PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

JULIO – 2020

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan.

1º) Estudia el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} (a+1)x+(a^2+a)y=2 \\ (-a-1)x-a^2y=0 \\ ay+(a^2-1)z=3-a \end{cases}$ dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a+1 & a^2+a & 0 \\ -a-1 & -a^2 & 0 \\ 0 & a & a^2-1 \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} a+1 & a^2+a & 0 & 2 \\ -a-1 & -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a & a^2-1 & 3-a \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a+1 & a^2+a & 0 \\ -a-1 & -a^2 & 0 \\ 0 & a & a^2-1 \end{vmatrix}=(a^2-1)\cdot\begin{vmatrix} a+1 & a^2+a \\ -a-1 & -a^2 \end{vmatrix}=0;$$

$$(a^2-1)[-a^2(a+1)+(a+1)(a^2+a)]=(a^2-1)(a+1)(-a^2+a^2+a)=0;$$

$$a(a+1)(a-1)(a+1)=0; \;\; a(a+1)^2(a-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a_1=0 \\ a_2=-1 \\ a_3=1 \end{cases}.$$

$$Para \begin{Bmatrix} a\neq 0 \\ a\neq -1 \\ a\neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = n^{o}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.$$

$$Para\ a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ a = 0 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} Rang\ M = 1 \\ Rang\ M' = 2 \end{Bmatrix}.$$

$$\underline{Para\ a = -1 \Rightarrow Rang\ M = 1;\ Rang\ M' = 2 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 4 + 8 = 0 \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Se resuelve en primer lugar para $a \neq 0, a \neq -1\ y\ a \neq 1$:

$$\left.\begin{array}{l} (a+1)x + (a^2+a)y = 2 \\ (-a-1)x - a^2y = 0 \\ ay + (a^2-1)z = 3 - a \end{array}\right\} \Rightarrow \{F_2 \to F_2 + F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} (a+1)x + (a^2+a)y = 2 \\ ay = 2 \\ ay + (a^2-1)z = 3 - a \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{a}{2} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} (a+1)x + (a^2+a)y = 2 \\ ay = 2 \\ (a^2-1)z = 1 - a \end{array}\right\} \Rightarrow z = \frac{1-a}{a^2-1} = -\frac{a-1}{(a+1)(a-1)} = -\frac{1}{a+1}.$$

Sustituyendo el valor de y en la expresión $(a+1)x + (a^2+a)y = 2$:

$$(a+1)x + (a^2+a) \cdot \frac{2}{a} = 2;\ \ (a+1)x + 2a + 2 = 2 \Rightarrow x = \frac{-2a}{a+1}.$$

$$\underline{Solución: x = \frac{-2a}{a+1};\ \ y = \frac{2}{a};\ \ z = \frac{-1}{a+1}, \forall a \in R - \{0, 1, -1\}.}$$

Resolvemos ahora para $a = 1$; el sistema resulta $\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ -2x - y = 0 \\ y = 3 - 1 \end{cases}$, equivalente al sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 0 \\ y = 2 \end{cases}.$

$\underline{Solución: x = -1;\ \ y = 2;\ \ z = \lambda,\ \forall\lambda \in R}.$

****

2º) Calcula la ecuación continua de una recta r sabiendo que corta a la recta s de ecuaciones $s \equiv \begin{cases} 3x + y - z - 7 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases}$, es paralela al plano $\pi \equiv 2x - y + 3z - 6 = 0$ y pasa por el punto $P(-1, 3, 1)$.

El haz de planos paralelos a π tiene por expresión: $\beta \equiv 2x - y + 3z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β el plano γ que contiene al punto $P(-1, 3, 1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \beta \equiv 2x - y + 3z + D = 0 \\ P(-1, 3, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow -2 - 3 + 3 + D = 0;\ -2 + D = 0 \Rightarrow D = 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \gamma \equiv 2x - y + 3z + 2 = 0.$

El punto Q intersección de la recta s y el plano γ es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{r} s \equiv \begin{cases} 3x + y - z - 7 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \\ \gamma \equiv 2x - y + 3z + 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x + y - z = 7 \\ x + y = 5 \\ 2x - y + 3z = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 5 - x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x + 5 - x - z = 7 \\ 2x - 5 + x + 3z = -2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x - z = 2 \\ 3x + 3z = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 6x - 3z = 6 \\ 3x + 3z = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 9x = 9;\ \ x = 1;$$

$y = 5 - x = 5 - 1 = 4;\ \ 3x + y - z = 7;\ \ 3 + 4 - z = 7;\ \ z = 0 \Rightarrow Q(1, 4, 0).$

La recta r pedida es la que contiene a los puntos P y Q.

$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{PQ} = [Q - P] = [(1, 4, 0) - (-1, 3, 1)] = (2, 1, -1).$

$$\underline{r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{-1}}.$$

****

3º) Calcula los siguientes límites:

$a)\ \lim_{x\to 1}\left(2+sen\ \frac{3\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-x}}.$ $\qquad b)\ \lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7}\right).$

$a)$

$$\lim_{x\to 1}\left(2+sen\ \frac{3\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-x}}=\left(2+sen\ \frac{3\pi}{2}\right)^{\frac{1}{0}}=(2-1)^{\infty}=1^{\infty}\Rightarrow Ind.nº\ e\Rightarrow$$

$$\left(2+sen\ \frac{3\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-x}}=A;\ \ LA=\frac{1}{x^2-x}\cdot L\left(2+sen\ \frac{3\pi x}{2}\right).$$

$$\lim_{x\to 1}(LA)=L\left(\lim_{x\to 1}A\right)=\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x^2-x}\cdot L\left(2+sen\ \frac{3\pi x}{2}\right)\right]=\lim_{x\to 1}\frac{L\left(2+sen\frac{3\pi x}{2}\right)}{x^2-x}=$$

$$=\frac{L\left(2+sen\frac{3\pi}{2}\right)}{1^2-1}=\frac{L(2-1)}{1-1}=\frac{L1}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow\{L'Lopital\}\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\frac{3\pi}{2}\cdot cos\ \frac{3\pi x}{2}}{2+sen\frac{3\pi x}{2}}}{2x-1}=$$

$$=\frac{3\pi}{2}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{cos\ \frac{3\pi x}{2}}{(2x-1)\cdot\left(2+sen\frac{3\pi x}{2}\right)}=\frac{3\pi}{2}\cdot\frac{cos\ \frac{3\pi}{2}}{(2-1)\cdot\left(2+sen\frac{3\pi}{2}\right)}=\frac{3\pi}{2}\cdot\frac{0}{1\cdot(2-1)}=\frac{3\pi}{2}\cdot\frac{0}{1}=\frac{3\pi}{2}\cdot 0=0.$$

$$A=\left(2+sen\ \frac{3\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-x}}=e^0=1\ \Rightarrow\ \underline{\lim_{x\to 1}\left(2+sen\ \frac{3\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-x}}=1.}$$

$b)$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7}\right)=\infty-\infty\Rightarrow Indet.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7}\right)\cdot\left(\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^4-7}\right)}{\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^4-7}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^4-x^2+1-x^4+7}{\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^4-7}}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{-x^2+8}{\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^4-7}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{-x^2+8}{x^2}}{\frac{\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^4-7}}{x^2}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-1+\frac{8}{x^2}}{\frac{\sqrt{x^4-x^2+1}}{x^2}+\frac{\sqrt{x^4-7}}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{-1+\frac{8}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^4-x^2+1}{x^4}}+\sqrt{\frac{x^4-7}{x^4}}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-1+\frac{8}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}+\sqrt{1-\frac{7}{x^4}}}=\frac{-1+\frac{8}{\infty}}{\sqrt{1-\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}}+\sqrt{1-\frac{7}{\infty}}}=\frac{-1+0}{\sqrt{1-0+0}+\sqrt{1-0}}=$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \underline{\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7}\right)=-\frac{1}{2}.}$$

****

4º) Sea la función $f(x) = \left(1 + sen\ \frac{\pi x}{2}\right)^x$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1, 2]$.
b) Demuestra que exista $a \in (1, 2)$ tal que $f'(a) = 0$. Enuncia los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

----

a)

$$f(1) = \left(1 + sen\ \frac{\pi}{2}\right)^1 = 1 + sen\ \frac{\pi}{2} = 1 + 1 = 2 > 0.$$

$$f(2) = (1 + sen\ \pi)^2 = (1 + 0)^2 = 1 > 0.$$

La función $f(x) = \left(1 + sen\ \frac{\pi x}{2}\right)^x$ es positiva en el intervalo $[1, 2]$ por ser continua en dicho intervalo y no anularse en el mismo:

$$1 + sen\ \frac{\pi x}{2} = 0;\ \ sen\ \frac{\pi x}{2} = -1 \Rightarrow x = -1 \notin [1, 2].$$

Por ser $f(x)$ una función exponencial de base positiva es continua en R, por lo cual lo será en cualquier intervalo finito que se considere.

De lo anterior se deduce que $\underline{f(x) = \left(1 + sen\ \frac{\pi x}{2}\right)^x\ \ es\ continua\ en\ [1, 2].}$

b)

$$f(x) = \left(1 + sen\ \frac{\pi x}{2}\right)^x \Rightarrow Lf(x) = x \cdot L\left(1 + sen\ \frac{\pi x}{2}\right).$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \cdot L\left(1 + sen\ \frac{\pi x}{2}\right) + x \cdot \frac{\frac{\pi}{2} \cdot cos\ \frac{\pi x}{2}}{1 + sen\ \frac{\pi x}{2}} = L\left(1 + sen\ \frac{\pi x}{2}\right) + \frac{\frac{\pi x}{2} \cdot cos\ \frac{\pi x}{2}}{1 + sen\ \frac{\pi x}{2}};$$

$$f'(x) = \left[L\left(1 + sen\ \frac{\pi x}{2}\right) + \frac{\frac{\pi x}{2} \cdot cos\ \frac{\pi x}{2}}{1 + sen\ \frac{\pi x}{2}}\right] \cdot \left(1 + sen\ \frac{\pi x}{2}\right)^x.$$

Teniendo en cuenta que $f'(x)$ es continua en $[1, 2]$, por ser $1 + sen\ \frac{\pi x}{2} > 0$ para todo valor $x \in [1, 2]$, le es aplicable el teorema de Bolzano, que dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".

$$f'(1) = \left[L\left(1 + sen\ \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\frac{\pi}{2} \cdot cos\ \frac{\pi}{2}}{1 + sen\ \frac{\pi}{2}}\right] \cdot \left(1 + sen\ \frac{\pi}{2}\right)^1 = \left(L2 + \frac{0}{2}\right) \cdot 2 = 2L2 > 0.$$

$$f'(2) = \left[L(1 + sen\ \pi) + \frac{\pi \cdot cos\ \pi}{1 + sen\ \pi}\right] \cdot (1 + sen\ \pi)^2 = \left(L1 + \frac{-\pi}{1}\right) \cdot 1 = -\pi < 0.$$

$$\underline{Queda\ demostrado\ que\ \exists a \in (1, 2)\ tal\ que\ f'(a) = 0}.$$

****

5º) Sean A y B dos matrices de tamaño 3×3 tales que $|A| = |B| = \frac{1}{2}$. Calcula $|C|$ teniendo en cuenta que $C = (2 \cdot A^t \cdot B^{-1})^2$.

Teniendo en cuenta que $|A^t| = |A|$; que $|B^{-1}| = \left|\frac{1}{B}\right| = \frac{1}{|B|}$ y que $|2A| = 2^3 \cdot |A|$ (el valor 2^3 es como consecuencia de la dimensión 3×3 de la matriz A):

$$|C| = |(2 \cdot A^t \cdot B^{-1})^2| = (|2 \cdot A^t \cdot B^{-1}|)^2 = \left(\left|2A \cdot \frac{1}{B}\right|\right)^2 = \left(\left|\frac{2A}{B}\right|\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{2^3|A|}{|B|}\right)^2 = (8 \cdot 1)^2 = 64.$$

$$\underline{|C| = 64}.$$

****

6º) Los puntos $A(-1, 2, 1)$ y $B(2, 5, 1)$ son dos vértices de un cuadrado. Halla los otros dos vértices sabiendo que están en la recta $r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-4}$.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = -1 - 4\lambda \end{cases}$ y un punto genérico de r es $P(-\lambda, 4 + \lambda, -1 - 4\lambda)$.

Un punto y un vector director de la recta son $E(0, 4, -1)$ y $\overrightarrow{v_r} = (-1, 1, -4)$.

Los puntos A y B determinan el vector $\overrightarrow{AB} = [B - A] = (3, 3, 0)$.

La recta s que contiene a los puntos A y B es $s \equiv \begin{cases} x = -1 + \mu \\ y = 2 + \mu \\ z = 1 \end{cases}$.

Un punto y un vector director de s son $A(-1, 2, 1)$ y $\overrightarrow{v_s} = (1, 1, 0)$.

Por ser linealmente independientes los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$, las rectas r y s se cruzan o se cortan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $E \in r$ y extremo el punto $A \in s$: $\vec{w} = \overrightarrow{EA} = [A - E] = [(-1, 2, 1) - (0, 4, -1)] = (-1, -2, 2)$.

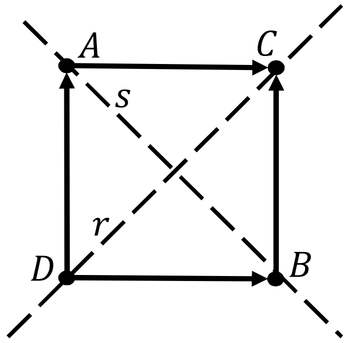
Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 8 - 4 - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\ son\ coplanarios \Rightarrow r\ y\ s\ se\ cortan.$$

Un punto genérico de la recta r tiene la siguiente expresión: $P(-\lambda, 4 + \lambda, -1 - 4\lambda)$.



$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(-\lambda, 4 + \lambda, -1 - 4\lambda) - (-1, 2, 1)] =$

$= (1 - \lambda, 2 + \lambda, -2 - 4\lambda)$.

$\overrightarrow{BC} = [C - B] = [(-\lambda, 4 + \lambda, -1 - 4\lambda) - (2, 5, 1)] =$

$= (-2-\lambda, -1+\lambda, -2-4\lambda).$

Los vectores $\overrightarrow{AC}\ y\ \overrightarrow{BC}$ son perpendiculares, por lo cual, su producto escalar tiene que ser cero:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow (1-\lambda, 2+\lambda, -2-4\lambda) \cdot (-2-\lambda, -1+\lambda, -2-4\lambda) = 0;$$

$$-2-\lambda+2\lambda+\lambda^2-2+2\lambda-\lambda+\lambda^2+4+16\lambda+16\lambda^2 = 0;$$

$$18\lambda^2+18\lambda = 0;\ \ 18\lambda(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1.$$

$$\lambda_1 = 0 \Rightarrow C_1 \equiv (-0, 4+0, -1-0) \Rightarrow C_1(0, 4, -1).$$

$$\lambda_2 = -1 \Rightarrow C_2 \equiv (1, 4-1, -1+4) \Rightarrow C_2(1, 3, 3).$$

Los puntos obtenidos son los otros dos vértices del cuadrado.

$$\underline{C(0, 4, -1)\ y\ D(1, 3, 3)\ o\ bién: C(1, 3, 3)\ y\ D(0, 4, -1).}$$

****

7º) Sea la función $f(x) = (x+3)^{sen\,(\pi x)} \cdot L(x^2 - x + 2)$.

$a)$ Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-1, 0]$.

$b)$ Demuestra que exista $\alpha \in (-1, 0)$ tal que $f'(\alpha) = -L2$. Enuncia los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

$a)$

La función $g(x) = (x+3)^{sen\,(\pi x)}$ es continua en $[-1, 0]$ por ser una función exponencial de base positiva y exponente real.

$h(x) = L(x^2 - x + 2)$ es monótona creciente en su dominio, que es R por ser $x^2 - x + 2 > 0, \forall x \in R$, por lo cual es continua en $[-1, 0]$.

Por ser $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, producto de dos funciones continuas en $[-1, 0]$:

$$\underline{Queda\ demostrado\ que\ f(x)\ es\ continua\ en\ [-1, 0].}$$

$b)$

$f(0) = (0+3)^{sen\,0} \cdot L(0 - 0 + 2) = 3^0 \cdot L2 = L2.$

$f(-1) = (-1+3)^{sen\,(-\pi)} \cdot L[(-1)^2 - (-1) + 2] =$

$= 2^{-sen\,\pi} \cdot L(1 + 1 + 2) = 2^0 \cdot L4 = L4.$

La función $f(x)$ es continua en $[-1, 0]$ y derivable en $(-1, 0)$.

Por ser $f(-1) \neq f(0)$ no le es aplicable en teorema de Rolle, pero si le es aplicable el teorema de Lagrange (que es la generalización del teorema de Rolle) en el intervalo dado.

El teorema del valor medio o de Lagrange dice que "si una función es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$".

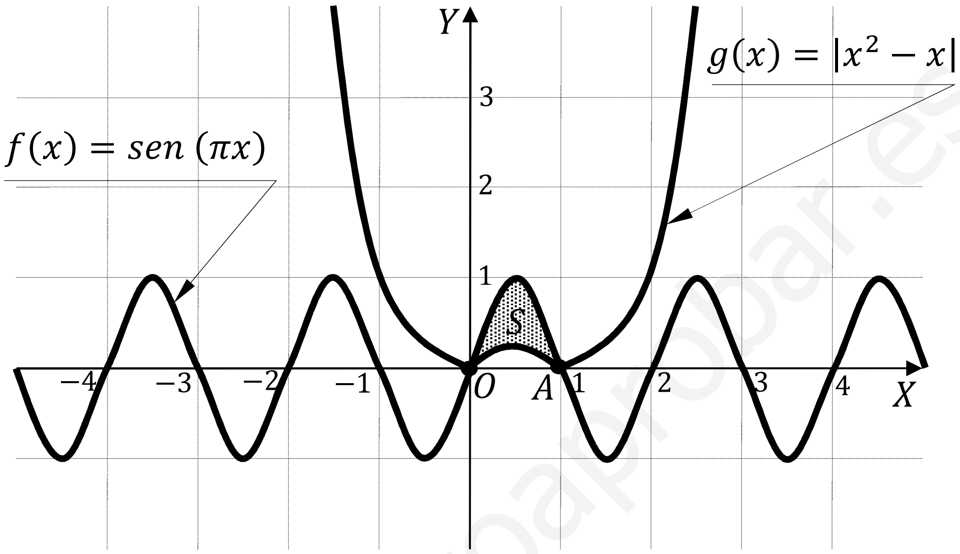
$$f'(c) = \frac{f(0)-f(1)}{0-(-1)} = \frac{L2-L4}{1} = L2 - L4 = L\frac{1}{2} = L1 - L2 = 0 - L2 = -L2.$$

$$\underline{Queda\ demostrado\ que\ existe\ \alpha \in (-1, 0)\ tal\ que\ f'(\alpha) = -L2.}$$

****

8º) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las siguientes funciones: $f(x) = sen\ (\pi x)$ y $g(x) = |x^2 - x|$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

La función de valor absoluto $g(x) = |x^2 - x|$ puede redefinirse de la forma siguiente: $g(x) = \begin{cases} x^2 - x & si\ \ x \leq 0 \\ -x^2 + x & si\ \ 0 < x < 1 \\ x^2 - x & si\ \ x \geq 1 \end{cases}$.



La representación gráfica de la situación se expresa en la figura adjunta, donde se observan los dos puntos de intersección de ambas funciones, que son $O(0, 0)$ y $A(1, 0)$.

$$\int sen\ (\pi x) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \pi x = t \\ dx = \frac{1}{\pi} \cdot cos\ t \cdot dt \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{1}{\pi} \cdot cos\ (\pi x).$$

Teniendo en cuenta que en el intervalo $(0, 1)$ todas las ordenadas de la función $f(x)$ son mayores que las correspondientes ordenadas de la función $g(x)$, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^1 [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_0^1 [sen\ (\pi x) - (-x^2 + x)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 [sen\ (\pi x) + x^2 - x] \cdot dx = \left[\frac{1}{\pi} \cdot cos\ (\pi x) + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{1}{\pi} \cdot cos\ \pi + \frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2}\right] - \left(\frac{1}{\pi} \cdot cos\ 0\right) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} = \frac{2\pi - 3\pi + 12}{6\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{S = \frac{12 - \pi}{6\pi}\ u^2 \cong 0{,}47\ u^2}.$$

****