3 = \sqrt{2}.$$

$$\text{Para } \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -\sqrt{2} \\ a \neq \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \text{Ran } M = \text{Ran } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow S.C.D.$$

$$\text{Para } a = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & -3 & \sqrt{2}-3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & \sqrt{2}-3 \end{vmatrix} = 4\sqrt{2} - 12 - 4 - 24 + 4 + 12 - 8\sqrt{2} + 24 = -4\sqrt{2} \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{Rang } M' = 3.$$

$$\text{Para } a = -\sqrt{2} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ -2 & -4 & -\sqrt{2}-3 & \sqrt{2}-3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & -\sqrt{2}-3 & \sqrt{2}-3 \end{vmatrix} =$$

$$= 6\sqrt{2} - 18 - 2\sqrt{2} - 6 - 6 + 6 - 6\sqrt{2} + 18 - 2\sqrt{2} + 6 = -4\sqrt{2} \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Rang } M' = 3.$$

$$\text{Para } \begin{cases} a = 0 \\ a = -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } M = 2; \text{Rang } M' = 3 \Rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

$$\text{Para } a = \sqrt{2} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ -2 & -4 & \sqrt{2}-3 & \sqrt{2}-3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_3 = C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Rang } M' = 2.$$

$$\text{Para } a = \sqrt{2} \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.I.}$$

Se resuelve, en primer lugar, cuando el sistema es compatible determinado aplicando el método de Gauss:

$$M' = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & a^2+2 & 3 & 3 \\ -2 & -(a^2+2) & a-3 & \sqrt{2}-3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 + F_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & a^2-2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a & \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow az = \sqrt{2} \Rightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{a}.$$

$$(a^2-2)y + 2z = 2 \Rightarrow y = \frac{2-2z}{a^2-2} = \frac{2-\frac{2\sqrt{2}}{a}}{a^2-2} = \frac{\frac{2a-2\sqrt{2}}{a}}{a^2-2} = \frac{2(a-\sqrt{2})}{a(a^2-2)}.$$

$$\begin{aligned}
2x + 4y + z = 1 &\Rightarrow 2x = 1 - 4y - z = 1 + \frac{-8(a-\sqrt{2})}{a(a^2-2)} + \frac{-\sqrt{2}}{a} = \\
&= \frac{a(a^2-2)-8(a-\sqrt{2})-\sqrt{2}(a^2-2)}{a(a^2-2)} = \frac{a^3-2a-8a+8\sqrt{2}-a^2\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{a(a^2-2)} = \frac{a^3-10a+10\sqrt{2}-a^2\sqrt{2}}{a(a^2-2)} = \\
&= \frac{a^2(a-\sqrt{2})-10(a-\sqrt{2})}{a(a^2-2)} = \frac{(a-\sqrt{2})(a^2-10)}{a(a^2-2)} \Rightarrow x = \frac{(a-\sqrt{2})(a^2-10)}{2a(a^2-2)}.
\end{aligned}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{(a-\sqrt{2})(a^2-10)}{2a(a^2-2)}, \quad y = \frac{2(a-\sqrt{2})}{a(a^2-2)}, \quad z = \frac{\sqrt{2}}{a}; \quad \forall a \in \mathbb{R} - \{0, \sqrt{2}\}.$$

Se resuelve ahora para $a = \sqrt{2}$ en cuyo caso el sistema es:

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 1 \\ 2x + 4y + 3z = 3 \\ -2x - 4y + (\sqrt{2} - 3)z = \sqrt{2} - 3 \end{cases}, \text{ que es compatible indeterminado.}$$

Para su resolución se elimina una de las ecuaciones, por ejemplo la tercera, y se parametriza una de las incógnitas, por ejemplo $y = \lambda$, con lo que resulta:

$$\begin{aligned}
&\left. \begin{aligned} 2x + 4\lambda + z = 1 \\ 2x + 4\lambda + 3z = 3 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} 2x + z = 1 - 4\lambda \\ 2x + 3z = 3 - 4\lambda \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -2x - z = -1 + 4\lambda \\ 2x + 3z = 3 - 4\lambda \end{aligned} \Rightarrow 2z = 2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow z = 1; \quad 2x + z = 1 - 4\lambda; \quad 2x = 1 - 4\lambda - 1 = -4\lambda \Rightarrow x = -2\lambda.
\end{aligned}$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

2º) Comprueba que las rectas $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-2}$ y $s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{2}$ se cortan perpendicularmente y halla el punto P de corte. Encuentra un punto $R \in r$ y un punto $S \in s$ de forma que P, R, S sean vértices de un triángulo rectángulo cuyos catetos son de longitud 3.

Un punto y un vector de r son $A(1, -1, 1)$ y $\vec{v}_r = (1, 2, -2)$.

Un punto y un vector de s son $B(0, 0, -3)$ y $\vec{v}_s = (2, 1, 2)$.

Los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = [B - A] = [(0, 0, -3) - (1, -1, 1)] = (-1, 1, -4)$.

Según que los vectores $\{\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$\text{Rang } \{\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 4 - 4 - 2 - 2 + 16 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \text{Rang } \{\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w}\} = 2 \Rightarrow \vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w}$ son coplanarios.

Las rectas r y s se cortan.

Dos rectas son perpendiculares cuando lo son sus vectores directores; dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = (1, 2, -2) \cdot (2, 1, 2) = 2 + 2 - 4 = 0.$$

Queda comprobado que las rectas r y s se cortan perpendicularmente.

El punto P de corte de ambas rectas es el siguiente:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{x}{2}; \quad 2x - 2 = x; \quad x = 2. \quad \frac{y+1}{2} = \frac{y}{1}; \quad y + 1 = 2y; \quad y = 1.$$

$$\frac{z-1}{-2} = \frac{z+3}{2}; \quad 2z - 2 = -2z - 6; \quad 4z = -4; \quad z = -1 \Rightarrow \underline{P(2, 1, -1)}.$$

Las expresiones de ambas rectas por ecuaciones paramétricas son las siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases} \text{ y } s \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -3 + 2\lambda \end{cases}.$$

Unos puntos de r y s son $R(1 + \lambda, -1 + 2\lambda, 1 - 2\lambda)$ y $S(2\lambda, \lambda, -3 + 2\lambda)$.

Los puntos P, R y S determinan los siguiente vectores:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PR} &= [R - P] = [(1 + \lambda, -1 + 2\lambda, 1 - 2\lambda) - (2, 1, -1)] = \\ &= (-1 + \lambda, -2 + 2\lambda, 2 - 2\lambda). \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{PR}| = 3 \Rightarrow \sqrt{(-1 + \lambda)^2 + (-2 + 2\lambda)^2 + (2 - 2\lambda)^2} = 3;$$

$$1 - 2\lambda + \lambda^2 + 4 - 8\lambda + 4\lambda^2 + 4 - 8\lambda + 4\lambda^2 = 9; \quad 9\lambda^2 - 18\lambda + 9 = 9;$$

$$9\lambda^2 - 18\lambda = 0; \quad \lambda^2 - 2\lambda = 0; \quad \lambda(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2.$$

$$\lambda_1 = 0 \Rightarrow \underline{R_1(1, -1, 1)}. \quad \lambda_2 = 2 \Rightarrow \underline{R_2(3, 3, -3)}.$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PS} &= [S - P] = [(2\lambda, \lambda, -3 + 2\lambda) - (2, 1, -1)] = \\ &= (-2 + 2\lambda, -1 + \lambda, -2 + 2\lambda). \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{PS}| = 3 \Rightarrow \sqrt{(-2 + 2\lambda)^2 + (-1 + \lambda)^2 + (-2 + 2\lambda)^2} = 3;$$

$$4 - 8\lambda + 4\lambda^2 + 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 4 - 8\lambda + 4\lambda^2 = 9; \quad 9\lambda^2 - 18\lambda = 0; \quad \lambda^2 - 2\lambda = 0;$$

$$\lambda(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2.$$

$$\lambda_1 = 0 \Rightarrow \underline{S_1(0, 0, -3)}. \quad \lambda_2 = 2 \Rightarrow \underline{S_2(4, 2, 1)}.$$

3º) Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $I = \int \frac{dx}{x^2 - x - 2}.$

b) $I = \int x^2 \cdot e^{2x} \cdot dx.$

a)

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - x - 2}.$$

$$x^2 - x - 2 = 0; \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2.$$

$$x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2).$$

$$\frac{1}{x^2 - x - 2} = \frac{M}{x+1} + \frac{N}{x-2} = \frac{Mx - 2M + Nx + N}{(x+1)(x-2)} = \frac{(M+N)x + (-2M+N)}{x^2 - x - 2} \Rightarrow \begin{cases} M + N = 0 \\ -2M + N = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M + N = 0 \\ 2M - N = -1 \end{cases} \Rightarrow 3M = -1; \quad M = -\frac{1}{3}; \quad -\frac{1}{3} + N = 0 \Rightarrow N = \frac{1}{3}.$$

$$I = \int \frac{1}{x^2 - x - 2} \cdot dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{x-2} \right) \cdot dx = -\frac{1}{3} \cdot L|x+1| + \frac{1}{3} \cdot L|x-2| + C =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (L|x-2| - L|x+1|) = L^3 \sqrt{\left| \frac{x-2}{x+1} \right|} + C.$$

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - x - 2} = L^3 \sqrt{\left| \frac{x-2}{x+1} \right|} + C.$$

b)

$$I = \int x^2 \cdot e^{2x} \cdot dx.$$

$$I = \int x^2 e^{2x} \cdot dx \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 \rightarrow du = 2x dx \\ e^{2x} dx = dv \rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases} \Rightarrow x^2 \frac{1}{2} e^{2x} - \int e^{2x} 2x \cdot \frac{1}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \cdot e^{2x} - \int x \cdot e^{2x} \cdot dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot e^{2x} - A. \quad (*)$$

$$A = \int x e^{2x} \cdot dx \Rightarrow \begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ e^{2x} \cdot dx = dv \rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases} \Rightarrow x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C = \frac{1}{4} e^{2x} (2x - 1) + C.$$

Sustituyendo en (*) el valor de A:

$$I = \frac{1}{2} x^2 \cdot e^{2x} - \frac{1}{4} \cdot e^{2x} (2x - 1) + C = \frac{1}{4} e^{2x} (2x^2 - 2x + 1) + C.$$

$$\underline{I = \int x^2 \cdot e^{2x} \cdot dx = \frac{1}{4} e^{2x} (2x^2 - 2x + 1) + C.}$$

www.yoquieroaprobar.es

4º) Demuestra que existe $a \in (0, 2)$ tal que $f'(a) = -\frac{1}{3}$, siendo la función primitiva $f(x) = (x+1)^{(x-1) \cdot \cos \frac{\pi x}{2}}$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Las funciones $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas y derivables en el intervalo $(0, 2)$.

$$f(x) = (x+1)^{(x-1) \cdot \cos \frac{\pi x}{2}} \Rightarrow L[f(x)] = \left[(x-1) \cdot \cos \frac{\pi x}{2} \right] \cdot L(x+1).$$

Derivando:

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \left[1 \cdot \cos \frac{\pi x}{2} - (x-1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi x}{2} \right] L(x+1) + \left[(x-1) \cdot \cos \frac{\pi x}{2} \right] \cdot \frac{1}{x+1} = \\ &= \left[\cos \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi(x-1)}{2} \cdot \sin \frac{\pi x}{2} \right] L(x+1) + \frac{x-1}{x+1} \cdot \cos \frac{\pi x}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow f'(x) &= (x+1)^{(x-1) \cdot \cos \frac{\pi x}{2}} \cdot \left\{ \left[\cos \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi(x-1)}{2} \cdot \sin \frac{\pi x}{2} \right] L(x+1) + \frac{x-1}{x+1} \cdot \cos \frac{\pi x}{2} \right\}. \end{aligned}$$

$$f'(0) = 1^{-1 \cdot 1} \cdot \left\{ \left[1 + \frac{\pi}{2} \cdot 0 \right] \cdot 0 - 1 \right\} = -1.$$

$$f'(1) = 2^{0 \cdot 0} \cdot \{ [0 - 0 \cdot 1] L2 + 0 \cdot 0 \} = 2 \cdot 0 = 0.$$

En el intervalo $(0, 1) \in (0, 2)$ le es aplicable a $f'(x)$ el teorema de los Valores Intermedios o propiedad de Darboux que dice: “si una función $f(x)$ es continua en un intervalo $[a, b]$ y un número k está comprendido entre los valores extremos de la función, o sea, $f(a) \leq k \leq f(b)$ o $f(a) \geq k \geq f(b)$, entonces existe un valor $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$ ”.

Como quiera que es $f'(0) = -1 < -\frac{1}{3} < f'(1) = 0$:

$\exists a \in (0, 2)$ tal que $f'(a) = -\frac{1}{3}$, como teníamos que demostrar.

OPCIÓN B

1º) Encuentra la matriz X que verifica $7A - A^7 = B \cdot B^t \cdot X$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$7A - A^7 = B \cdot B^t \cdot X; \quad 7A - A^7 = M \cdot X; \quad M^{-1} \cdot (7A - A^7) = M^{-1} \cdot M \cdot X;$$

$$M^{-1} \cdot (7A - A^7) = I \cdot X \Rightarrow \underline{X = M^{-1} \cdot (7A - A^7)}.$$

$$M = B \cdot B^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 4 = 6. \quad M^t = M = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}. \quad \text{Adj. de } M^t = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$M^{-1} = \frac{\text{Adj. de } M^t}{|M|} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

.....

$$A^7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}. \quad 7A - A^7 = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -7 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I.$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión de X :

$$X = M^{-1} \cdot (7A - A^7) = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot 6I = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}}.$$

2º) A, B y C son los puntos de corte del plano $\pi \equiv 4x + 2y + z - 4 = 0$ con los ejes coordenados. Encuentra el punto D de la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-3}{-1}$ tal que A, B, C y D son vértices de un paralelepípedo de volumen $6 u^3$.

$$\text{Eje X} \Rightarrow s_1 \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}. \quad \text{Eje Y} \Rightarrow s_2 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}. \quad \text{Eje Z} \Rightarrow s_3 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Corte con el eje X: } \left. \begin{array}{l} \pi \equiv 4x + 2y + z - 4 = 0 \\ s_1 \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow A(1, 0, 0).$$

$$\text{Corte con el eje Y: } \left. \begin{array}{l} \pi \equiv 4x + 2y + z - 4 = 0 \\ s_2 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow B(0, 2, 0).$$

$$\text{Corte con el eje Z: } \left. \begin{array}{l} \pi \equiv 4x + 2y + z - 4 = 0 \\ s_3 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow z = 4 \Rightarrow C(0, 0, 4).$$

$$\text{La expresión de } r \text{ dada por unas ecuaciones paramétricas es } r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 \\ z = 3 - \lambda \end{cases}.$$

El punto D tiene por expresión general: $D(1 + \lambda, 3, 3 - \lambda)$.

Los puntos A, B, C y D determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(0, 2, 0) - (1, 0, 0)] = (-1, 2, 0).$$

$$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(0, 0, 4) - (1, 0, 0)] = (-1, 0, 4).$$

$$\overrightarrow{AD} = [D - A] = [(1 + \lambda, 3, 3 - \lambda) - (1, 0, 0)] = (\lambda, 3, 3 - \lambda).$$

Sabiendo que el volumen de un paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores que lo determinan:

$$V_{ABCD} = \left\| \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ \lambda & 3 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \right\| = 6; \quad |8\lambda + 12 + 2(3 - \lambda)| = 6;$$

$$|4\lambda + 6 + 3 - \lambda| = 3; \quad |3\lambda + 9| = 3 \Rightarrow |\lambda + 3| = 1 \Rightarrow \lambda + 3 = \pm 1 \Rightarrow.$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -4 \Rightarrow \underline{D_1(-3, 3, 7)}; \quad \lambda_2 = -2 \Rightarrow \underline{D_2(-1, 3, 5)}.$$

3º) Demuestra que existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que $f'(\alpha) = 3$ siendo la función primitiva $f(x) = (x + 1)^{(x+1)}$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

La función $f(x) = (x + 1)^{(x+1)}$ es continua y derivable en $(0, 1)$.

$$f(0) = (0 + 1)^{(0+1)} = 1$$

$$f(1) = (1 + 1)^{(1+1)} = 2^2 = 4.$$

$$L[f(x)] = L(x + 1)^{(x+1)} = (x + 1) \cdot L(x + 1).$$

Derivando:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \cdot L(x + 1) + (x + 1) \cdot \frac{1}{x+1} = 1 + L(x + 1).$$

$$f'(x) = (x + 1)^{(x+1)} \cdot [1 + L(x + 1)].$$

$$f'(0) = (0 + 1)^{(0+1)} \cdot [1 + L(0 + 1)] = 1 \cdot 1 = 1.$$

$$f'(1) = (1 + 1)^{(1+1)} \cdot [1 + L(2 + 1)] = 4 \cdot (1 + L3) \cong 8,39.$$

Por ser $f'(0) \neq f'(1)$ no es posible la aplicación del teorema de Rolle, pero si es posible la aplicación del teorema de los Valores Intermedios o propiedad de Darboux que dice: “si una función $f(x)$ es continua en un intervalo $[a, b]$ y un número k está comprendido entre los valores extremos de la función, o sea, $f(a) \leq k \leq f(b)$ o $f(a) \geq k \geq f(b)$, entonces existe un valor $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$ ”.

Como es $f'(0) < 3 < f'(1) \Rightarrow \exists a \in (0, 1)$ tal que $f'(a) = 3$.

Lo anterior demuestra lo pedido.

4º) Dadas las funciones: $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$ y $g(x) = x^3 - 4x$, encuentra los tres puntos en que se cortan. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas curvas.

Los tres puntos de corte son $A(-2, 0)$, $O(0, 0)$ y $B(2, 0)$.

Teniendo en cuenta que $f(-x) = -f(x)$ y $g(-x) = -g(x)$, ambas funciones son simétricas con respecto al origen.

Considerando el valor $x = 1 \in (0, 2)$:

$$f(1) = \sin \frac{\pi}{2} = 1; \quad g(1) = 1 - 4 = -3 \Rightarrow f(1) > g(1).$$

De lo expresado anteriormente se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot \int_0^2 [f(x) - g(x)] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^2 \left[\sin \frac{\pi x}{2} - (x^3 - 4x) \right] \cdot dx = \\ &= 2 \cdot \int_0^2 \sin \frac{\pi x}{2} \cdot dx - 2 \cdot \int_0^2 (x^3 - 4x) \cdot dx = 2M - 2N. \quad (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= \int_0^2 \sin \frac{\pi x}{2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi x}{2} = t \\ dx = \frac{2}{\pi} \cdot dt \end{array} \right| \begin{array}{l} x = 2 \rightarrow t = \pi \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \end{array} \Rightarrow \int_0^\pi \sin t \cdot \frac{2}{\pi} \cdot dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot [-\cos t]_0^\pi = \frac{2}{\pi} \cdot [\cos t]_\pi^0 = \frac{2}{\pi} \cdot (\cos 0 - \cos \pi) = \frac{2}{\pi} \cdot [1 - (-1)] = \frac{4}{\pi}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N &= \int_0^2 (x^3 - 4x) \cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2} \right]_0^2 = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_0^2 = \left(\frac{2^4}{4} - 2 \cdot 2^2 \right) - 0 = \\ &= 4 - 8 = -4. \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores obtenidos de M y N en la expresión (*):

$$S = 2M - 2N = 2 \cdot \frac{4}{\pi} - 2 \cdot (-4) = \frac{8}{\pi} + 8 = \frac{8+8\pi}{\pi} = \frac{8(1+\pi)}{\pi}.$$

$$\underline{S = \frac{8(1+\pi)}{\pi} u^2 \cong 10,55 u^2.}$$
