PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE NAVARRA

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza una de las dos opciones, A o B.

OPCIÓN A

1º) Estudia el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+2y=1 \\ x+(a+4)y+(a+1)z=0 \\ -(a+2)y+(a^2+3a+2)z=a+4 \end{cases}$ dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & a+4 & a+1 \\ 0 & -a-2 & a^2+3a+2 \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & a+4 & a+1 & 0 \\ 0 & -a-2 & a^2+3a+2 & a+4 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & a+4 & a+1 \\ 0 & -a-2 & a^2+3a+2 \end{vmatrix}=$$

$$=(a+4)(a^2+3a+2)-(a+1)(-a-2)-2(a^2+3a+2)=$$

$$=a^3+3a^2+2a+4a^2+12a+8+a^2+2a+a+2-2a^2-6a-4=$$

$$=a^3+6a^2+11a+6=0.$$

Resolviendo por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 6 & 11 & 6 \\ -1 & & -1 & -5 & -6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} \\ -2 & & -2 & -6 & \\ \hline & 1 & 3 & \boxed{0} & \\ -3 & & -3 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

$\Rightarrow a_1=-1, a_2=-2, a_3=-3.$

$$Para \begin{cases} a\neq -1 \\ a\neq -2 \\ a\neq -3 \end{cases} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.$$

$$Para\ a = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 1 - 6 = 2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$Para\ m = -2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_2 = 2C_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix} a = -1 \\ a = -2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a = -3 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 - F_2 = F_3\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ a = -3 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < n^{o}\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Se resuelve en primer lugar para $a \neq -1, a \neq -2\ y\ a \neq -3$ por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & a+4 & a+1 \\ a+4 & -a-2 & a^2+3a+2 \end{vmatrix}}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{(a+4)(a^2+3a+2)+2(a+1)(a+4)+(a+2)(a+1)}{(a+1)(a+2)(a+3)} =$$

$$= \frac{a^3+3a^2+2a+4a^2+12a+8+(a+1)(2a+8+a+2)}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{a^3+7a^2+14a+8+(a+1)(3a+10)}{(a+1)(a+2)(a+3)} =$$

$$= \frac{a^3+7a^2+14a+8+3a^2+10a+3a+10}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{a^3+10a^2+27a+18}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{(a+1)(a+3)(a+6)}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{a+6}{a+2} = x.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a+1 \\ 0 & a+4 & a^2+3a+2 \end{vmatrix}}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{-(a+4)(a+1)-(a^2+3a+2)}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{-a^2-5a-4-a^2-3a-2}{(a+1)(a+2)(a+3)} =$$

$$= \frac{-2a^2-8a-6}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{-2\cdot(a^2+4a+3)}{(a+1)(a+2)(a+3)} = -2 \cdot \frac{(a+1)(a+3)}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{-2}{a+2} = y.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a+4 & 0 \\ 0 & -a-2 & a+4 \end{vmatrix}}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{(a+4)(a+4)-a-2-2(a+4)}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{a^2+8a+16-a-2-2a-8}{(a+1)(a+2)(a+3)} =$$

$$= \frac{a^2+5a+6}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{(a+2)(a+3)}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{1}{a+1} = z.$$

$$\underline{Solución: x = \frac{a+6}{a+2};\;\; y = \frac{-2}{a+2};\;\; z = \frac{1}{a+1}, \forall a \in R - \{-1, -2, -3\}.}$$

Para $a = -3$ el sistema resulta $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + y - 2z = 0 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$, que es compatible indeterminado. Despreciando la segunda ecuación y haciendo $z = \lambda$:

$$y = 1 - 2\lambda;\;\; x = 1 - 2y = 1 - 2(1 - 2\lambda) = 1 - 2 + 4\lambda = -1 + 4\lambda.$$

$$\underline{Solución: x = -1 + 4\lambda;\;\; y = 1 - 2\lambda;\;\; z = \lambda,\;\; \forall \lambda \in R.}$$

****

2º) Sean los puntos $P(7,4,2), Q(1,2,-2)\ y\ R(2,1,-3)$. Uno de ellos es el centro de un rombo, y los otros dos, vértices. Halla los dos vértices restantes.

Los puntos $P(7,4,2), Q(1,2,-2)\ y\ R(2,1,-3)$ determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{QP} = [P - Q] = [(7,4,2) - (1,2,-2)] = (6,2,4).$$

$$\overrightarrow{RP} = [P - R] = [(7,4,2) - (2,1,-3)] = (5,3,5).$$

$$\overrightarrow{QR} = [R - Q] = [(2,1,-3) - (1,2,-2)] = (1,-1,-1).$$

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{RP} = (6,2,4) \cdot (5,3,5) = 30 + 6 + 20 = 56 \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{QP}\ y\ \overrightarrow{RP}\ no\ son\ \perp.$$

$$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = (6,2,4) \cdot (1,-1,-1) = 6 - 2 - 4 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{QP}\ y\ \overrightarrow{RP}\ son\ \perp.$$

$$\underline{El\ centro\ del\ rombo\ es\ el\ punto\ Q(1,2,-2)}.$$

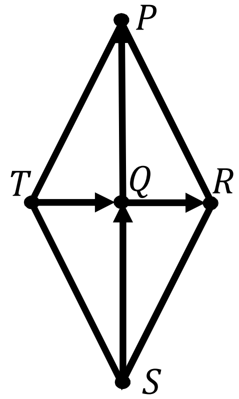
$$\overline{PQ} = \sqrt{(1-7)^2 + (2-4)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{36 + 4 + 16} = \sqrt{56}.$$

$$\overline{PR} = \sqrt{(2-7)^2 + (1-4)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{25 + 9 + 25} = \sqrt{59}.$$

$$\overline{QR} = \sqrt{(2-1)^2 + (1-2)^2 + (-3+2)^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}.$$

De lo anterior se deduce que los puntos $P\ y\ R$ determinan un lado del rectángulo y los puntos $P\ y\ Q$ determinan un segmento que es la mitad de la diagonal mayor y los puntos $Q\ y\ R$ determinan un segmento que es la mitad de la diagonal menor.

De la observación de la figura adjunta se deducen las igualdades de los siguientes vectores:



$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{TQ} \Rightarrow (1,-1,-1) = [Q - T];$$

$$(1,-1,-1) = [(1,2,-2) - (x,y,z)] = (1-x, 2-y, -2-z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - x = 1 \rightarrow x = 0 \\ 2 - y = -1 \rightarrow y = 3 \\ -2 - z = -1 \rightarrow z = -1 \end{cases} \Rightarrow \underline{T(0,3,-1)}.$$

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{SQ} \Rightarrow (6,2,4) = [Q - S] = [(1,2,-2) - (x,y,z)] =$$

$$(6,2,4) = (1-x, 2-y, -2-z) \Rightarrow \left.\begin{cases} 1 - x = 6 \to x = -5 \\ 2 - y = 2 \to y = 0 \\ -2 - z = 4 \to z = -6 \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{S(-5,0,-6)}.$$

****

3º) Calcula las siguientes integrales:

$a)\ I=\int e^{\cos 3x}\cdot sen\ 3x\cdot dx.$ $\qquad$ $b)\ I=\int \frac{sen\ 2x}{1+cos^2(2x)}\cdot dx.$

$a)$

$$I=\int e^{\cos 3x}\cdot sen\ 3x\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c}\cos(3x)=t\\ -3\cdot sen\ x\cdot dx=dt\\ sen\ x\cdot dx=-\frac{1}{3}\cdot dt\end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{1}{3}\cdot\int e^t\cdot dt=$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot e^t+C=-\frac{1}{3}\cdot e^{\cos(3x)}+C.$$

$$\underline{I=\int e^{\cos 3x}\cdot sen\ 3x\cdot dx=-\frac{1}{3}\cdot e^{\cos(3x)}+C.}$$

$b)$

$$I=\int \frac{sen\ 2x}{1+cos^2(2x)}\cdot dx=\int \frac{2\cdot sen\ x\cdot \cos x}{1+cos^2(2x)}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c}\cos 2x=t\\ -2\cdot sen\ 2x\cdot dx=dt\\ sen\ 2x\cdot dx=-\frac{1}{2}dt\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\cdot dt=-\frac{1}{2}\cdot arc\ tag\ t+C=-\frac{1}{2}\cdot arc\ tag\ (\cos 2x)+C.$$

$$\underline{I=\int \frac{sen\ 2x}{1+cos^2(2x)}\cdot dx=-\frac{1}{2}\cdot arc\ tag\ (\cos 2x)+C.}$$

****

4º) Halla las asíntotas (no es necesario hacer el estudio de la posición de la curva respecto a ellas) y los extremos relativos de la función $y=f(x)=\frac{2x^2+6}{x-1}$.

Asíntotas horizontales: son de la forma $y=k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$\left.\begin{array}{l} k=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+6}{x-1}=+\infty \\ k=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2+6}{x-1}=-\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow La\ recta\ x=1\ es\ asíntota\ vertical}.$$

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y=mx+n$, siendo:

$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ y $n=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-mx]$, con m finito y $m\neq 0$.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2+6}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+6}{x^2-x}=2.$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+6}{x-1}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+6-2x^2+2x}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+6}{x-1}=2.$$

$$\underline{Asíntota\ oblicua: y=2x+2}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto. Esta condición, que es necesaria, no es suficiente; para que exista un máximo o un mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

$$y'=f'(x)=\frac{4x\cdot(x-1)-(2x^2+6)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{4x^2-4x-2x^2-6}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-4x-6}{(x-1)^2}=\frac{2(x^2-2x-3)}{(x-1)^2}.$$

$$y'=f'(x)=0 \Rightarrow \frac{2(x^2-2x-3)}{(x-1)^2}=0 \Rightarrow x^2-2x-3=0;\ \ x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}=1\pm 2 \Rightarrow x_1=-1, x_2=3.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; se es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$y'' = f''(x) = \frac{(4x-4)\cdot(x-1)^2 - 2(x^2-2x-3)\cdot[2\cdot(x-1)\cdot 1]}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(4x-4)\cdot(x-1) - 4(x^2-2x-3)}{(x-1)^3} = \frac{4x^2-4x-4x+4-4x^2+8x+12}{(x-1)^3} = \frac{16}{(x-1)^3}.$$

$$f''(-1) = \frac{16}{(-1-1)^3} = \frac{16}{-8} = -2 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -1.$$

$$f(-1) = \frac{2\cdot(-1)^2+6}{-1-1} = \frac{2+6}{-2} = -4 \Rightarrow \underline{Máximo: A(-1, -4).}$$

$$f''(3) = \frac{16}{(3-1)^3} = \frac{16}{8} = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 3.$$

$$f(3) = \frac{2\cdot 3^2+6}{3-1} = \frac{18+6}{2} = 12 \Rightarrow \underline{Mínimo: B(3, 12).}$$

****

OPCIÓN B

1º) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ a & b & c\\ x & y & z\end{pmatrix}$ tal que $|A|=-1$. Calcular el determinante de la matriz $A^2\cdot B^t$ siendo $B=\begin{pmatrix}x & y & z\\ 2a-x & 2b-y & 2c-z\\ a+1 & b-1 & c-2\end{pmatrix}$.

Teniendo en cuenta que el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes de las matrices y que el determinante de una matriz es igual que el determinante de su matriz traspuesta:

$$|A^2\cdot B^t|=|A\cdot A\cdot B|=|A|\cdot|A|\cdot|B|=-1\cdot(-1)\cdot|B|=|B|.$$

Considerando la propiedad de los determinantes que dice que si todos los elementos de una línea están formados por dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en la suma de dos determinantes en los que las demás líneas permanecen invariantes:

$$|B|=\begin{vmatrix}x & y & z\\ 2a-x & 2b-y & 2c-z\\ a+1 & b-1 & c-2\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}x & y & z\\ 2a & 2b & 2c\\ a+1 & b-1 & c-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & y & z\\ -x & -y & -z\\ a+1 & b-1 & c-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x & y & z\\ 2a & 2b & 2c\\ a+1 & b-1 & c-2\end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot\begin{vmatrix}x & y & z\\ a & b & c\\ a+1 & b-1 & c-2\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}x & y & z\\ a & b & c\\ a & b & c\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}x & y & z\\ a & b & c\\ 1 & -1 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=-2\cdot\begin{vmatrix}x & y & z\\ a & b & c\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix}=+2\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2\\ a & b & c\\ x & y & z\end{vmatrix}=2\cdot|A|=2\cdot(-1)=\underline{-2}.$$

Para el resultado anterior se han tenido en cuanta las propiedades de los determinantes que dicen que si dos líneas de un determinante son proporcionales el valor del determinante es cero y que si se intercambian dos líneas de un determinante su valor cambia de signo.

$$\underline{|A^2\cdot B^t|=-2}$$

****

2º) Halla unas ecuaciones continuas de la recta t que pasa por el punto $P(-4,0,5)$ y corta a las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x+y+1=0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x+y+1=0 \end{cases} \Rightarrow y=\lambda \Rightarrow x=-1-\lambda;\ \ z=1-x-\lambda=$$

$$=1+1+\lambda-\lambda=2=z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=2 \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de r son $Q(-1,0,2)$ y $\overrightarrow{v_r}=(-1,1,0)$.

Los puntos P y Q determinan el vector:

$$\overrightarrow{PQ}=[Q-P]=[(-1,0,2)-(-4,0,5)]=(3,0,-3).$$

El plano π_1 que contiene a la recta r y al punto P tiene la siguiente expresión general:

$$\pi_1(P;\ \overrightarrow{v_r},\overrightarrow{PQ}) \equiv \begin{vmatrix} x+4 & y & z-5 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix}=0;\ -3(x+4)-3(z-5)-3y=0;$$

$$(x+4)+(z-5)+y=0 \Rightarrow \pi_1 \equiv x+y+z-1=0.$$

Un punto y un vector director de la recta s son: $R(2,3,0)\ y\ \overrightarrow{v_s}=(2,1,1)$

Los puntos P y R determinan el vector:

$$\overrightarrow{PR}=[R-P]=[(2,3,0)-(-4,0,5)]=(6,3,-5).$$

El plano π_2 que contiene a la recta s y al punto P tiene la siguiente expresión general:

$$\pi_2(P;\ \overrightarrow{v_s},\overrightarrow{PR}) \equiv \begin{vmatrix} x+4 & y & z-5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & -5 \end{vmatrix}=0;$$

$$-5(x+4)+6y+6(z-5)-6(z-5)-3(x+4)+10y=0;$$

$$-8(x+4)+16y=0; x+4-2y=0 \Rightarrow \pi_2 \equiv x-2y+4=0.$$

La recta t es la intersección de los planos π_1 y π_2: $t \equiv \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x-2y+4=0 \end{cases}$.

La expresión de la recta t por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$t \equiv \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x-2y+4=0 \end{cases} \Rightarrow y=\lambda \Rightarrow x=-4+2\lambda;\;\; z=1-x-y=$$

$$=1+4-2\lambda-\lambda=5-3\lambda=z.$$

$$t \equiv \begin{cases} x=-4+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=5-3\lambda \end{cases} \;\;\Rightarrow\;\; \underline{t \equiv \frac{x+4}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{-3}}.$$

****

3º) Demuestra que existe $a \in (2,3)$ tal que $f(a) = -\frac{3}{2}$, siendo $f(x) = \cos(\pi x) \cdot \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 - 1}$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

La función $f(x) = \cos(\pi x) \cdot \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 - 1}$ es continua en su dominio, que es R, por ser el producto de dos funciones continuas en R, por lo cual le es aplicable el teorema de los Valores Intermedios a cualquier intervalo finito que se considere.

El teorema de los Valores Intermedios dice que: "si una función $f(x)$ es continua en el intervalo $[m, n]$ se cumple que para un valor p tal que $f(m) < p < f(n)$ o también $f(m) > p > f(n)$, existe al menos un valor $a \in [m, n]$ tal que $f(a) = p$".

Aplicando el mencionado teorema a la función $f(x)$ en el intervalo $[2, 3]$.

$f(2) = \cos(2\pi) \cdot \sqrt[3]{2^3 - 2 \cdot 2^2 - 1} = 1 \cdot \sqrt[3]{8 - 8 - 1} = \sqrt[3]{-1} = -1.$

$f(3) = \cos(3\pi) \cdot \sqrt[3]{3^3 - 2 \cdot 3^2 - 1} = -1 \cdot \sqrt[3]{27 - 18 - 1} = -\sqrt[3]{-8} = -2.$

Como quiera que $f(2) > -\frac{3}{2} > f(3)$, queda probado que:

$$\underline{La\ función\ f(x)\ toma\ el\ valor\ -\frac{3}{2}, al\ menos\ una\ vez, en\ el\ intervalo\ (2,3).}$$

****

4º) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las siguientes funciones: $f(x) = -x^2 + 3x$ y $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} \; si \; x \leq 2 \\ 3 - x \; si \; x > 2 \end{cases}$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

Los puntos de corte de dos funciones tienen como abscisas las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.

$$x \leq 2 \Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow -x^2 + 3x = \frac{x}{2}; \;\; -2x^2 + 6x = x; \;\; 2x^2 - 5x = 0;$$

$$x(2x - 5) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \frac{5}{2} \nleq 2 \Rightarrow Solución: x_1 = 0.$$

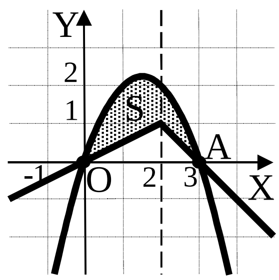
$$x > 0 \Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow -x^2 + 3x = 3 - x; \;\; x^2 - 4x + 3 = 0;$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow x_2 = 1 \ngtr 2, x = 3 \Rightarrow Solución: x_2 = 3.$$

Considerando el valor $x = 1 \Rightarrow 0 < 1 < 3$:

$$f(1) = -1^2 + 3 \cdot 1 = -1 + 3 = 2. \;\; g(1) = \frac{1}{2}. \quad f(1) > g(1).$$

Teniendo en cuanta lo anterior, la superficie a calcular, que se ilustra en la figura adjunta, es la siguiente:



$$S = \int_0^3 [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_0^2 \left[(-x^2 + 3x) - \frac{x}{2}\right] \cdot dx +$$

$$+ \int_2^3 [(-x^2 + 3x) - (3 - x)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^2 \left(-x^2 + \frac{5x}{2}\right) \cdot dx + \int_2^3 (-x^2 + 4x - 3) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{4}\right]_0^2 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - 3x\right]_2^3 = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{4}\right]_0^2 + \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right]_2^3 =$$

$$= \left(-\frac{2^3}{3} + \frac{5 \cdot 2^2}{4}\right) - 0 + \left(-\frac{3^3}{3} + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3\right) - \left(-\frac{2^3}{3} + 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2\right) =$$

$$= -\frac{8}{3} + 5 - 9 + 18 - 9 + \frac{8}{3} - 8 + 6 = 5 - 8 + 6 = 11 - 8 = 3.$$

$$\underline{S = 3 \, u^2}.$$

****