

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)**UNIVERSIDAD DE NAVARRA****EXTRAORDINARIA – 2021**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan.

1º) Estudia el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} ax + (a - 2)y = a - 2 \\ ax + (a^2 - 2a)y + 2z = a \\ 3ax + (a^2 - 4)y + z = 4a - 4 \end{cases}$$
 dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} a & a - 2 & 0 \\ a & a^2 - 2a & 2 \\ 3a & a^2 - 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} a & a - 2 & 0 & a - 2 \\ a & a^2 - 2a & 2 & a \\ 3a & a^2 - 4 & 1 & 4a - 4 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} a & a - 2 & 0 \\ a & a^2 - 2a & 2 \\ 3a & a^2 - 4 & 1 \end{vmatrix} = a(a - 2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 2 \\ 3 & a + 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= a(a - 2)[a + 6 - 2(a + 2) - 1] = a(a - 2)(a + 6 - 2a - 4 - 1) =$$

$$= a(a - 2) \cdot (-a + 1) = 0 \Rightarrow a_1 = 0; a_2 = 1, a_3 = 2.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\text{Para } \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 1 \\ a \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.D.}$$

$$\text{Para } a = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2 = C_4\} \Rightarrow \text{Rang } M' = 2.$$

$$\underline{\text{Para } a = 0 \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.I.}}$$

$$\text{Para } a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M' \Rightarrow \{C_1 = -C_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 + 6 - 1 = 4 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } M' = 3.$$

$$\text{Para } a = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 4 = 12 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } M' = 3.$$

Para $\begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } M = 2; \text{Rang } M' = 3 \Rightarrow \text{Sistema incompatible.}$

Se resuelve, en primer lugar, para $a \neq 0, a \neq 1$ y $a \neq 2$:

$$\begin{pmatrix} a & a-2 & 0 & a-2 \\ a & a^2-2a & 2 & a \\ 3a & a^2-4 & 1 & 4a-4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 3F_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & a-2 & 0 & a-2 \\ 0 & a^2-3a+2 & 2 & 2 \\ 0 & a^2-3a+2 & 1 & a+2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 - F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & a-2 & 0 & a-2 \\ 0 & a^2-3a+2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & a \end{pmatrix} \Rightarrow z = -a \Rightarrow$$

$$(a^2 - 3a + 2)y - 2a = 2; \quad y = \frac{2a+2}{a^2-3a+2} = \frac{2(a+1)}{(a-1)(a-2)}.$$

$$ax + (a-2) \cdot \frac{2(a+1)}{(a-1)(a-2)} = a-2; \quad ax + \frac{2(a+1)}{a-1} = a-2; \quad ax = a-2 - \frac{2a+2}{a-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ax = \frac{(a-2)(a-1)-2a-2}{a-1} = \frac{a^2-3a+2-2a-2}{a-1} = \frac{a^2-5a}{a-1} = a \cdot \frac{a-5}{a-1} \Rightarrow x = \frac{a-5}{a-1}.$$

$$\underline{\text{Solución: } x = \frac{a-5}{a-1}, y = \frac{2(a+1)}{(a-1)(a-2)}, z = -a, \forall a \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}.}$$

Resolvemos ahora para $a = -2$. El sistema resulta $\begin{cases} -2y = -2 \\ 2z = 0 \\ -4y = -4 \end{cases}$, que es compatible indeterminado cuyas solución es la siguiente:

Solución: $x = \lambda, y = 1, z = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

www.yoquieroaprobar.es

2º) Calcula los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $|A \cdot B^{-1}| = 1$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & t & -t \\ 2t-1 & t-1 & t \\ t-2 & 0 & t-2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} t-1 & t & -t \\ 1-2t & 2t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & t & -t \\ 2t-1 & t-1 & t \\ t-2 & 0 & t-2 \end{vmatrix} \Rightarrow \{C_1 \rightarrow C_1 - C_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1+t & t & -t \\ t-1 & t-1 & t \\ 0 & 0 & t-2 \end{vmatrix} =$$

$$= (t-2) \cdot \begin{vmatrix} 1+t & t \\ t-1 & t-1 \end{vmatrix} = (t-2) \cdot (t-1) \cdot \begin{vmatrix} 1+t & t \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (t-2) \cdot (t-1) \cdot (1+t-t) = (t-2) \cdot (t-1).$$

$$|B| = \begin{vmatrix} t-1 & t & -t \\ 1-2t & 2t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \{C_2 \rightarrow C_2 + C_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} t-1 & 0 & -t \\ 1-2t & 2t-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (2t-1) \cdot \begin{vmatrix} t-1 & -t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (2t-1) \cdot (t-1).$$

$$|A \cdot B^{-1}| = 1; \quad \left| \frac{A}{B} \right| = 1; \quad \frac{|A|}{|B|} = 1; \quad |A| = B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (t-2) \cdot (t-1) = (2t-1) \cdot (t-1); \quad t-2 = 2t-1 \Rightarrow \underline{t = -1}.$$

3º) Calcula la ecuación general de la recta t que corta perpendicularmente a las rectas de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x-6}{-1} = \frac{y-6}{5} = \frac{z-2}{2}$.

a)

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \lambda; x = -\lambda; z = -2\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de la recta r son $A(0, 0, 0)$ y $\vec{v}_r = (1, -1, 2)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(6, 6, 2)$ y $\vec{v}_s = (-1, 5, 2)$.

Los vectores \vec{v}_r y \vec{v}_s son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector \vec{w} que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = [(6, 6, 2) - (0, 0, 2)] = (6, 6, 0)$.

Según que los vectores $\{\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$\text{Rang} \{\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 6 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -12 - 12 - 60 - 12 = -96 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \text{Rang} \{\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w}\} = 3 \Rightarrow \vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w}$ no son coplanarios \Rightarrow

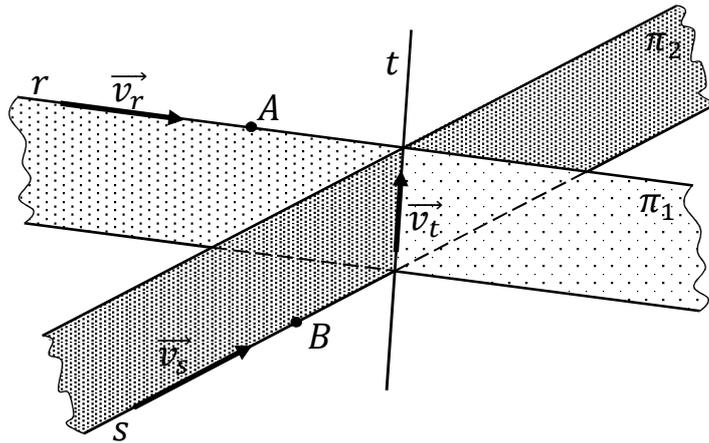
Las rectas r y s se cruzan.

El vector director de la recta t es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores directores de las rectas r y s .

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -2i - 2j + 5k - k - 10i - 2j =$$

$= -12i - 4j + 4k \Rightarrow \vec{v}_t = (3, 1, -1)$.

Para facilitar la comprensión del desarrollo del ejercicio se acompaña el gráfico adjunto.



Se determinan los planos π_1 y π_2 de las siguientes características:

$$\pi_1(A; \vec{v}_r, \vec{v}_t) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0; \quad x + 6y + z + 3z - 2x + y = 0;$$

$$-x + 7y + 4z = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv x - 7y - 4z = 0.$$

$$\pi_2(B; \vec{v}_s, \vec{v}_t) \equiv \begin{vmatrix} x - 6 & y - 6 & z - 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-5(x - 6) + 6(y - 6) - (z - 2) - 15(z - 2) - 2(x - 6) - (y - 6) = 0;$$

$$-7(x - 6) + 5(y - 6) - 16(z - 2) = 0; \quad -7x + 42 + 5y - 30 - 16z + 32 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_2 \equiv 7x - 5y + 16z + 44 = 0.$$

La recta pedida t es la intersección de los planos obtenidos, π_1 y π_2 :

$$t \equiv \begin{cases} x - 7y - 4z = 0 \\ 7x - 5y + 16z + 44 = 0 \end{cases}$$

4º) Halla un plano π que sea tangente a la esfera de radio 3 y centro $O(0, 0, 0)$, y que corte perpendicularmente a la recta $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+4}{-2}$. Encuentra el punto de tangencia del plano con la esfera, y calcula la ecuación continua de la recta que pasa por ese punto y corta perpendicularmente a r .

Un vector director de la recta r es $\vec{v}_r = (2, 1, -2)$.

El haz de planos, β , perpendiculares a la recta r tienen la siguiente expresión general: $\beta \equiv 2x + y - 2z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β , existen dos planos, π_1 y π_2 , que distan 3 unidades del origen y que son tangentes a la esfera de centro en el origen y radio 3.

La distancia del origen de coordenadas al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(O, \pi) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la fórmula al $\beta \equiv 2x + y - 2z + D = 0$, sabiendo que la distancia es de 3 unidades:

$$d(P, \pi) = \frac{|D|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} = 3; \quad \frac{|D|}{\sqrt{4+1+4}} = 3; \quad \frac{|D|}{\sqrt{9}} = 3 \Rightarrow D_1 = -9, D_2 = 9.$$

Los planos que cumplen la condición pedida son los siguientes:

$$\underline{\pi_1 \equiv 2x + y - 2z - 9 = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2 \equiv 2x + y - 2z + 9 = 0.}$$

La recta r' , paralela a r , que pasa por el origen de coordenadas, expresada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente: $r' \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$.

Los puntos de tangencia pedidos son las intersecciones de la recta r' y los planos π_1 y π_2 .

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv 2x + y - 2z - 9 = 0 \\ r' \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 4\lambda + \lambda + 4\lambda - 9 = 0; \quad 9\lambda - 9 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \cdot 1 = 2 \\ y = 1 \\ z = -2 \cdot 1 = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{P_1(2, 1, -2)}.$$

$$\pi_2 \equiv 2x + y - 2z + 9 = 0$$
$$r' \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \Rightarrow 4\lambda + \lambda + 4\lambda + 9 = 0; \quad 9\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P_2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \cdot (-1) = -2 \\ y = -1 \\ z = -2 \cdot (-1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \underline{P_1(-2, -1, 2)}.$$

www.yoquieroaprobar.es

5°) Calcula los límites: a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x^3+2x^2}-\sqrt{3x^3}}$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \text{sen } \frac{1}{x} \right)$.

a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x^3+2x^2}-\sqrt{3x^3}} &= \frac{\infty}{\infty-\infty} \Rightarrow \text{Ind.} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{3x^3+2x^2}+\sqrt{3x^3})}{(\sqrt{3x^3+2x^2}-\sqrt{3x^3})(\sqrt{3x^3+2x^2}+\sqrt{3x^3})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{3x^3+2x^2}+\sqrt{3x^3})}{(\sqrt{3x^3+2x^2})^2 - (\sqrt{3x^3})^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{3x^3+2x^2}+\sqrt{3x^3})}{3x^3+2x^2-3x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} \cdot (\sqrt{3x+2}+\sqrt{3x})}{2x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{3x+2}+\sqrt{3x})}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^2+2x}+\sqrt{3} \cdot x}{2x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Ind.} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^2+2x}+\sqrt{3} \cdot x}{\frac{x}{\frac{2x}{x}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{3x^2+2x}}{x} + \sqrt{3}}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{3x^2+2x}{x^2}} + \sqrt{3}}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3+\frac{2}{x}} + \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3+\frac{2}{\infty}} + \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3+0} + \sqrt{3}}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x^3+2x^2}-\sqrt{3x^3}} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \text{sen } \frac{1}{x} \right) &= \infty \cdot \text{sen } \frac{1}{\infty} = \infty \cdot 0 \Rightarrow \text{Ind.} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sen } \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{\text{sen } \frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}} = \\ &= \frac{\text{sen } 0}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Ind.} \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot \cos \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{x} = \cos \frac{1}{\infty} = \\ &= \cos 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \text{sen } \frac{1}{x} \right) = 1. \end{aligned}$$

6º) Se considera la función $f(x) = \log_2 \left[\operatorname{sen} \frac{\pi(x+1)}{4} + 2^{\frac{x-5}{2}} \right]$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[6, 7]$.

b) Demuestra que existe un valor $a \in (6, 7)$ tal que $f(a) = 0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

a)

La función $f(x)$ es logarítmica, por lo cual, es continua en su dominio, que es $(0, +\infty)$.

Demostrar que $f(x)$ es continua es equivalente a demostrar que es positiva la expresión $\operatorname{sen} \frac{\pi(x+1)}{4} + 2^{\frac{x-5}{2}}$.

El recorrido de la función seno es $[-1, 1]$, por lo cual: $-1 \leq \operatorname{sen} \frac{\pi(x+1)}{4} \leq 1$.

La expresión $2^\alpha > 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$; también se cumple que: $\begin{cases} \alpha \geq 0 \Rightarrow 2^\alpha \geq 1 \\ \alpha < 0 \Rightarrow 0 < 2^\alpha < 1 \end{cases}$.

La expresión $2^{\frac{x-5}{2}}$ en el intervalo $(6, 7)$ vale: $\begin{cases} x = 6 \Rightarrow 2^{\frac{6-5}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \\ x = 7 \Rightarrow 2^{\frac{7-5}{2}} = 2^1 = 2 \end{cases}$. De lo

anterior se deduce que: $\sqrt{2} \leq 2^{\frac{x-5}{2}} \leq 2$.

$$-1 + \sqrt{2} \leq \operatorname{sen} \frac{\pi(x+1)}{4} + 2^{\frac{x-5}{2}} \leq 1 + 2 \Rightarrow 0,414 \leq \operatorname{sen} \frac{\pi(x+1)}{4} + 2^{\frac{x-5}{2}} \leq 3.$$

Queda demostrado que la función $f(x)$ es continua en $[6, 7]$.

b)

Sabiendo que la función $f(x)$ es continua en $[6, 7]$ le es aplicable el teorema de Bolzano en el intervalo $(6, 7)$.

El teorema de Bolzano dice que “si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$ ”.

$$\begin{aligned} f(6) &= \log_2 \left(\operatorname{sen} \frac{7\pi}{4} + 2^{\frac{6-5}{2}} \right) = \log_2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 2^{\frac{1}{2}} \right) = \log_2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \right) = \\ &= \log_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \log_2 \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2} = \log_2 2^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} < 0. \end{aligned}$$

$$f(7) = \log_2 \left(\operatorname{sen} \frac{8\pi}{4} + 2^{\frac{7-5}{2}} \right) = \log_2 [\operatorname{sen} (2\pi) + 2^1] = \log_2 (0 + 2) = \\ = \log_2 2 = 1 > 0.$$

Queda demostrado que $\exists \alpha \in (6,7)$ tal que $f(\alpha) = 0$.

www.yoquieroaprobar.es

7º) Se considera la función $f(x) = \sqrt{x + \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1, 3]$.

b) Demuestra que existen dos valores $a \in (1, 3)$ y $\beta \in (2, 3)$ tales que $f'(a) = f'(\beta) = 0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

a)

La función $f(\alpha) = \operatorname{sen} \alpha \geq 0, \forall \alpha \in [0, 2\pi]$, por lo cual, la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[1, 3]$ por ser la raíz cuadrada de dos funciones continuas y cuya suma es positiva en el intervalo considerado.

b)

La función $f(x)$ es derivable en $(1, 3)$, siendo: $f'(x) = \frac{1 + \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi x}{2}}{2 \cdot \sqrt{x + \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}}}$.

El teorema de Rolle dice que “si una función $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor $c, a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$ ”.

Aplicando el teorema de Rolle a la función $f(x)$ en los intervalos $[1, 2]$ y $[2, 3]$:

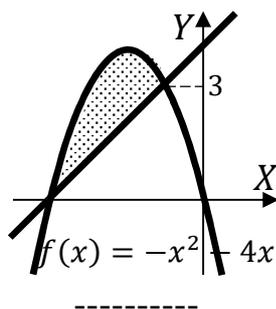
$$[1, 2] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(1) = \sqrt{1 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \\ f(2) = \sqrt{2 + \operatorname{sen} \pi} = \sqrt{2 + 0} = \sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) = f(2).$$

$$[2, 3] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(2) = \sqrt{2 + \operatorname{sen} \pi} = \sqrt{2 + 0} = \sqrt{2} \\ f(3) = \sqrt{3 + \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}} = \sqrt{3 - 1} = \sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow f(2) = f(3).$$

Queda demostrado que:

Existen $a \in (1, 3), \beta \in (2, 3)$ tales que $f'(a) = f'(\beta) = 0$.

8º) Teniendo en cuenta los datos que aparecen en el gráfico, calcula el área de la región sombreada.



La función $f(x) = -x^2 - 4x$ corta al eje de abscisas en los puntos siguientes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 - 4x = 0; -x(x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow O(0, 0) \\ x_2 = -4 \rightarrow A(-4, 0) \end{cases}$$

Los puntos de corte de $f(x)$ con la recta horizontal $y = 3$ tienen por abscisas las raíces de la ecuación que se forma al igualar sus expresiones.

$$\begin{aligned} -x^2 - 4x = 3; x^2 + 4x + 3 = 0; x &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \\ &= -2 \pm 1 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = -1. \end{aligned}$$

De las dos raíces halladas, para el cálculo del área pedida, la que nos interesa es el valor $x = -1$. El punto de corte es $B(-1, 3)$.

El vector director de la recta es $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-1, 3) - (-4, 0) = (3, 3)$, cuya pendiente es $m = 1$, por lo cual, la ecuación de la recta es la siguiente, considerando el punto $A(-4, 0)$: $y - 0 = 1 \cdot (x + 4) \Rightarrow y = x + 4$.

En el intervalo de la superficie a calcular, $(-4, -1)$, las ordenadas de la función son mayores que las correspondientes ordenadas de la recta, por lo que la superficie a calcular es la siguiente:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-4}^{-1} [f(x) - y(x)] \cdot dx = \int_{-4}^{-1} [(-x^2 - 4x) - (x + 4)] \cdot dx = \\ &= \int_{-4}^{-1} (-x^2 - 5x - 4) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 4x \right]_{-4}^{-1} = \\ &= \left[-\frac{(-1)^3}{3} - \frac{5 \cdot (-1)^2}{2} - 4 \cdot (-1) \right] - \left[-\frac{(-4)^3}{3} - \frac{5 \cdot (-4)^2}{2} - 4 \cdot (-4) \right] = \\ &= \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 - \frac{64}{3} + 40 - 16 = 28 - \frac{63}{3} - \frac{5}{2} = 28 - 21 - \frac{5}{2} = 7 - \frac{5}{2} = \underline{4,5 u^2}. \end{aligned}$$
