

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)**UNIVERSIDAD DE NAVARRA****JUNIO – 2021**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan.

1º) Estudia el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible.

$$\begin{cases} (a-1)x - y = 3 \\ (a-1)x + (a+1)y - (2-a)z = -2a \\ (-2a+2)x - ay + (a^2 - a - 2)z = 3a - 1 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} a-1 & -1 & 0 \\ a-1 & a+1 & a-2 \\ -2a+2 & -a & a^2 - a - 2 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$M' = \begin{pmatrix} a-1 & -1 & 0 & 3 \\ a-1 & a+1 & a-2 & -2a \\ -2a+2 & -a & a^2 - a - 2 & 3a-1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente, teniendo en cuenta que $a^2 - a - 2 = (a+1)(a-2)$:

$$\begin{aligned} |M| &= \begin{vmatrix} a-1 & -1 & 0 \\ a-1 & a+1 & a-2 \\ -2(a-1) & -a & (a+1)(a-2) \end{vmatrix} = \\ &= (a-1)(a-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & a+1 & 1 \\ -2 & -a & a+1 \end{vmatrix} = \\ &= (a-1)(a-2) \cdot [(a+1)^2 + 2 + a + (a+1)] = \end{aligned}$$

$$= (a-1)(a-2) \cdot (a^2 + 2a + 1 + 3 + 2a) = (a-1)(a-2) \cdot (a^2 + 4a + 4) = (a-1)(a-2) \cdot (a+2)^2 = 0 \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = a_4 = -2.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\text{Para } \begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq 2 \\ a \neq -2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.D.}$$

$$\text{Para } a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M' \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 12 - 3 + 4 = -11 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } M' = 3.$$

$$\text{Para } a = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \\ -2 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \\ -2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 6 - 8 + 18 - 8 + 5 = 16 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } M' = 3.$$

$$\text{Para } \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } M = 2; \text{Rang } M' = 3 \Rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

$$\text{Para } a = -2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 3 \\ -3 & -1 & -4 & 4 \\ 6 & 2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 + 2F_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 = -F_3\} \Rightarrow \text{Rang } M' = 2.$$

$$\text{Para } a = -2 \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.I.}$$

Se resuelve, en primer lugar, para $a \neq 1$ y $a \neq 2$:

$$\begin{pmatrix} a-1 & -1 & 0 & 3 \\ a-1 & a+1 & a-2 & -2a \\ -2a+2 & -a & a^2-a-2 & 3a-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 + 2F_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a-1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & a+2 & a-2 & -2a-3 \\ 0 & -a-2 & a^2-a-2 & 3a+5 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 + F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a-1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & a+2 & a-2 & -2a-3 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a+2 \end{pmatrix} \Rightarrow F_3 \rightarrow \frac{F_3}{a+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a-1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & a+2 & a-2 & -2a-3 \\ 0 & 0 & a-2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (a-2)z = 1; \quad z = \frac{1}{a-2}.$$

$$(a+2)y + (a-2)z = -2a-3; \quad (a+2)y + (a-2) \cdot \frac{1}{a-2} = -2a-3;$$

$$(a+2)y + 1 = -2a-3; \quad (a+2)y = -2a-4 = -2(a+2) \Rightarrow y = -2.$$

$$(a-1)x - y = 3; \quad (a-1)x + 2 = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{a-1}.$$

$$\underline{\text{Solución: } x = \frac{1}{a-1}, y = -2, z = \frac{1}{a-2}, \forall a \in \mathbb{R} - \{-2, 1, 2\}.$$

Resolvemos ahora para $a = -2$. El sistema resulta $\left. \begin{array}{l} -3x - y = 3 \\ -3x - y - 4z = 4 \\ 6x + 2y + 4z = -7 \end{array} \right\}$, que es compatible indeterminado. Despreciando una ecuación, por ejemplo, la tercera, y haciendo $x = \lambda$:

$$y = -3 - 3\lambda. \text{ Restando a la segunda ecuación la primera: } -4z = 1 \Rightarrow z = -\frac{1}{4}.$$

$$\underline{\text{Solución: } x = \lambda, y = -3 - 3\lambda, z = -\frac{1}{4}, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

2º) Calcula los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $|A^3| = 8$, siendo $A = \begin{pmatrix} t-1 & t+1 & 3 \\ t^2-t & t^2+2t & t \\ 1-t & -1-t & -2 \end{pmatrix}$.

$$|A^3| = 8 \Rightarrow |A \cdot A \cdot A| = |A| \cdot |A| \cdot |A| = (|A|)^3 = 8 = 2^3 \Rightarrow |A| = 2.$$

$$\begin{vmatrix} t-1 & t+1 & 3 \\ t^2-t & t^2+2t & t \\ 1-t & -1-t & -2 \end{vmatrix} = 2; \quad \begin{vmatrix} t-1 & t+1 & 3 \\ t(t-1) & t(t+2) & t \\ -(t-1) & -1-t & -2 \end{vmatrix} = 2;$$

$$(t-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & t+1 & 3 \\ t & t^2+2t & t \\ -1 & -1-t & -2 \end{vmatrix} = 2. \quad (*)$$

El valor del determinante $\begin{vmatrix} 1 & t+1 & 3 \\ t & t^2+2t & t \\ -1 & -1-t & -2 \end{vmatrix}$ es el siguiente:

$$\begin{aligned} & -2(t^2+2t) - 3t(1+t) - t(t+1) + 3(t^2+2t) + t(1+t) + 2t(1+t) = \\ & = (t^2+2t) - t(1+t) = t^2+2t-t-t^2 = t. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (*) teniendo en cuenta el valor del determinante:

$$(t-1) \cdot t = 2; \quad t^2 - t - 2 = 0; \quad t = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \underline{t_1 = -2, t_2 = 2}.$$

3º) Encuentra la ecuación general del plano π que es paralelo a las rectas de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} x + 2y + z + 3 = 0 \\ x + 6y - z - 7 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+2}{1}$ y equidista de ambas.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y + z + 3 = 0 \\ x + 6y - z - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \lambda \Rightarrow \begin{cases} x + z = -3 - 2\lambda \\ x - z = 7 - 6\lambda \end{cases} \Rightarrow 2x = 4 - 8\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2 - 4\lambda; \quad \begin{cases} x + z = -3 - 2\lambda \\ -x + z = -7 + 6\lambda \end{cases} \Rightarrow 2z = -10 + 4\lambda: z = -5 + 2\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 - 4\lambda \\ y = \lambda \\ z = -5 + 2\lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de r son $P(2, 0, -5)$ y $\vec{v}_r = (-4, 1, 2)$.

Un punto y un vector director de s son $Q(3, -2, -2)$ y $\vec{v}_s = (3, 3, 1)$.

El vector normal del plano π es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas, por lo cual, es linealmente dependiente del producto vectorial de sus vectores directores:

$$\vec{n} = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = i + 6j - 12k - 3k - 6i + 4j =$$

$$= -5i + 10j - 15k \Rightarrow \vec{n} = (1, -2, 3).$$

El plano π es de la forma $\pi \equiv x - 2y + 3z + D = 0$.

Por ser paralelo el plano a las rectas, la distancia del plano a cada una de las rectas es equivalente a la distancia del plano a cualquier punto de las rectas.

Teniendo en cuenta lo anterior y por ser equidistante de las rectas se cumple que:

$$\begin{cases} d(\pi, r) = d(\pi, P) \\ d(\pi, s) = d(\pi, Q) \end{cases} \Rightarrow d(\pi, r) = d(\pi, s) \Rightarrow d(\pi, P) = d(\pi, Q).$$

La distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la fórmula al plano $\pi \equiv x - 2y + 3z + D = 0$ y a los puntos

$P(2, 0, -5)$ y $Q(3, -2, -2)$:

$$d(\pi, P) = \frac{|1 \cdot 2 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-5) + D|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}} = \frac{|2 - 0 - 15 + D|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{|-13 + D|}{\sqrt{14}}.$$

$$d(\pi, Q) = \frac{|1 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-2) + D|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}} = \frac{|3 + 4 - 6 + D|}{\sqrt{14}} = \frac{|1 + D|}{\sqrt{14}}.$$

$$d(\pi, P) = d(\pi, Q) \Rightarrow \frac{|-13 + D|}{\sqrt{14}} = \frac{|1 + D|}{\sqrt{14}}; \quad |-13 + D| = |1 + D| \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases} -13 + D = 1 + D \\ -13 + D = -1 - D \end{cases}$. La solución de la primera ecuación carece de sentido lógico, por lo cual:

$$-13 + D = -1 - D; \quad 2D = 12 \Rightarrow D = 6.$$

$$\underline{\pi \equiv x - 2y + 3z + 6 = 0.}$$

4º) Un lado de un paralelogramo está sobre la recta $r \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$. Otro lado lo determinan los puntos $A(-1, -2, 3)$ y $B(2, -2, -1)$. Calcula los otros dos vértices del paralelogramo sabiendo que su perímetro mide 16 unidades.

Un vector director de r es $\vec{v}_r = (2, 1, -2)$.

Los puntos $A(-1, -2, 3)$ y $B(2, -2, -1)$ determinan el vector:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(2, -2, -1) - (-1, -2, 3)] = (3, 0, -4).$$

La longitud del lado $\overline{AB}$ es la siguiente:

$$\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 0 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ unidades.}$$

Como el perímetro del paralelogramo es de 16 unidades, la longitud del lado $\overline{BC}$ es la siguiente:

$$16 = 2 \cdot (5 + \overline{BC}); \quad 8 = 5 + \overline{BC} \Rightarrow \overline{BC} = 3 \text{ unidades.}$$

Se comprueba a continuación si alguno de los puntos, A o B, pertenecen a la recta r :

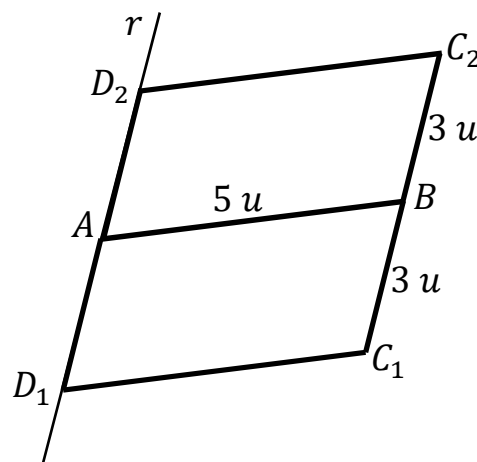
$$r \equiv \left. \begin{aligned} \frac{x-1}{-2} &= \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2} \\ A(-1, -2, 3) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{-1-1}{-2} = \frac{-2+1}{-1} = \frac{3-1}{2} \Rightarrow A \in R.$$

Evidentemente, el punto $B \notin r$, por ser linealmente independientes los vectores $\vec{v}_r = (2, 1, -2)$ y $\overrightarrow{AB} = (3, 0, -4)$.

La situación, aproximada, es la que indica el gráfico adjunto.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente: $r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$

Un punto genérico de la recta r es el siguiente: $D(1 - 2\lambda, -1 - \lambda, 1 + 2\lambda)$.



$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = [(1 - 2\lambda, -1 - \lambda, 1 + 2\lambda) - (-1, -2, 3)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = (2 - 2\lambda, 1 - \lambda, -2 + 2\lambda).$$

$$\overline{AD} = |\overrightarrow{AD}| = 3u \Rightarrow \sqrt{(2-2\lambda)^2 + (1-\lambda)^2 + (-2+2\lambda)^2} \Rightarrow$$

$$3^2 = 4 - 8\lambda + 4\lambda^2 + 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 4 - 8\lambda + 4\lambda^2; \quad 9 = 9\lambda^2 - 18\lambda + 9;$$

$$9\lambda^2 - 18\lambda = 0; \quad \lambda^2 - 2\lambda = 0; \quad \lambda(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_1 = 2.$$

$$\lambda_1 = 0 \Rightarrow D_1(1, -1, 1). \quad \overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{BC_1}.$$

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AD_1} &= \overrightarrow{OD_1} - \overrightarrow{OA} = [(1, -1, 1) - (-1, -2, 3)] = (2, 1, -2) \\ \overrightarrow{BC_1} &= \overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OB} = [(x, y, z) - (2, -2, -1)] = (x-2, y+2, z+1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2, 1, -2) = (x-2, y+2, z+1) \Rightarrow \begin{cases} x-2 = 2 \rightarrow x = 4 \\ y+2 = 1 \rightarrow y = -1 \\ z+1 = -2 \rightarrow z = -3 \end{cases} \Rightarrow C_1(4, -1, -3).$$

Primera solución: $C_1(4, -1, -3)$ y $D_1(1, -1, 1)$.

$$\lambda_2 = 2 \Rightarrow D_2(-3, -3, 5). \quad \overrightarrow{AD_2} = \overrightarrow{BC_2}.$$

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AD_2} &= \overrightarrow{OD_2} - \overrightarrow{OA} = [(-3, -3, 5) - (-1, -2, 3)] = (-2, -1, 2) \\ \overrightarrow{BC_2} &= \overrightarrow{OC_2} - \overrightarrow{OB} = [(x, y, z) - (2, -2, -1)] = (x-2, y+2, z+1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-2, -1, 2) = (x-2, y+2, z+1) \Rightarrow \begin{cases} x-2 = -2 \rightarrow x = 0 \\ y+2 = -1 \rightarrow y = -3 \\ z+1 = 2 \rightarrow z = 1 \end{cases} \Rightarrow C_2(0, -3, 1).$$

Segunda solución: $C_2(0, -3, 1)$ y $D_2(-3, -3, 5)$.

5º) Sea la función $f(x) = (x^2 - 3x + 10)^{\log\left[2^{x-1} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi(x+2)}{6}\right]}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1, 3]$.

b) Demuestra que existe $\alpha \in (1, 3)$ tal que $f(\alpha) = \frac{3}{2}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

a)

La función $f(x)$ es la expresión de la potencia de dos funciones de la forma: $f(x) = g(x)^{h(x)}$. Para que $f(x)$ sea continua en $[1, 3]$ tienen que serlo $f(x)$ y $g(x)$.

La función $g(x) = x^2 - 3x + 10$ es continua en $\mathbb{R}$, por lo cual lo será en cualquier intervalo finito que se considere.

La función $h(x)$ es logarítmica y, por ello, continua en $[0, \infty)$.

Siendo $h(x) = m(x) \cdot n(x)$, con $m(x) = 2^{x-1}$ y $n(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi(x+2)}{6}$, para que sea $h(x)$ estrictamente positiva es necesario que $m(x)$ y $n(x)$ sean estrictamente positivas o estrictamente negativas.

$$m(x) = 2^{x-1} > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Estudiamos ahora el signo de la función $n(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi(x+2)}{6}$ en el intervalo $[1, 3]$, para lo cual se estudia su signo en los puntos $x = 1, 2$ y 3 :

$$n(1) = \operatorname{sen} \frac{\pi(1+2)}{6} = \operatorname{sen} \frac{3\pi}{6} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1 > 0.$$

$$n(2) = \operatorname{sen} \frac{\pi(2+2)}{6} = \operatorname{sen} \frac{4\pi}{6} = \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0.$$

$$n(3) = \operatorname{sen} \frac{\pi(3+2)}{6} = \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} = \operatorname{sen} 150^\circ = \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} > 0.$$

Como quiera que en el intervalo $[1, 3]$ es $m(x) > 0$ y $n(x) > 0$:

Queda demostrado que $f(x)$ es continua en $[1, 3]$.

b)

Para demostrar que existe $\alpha \in (1, 3)$ tal que $f(\alpha) = \frac{3}{2}$ se tiene en cuenta que la función $f(x)$ es continua en $[1, 3]$, como se demostró en el apartado anterior.

Teniendo en cuenta el teorema de los valores intermedios o desigualdad de Darboux, que dice que, “si una función es continua en un intervalo $[a, b]$ toma todos los

valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$ al menos una vez”.

$$f(1) = (1^2 - 3 \cdot 1 + 10)^{\log\left[2^{1-1} \cdot \text{sen} \frac{\pi(1+2)}{6}\right]} = 8^{\log\left(2^0 \cdot \text{sen} \frac{\pi}{2}\right)} = 8^{\log(1 \cdot 1)} = 8^{\log 1} = 8^0 = 1.$$

$$f(3) = (3^2 - 3 \cdot 3 + 10)^{\log\left[2^{3-1} \cdot \text{sen} \frac{\pi(3+2)}{6}\right]} = 10^{\log\left(2^2 \cdot \text{sen} \frac{5\pi}{6}\right)} = 10^{\log(4 \cdot \text{sen} 150^\circ)} = 10^{\log(4 \cdot \text{sen} 30^\circ)} = 10^{\log\left(4 \cdot \frac{1}{2}\right)} = 10^{\log 2} = 2.$$

$$1 < \frac{3}{2} < 2 \Rightarrow \underline{\text{Existe al menos un } \alpha \in (1, 3) \text{ tal que } f(\alpha) = \frac{3}{2}, c. q. d.}$$

También se puede resolver este apartado de la forma siguiente:

Demostrar que existe $\alpha \in (1, 3)$ tal que $f(\alpha) = \frac{3}{2}$ es equivalente a demostrar que la función $g(x) = f(x) - \frac{3}{2}$ tiene una raíz real en el intervalo $[0, 1]$.

$$g(x) = (x^2 - 3x + 10)^{\log\left[2^{x-1} \cdot \text{sen} \frac{\pi(x+2)}{6}\right]} - \frac{3}{2}.$$

El teorema de Bolzano dice que “si $g(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$ ”.

A la función $g(x)$ le es aplicable el teorema de Bolzano en el intervalo $[1, 3]$:

$$g(1) = f(1) - \frac{3}{2} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} < 0. \quad g(3) = f(3) - \frac{3}{2} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} > 0.$$

Lo anterior demuestra que $g(x)$ tiene al menos una raíz real en $[1, 3]$ y también los pedido, o sea, que:

$$\underline{\text{Existe al menos un } \alpha \in (1, 3) \text{ tal que } f(\alpha) = \frac{3}{2}, c. q. d.}$$

6º) Calcula las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^3-4x-1}{x^2-4}$ y estudia la posición de la curva respecto de ellas.

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3-4x-1}{x^2-4} = \pm\infty \Rightarrow \underline{\text{No tiene asíntotas horizontales.}}$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \underline{\text{Las rectas } x = -2 \text{ y } x = 2 \text{ son asíntotas verticales.}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3-4x-1}{(x+2)(x-2)} = \frac{-8+8-1}{0^- \cdot (-4)} = \frac{-1}{0^+} \Rightarrow \underline{\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^3-4x-1}{(x+2)(x-2)} = \frac{-8+8-1}{0^+ \cdot (-4)} = \frac{-1}{0^-} \Rightarrow \underline{\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3-4x-1}{(x+2)(x-2)} = \frac{8-8-1}{4 \cdot 0^-} = \frac{-1}{0^-} \Rightarrow \underline{\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3-4x-1}{(x+2)(x-2)} = \frac{8-8-1}{4 \cdot 0^+} = \frac{-1}{0^+} \Rightarrow \underline{\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty.}$$

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ y } n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx], \text{ con } m \text{ finito y } m \neq 0.$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3-4x-1}{x^2-4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-4x-1}{x^3-4x} = 1.$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3-4x-1}{x^2-4} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-4x-1-x^3+4}{x^2-4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x+3}{x^2-4} = 0. \end{aligned}$$

Asíntota oblicua: $y = x$.

7º) Sea la función $f(x) = L \frac{5x-2-x \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{2}}{x^2-4x+6}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1, 3]$.

b) Demuestra que exista $a \in (1, 3)$ tal que $f'(a) = \frac{3}{2} \cdot L2$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

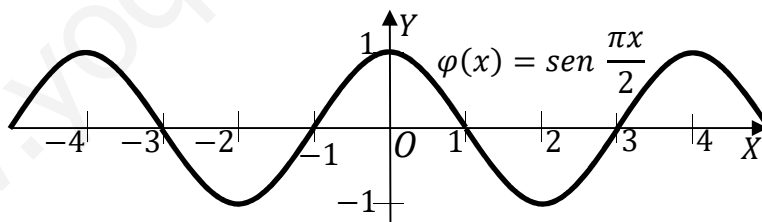
a)

Por ser $f(x)$ una función logarítmica es necesario que en el intervalo $[1, 3]$ sea positiva la expresión $\frac{5x-2-x \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{2}}{x^2-4x+6}$, para lo cual tienen que ser positivas en el mismo intervalo las funciones $g(x) = 5x - 2 - x \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{2}$ y $h(x) = x^2 - 4x + 6$.

La función $g(x) = 5x - 2 - x \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{2}$ es continua en $\mathbb{R}$ por ser suma, resta o producto de funciones continuas en $\mathbb{R}$ y la función $h(x) = x^2 - 4x + 6$ es continua en $\mathbb{R}$ por ser polinómica, por lo cual, ambas funciones son continuas en cualquier intervalo finito que se considere, en particular, en el intervalo $[1, 3]$.

Para estudiar el signo de la función $g(x) = 5x - 2 - x \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{2}$ en el intervalo $[1, 3]$ se estudia, en particular, el valor de $\text{sen} \frac{\pi x}{2}$.

La función $\varphi(x) = \text{sen} \frac{\pi x}{2} < 0$ en $(1, 3)$, como se observa en la representación gráfica, aproximada de $\varphi(x)$, que es la figura adjunta.



Siendo $\text{sen} \frac{\pi x}{2} < 0$ en $(1, 3)$, la función $g(x) = 5x - 2 - x \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{2}$ es estrictamente positiva.

Se estudia ahora la función $f(x)$.

$x^2 - 4x + 6 = 0$; $x = \frac{4 \pm \sqrt{16-24}}{2} \Rightarrow x \notin \mathbb{R} \Rightarrow x^2 - 4x + 6 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, lo que significa que $h(x) = x^2 - 4x + 6 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lo anterior demuestra que $f(x)$ es continua en $[1, 3]$.

b)

El teorema del valor medio o de Lagrange dice que “si una función es continua

en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Aplicando el teorema de Lagrange a la función $f(x) = L \frac{5x-2-x \cdot \text{sen} \frac{\pi x}{2}}{x^2-4x+6}$ en el intervalo $[1, 3]$:

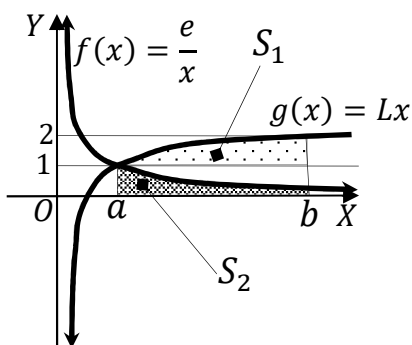
$$f(3) = L \frac{5 \cdot 3 - 2 - 3 \cdot \text{sen} \frac{3\pi}{2}}{3^2 - 4 \cdot 3 + 6} = L \frac{15 - 2 - 3 \cdot (-1)}{9 - 12 + 6} = L \frac{16}{3} = L16 - L3.$$

$$f(1) = L \frac{5 \cdot 1 - 2 - 1 \cdot \text{sen} \frac{\pi}{2}}{1^2 - 4 \cdot 1 + 6} = L \frac{5 - 2 - 1 \cdot 1}{9 - 12 + 6} = L \frac{2}{3} = L2 - L3.$$

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(c) = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{L16-L3-(L2-L3)}{2} = \frac{L16-L3-L2+L3}{2} = \\ &= \frac{L16-L2}{2} = \frac{L2^4-L2}{2} = \frac{4 \cdot L2-L2}{2} = \frac{3L2}{2}. \end{aligned}$$

Queda demostrado que $\exists a \in (1, 3)$ tal que $f'(a) = \frac{3}{2} \cdot L2$.

8º) Calcula los valores de las abscisas a y b que aparecen en el gráfico adjunto, y, después, comprueba que las áreas de las dos regiones sombreadas son iguales.



El valor de a se obtiene haciendo: $g(a) = La = 1 \Rightarrow \underline{a = e}$.

El valor de b se obtiene haciendo: $g(b) = Lb = 2 \Rightarrow \underline{b = e^2}$.

$$S_1 = \int_a^b [g(x) - 1] dx = \int_e^{e^2} (Lx - 1) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = Lx - 1 \rightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ dx = dv \rightarrow v = x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[(Lx - 1) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \right]_e^{e^2} = [x(Lx - 1) - \int dx]_e^{e^2} = [x(Lx - 1) - x]_e^{e^2} =$$

$$= [xLx - x - x]_e^{e^2} = [xLx - 2x]_e^{e^2} = (e^2 \cdot Le^2 - 2e^2) - (eLe - 2e) =$$

$$= e^2 \cdot 2Le - 2e^2 - e + 2e = 2e^2 - 2e^2 + e \Rightarrow \underline{S_1 = e u^2}.$$

$$S_2 = \int_a^b f(x) \cdot dx = \int_e^{e^2} \frac{e}{x} \cdot dx = [eLx]_e^{e^2} = e \cdot Le^2 - e \cdot Le = e \cdot 2Le - e =$$

$$= 2e - e \Rightarrow \underline{S_2 = e u^2}.$$

Queda comprobado que $S_1 = S_2$.
