PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

EXTRAORDINARA – 2021

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OVSERVACIONES IMPORTANTES: Debes responder a un máximo de 4 preguntas. Si se responde a más de 4 preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras que haya respondido el estudiante. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcular el valor de a y b para que se cumpla: $A \cdot B = B \cdot A$.

b) Para $a = 1$ y $b = 0$, resuelve la ecuación: $X \cdot B - A = I$, siendo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

----

a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3a & 3b \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b & 2a \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3a & 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b & 2a \\ 3 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} 3b = 12 \\ 2a = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{a = 1, b = 4}.$$

b)

La matriz B para $a = 1$ y $b = 0$ es $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

$$X \cdot B - A = I; \;\; X \cdot B = I + A; \;\; X \cdot B \cdot B^{-1} = (I + A) \cdot B^{-1};$$

$$X \cdot I = (I + A) \cdot B^{-1} \Rightarrow \underline{X = (I + A) \cdot B^{-1}}.$$

$$I + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 1; \;\; B^t = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \;\; Adj. de\ B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B^{-1} = \frac{Adj.de\ B^t}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = (I + A) \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} -11 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) Sea el sistema de inecuaciones: $\left.\begin{array}{r} 3x+y\leq 12 \\ y\geq \frac{x}{2}-2 \\ x-2y\geq -3 \\ 2x+3y\geq 1 \end{array}\right\}.$

a) Representar gráficamente la región del plano S definido por el sistema de inecuaciones anterior y determine los vértices de dicha región.

b) Calcular los puntos de la región S donde la función $f(x,y)=3x-2y$ alcanza sus valores máximos y mínimos.

----

a)

$$\left.\begin{array}{r} 3x+y\leq 12 \\ y\geq \frac{x}{2}-2 \\ x-2y\geq -3 \\ 2x+3y\geq 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3x+y\leq 12 \\ x-2y\leq 4 \\ x-2y\geq -3 \\ 2x+3y\geq 1 \end{array}\right\}.$$

① $\Rightarrow 3x+y\leq 12 \Rightarrow y\leq 12-3x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	3	4
y	3	0

② $\Rightarrow x-2y\leq 4 \Rightarrow y\geq \frac{x-4}{2} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	4	8
y	0	2

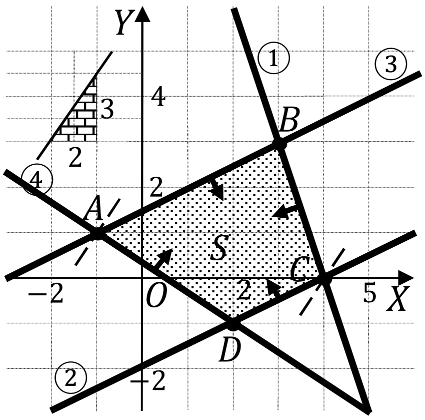
③ $\Rightarrow x-2y\geq -3 \Rightarrow y\leq \frac{x+3}{2} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	1	5
y	2	4

④ $\Rightarrow 2x+3y\geq 1 \Rightarrow y\geq \frac{1-2x}{3} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow No.$

x	-1	-4
y	1	3

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.



Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-2y=-3 \\ 2x+3y=1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -2x+4y=6 \\ 2x+3y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$7y=7;\;\; y=1;\;\; 2x+3=1;\;\; x=-1 \Rightarrow \underline{A(-1,1)}.$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+y=12 \\ x-2y=-3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 6x+2y=24 \\ x-3y=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow 7x=21;\;\; x=3;\;\; 3-2y=-3;$

$3+3=2y;\;\; 2y=6;\;\; y=3 \Rightarrow \underline{B(3,3)}.$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+y=12 \\ x-2y=4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3x+y=12 \\ -3x+6y=-12 \end{array}\right\} \Rightarrow 7y=0;\;\; y=0;\;\; x=4 \Rightarrow \underline{C(4,0)}.$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-2y=4 \\ 2x+3y=1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -2x+4y=-8 \\ 2x+3y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 7y=-7;\;\; y=-1;\;\; x+2=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=2 \Rightarrow \underline{D(2,-1)}.$$

$b)$

La función de objetivos es $f(x,y)=3x-2y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(-1,1)=3\cdot(-1)-2\cdot 1=-3-2=-5.$

$B \Rightarrow f(3,3)=3\cdot 3-2\cdot 3=9-6=3.$

$C \Rightarrow f(4,0)=3\cdot 4-2\cdot 0=12-0=12.$

$D \Rightarrow f(2,-1)=3\cdot 2-2\cdot(-1)=6+2=8.$

El máximo se produce en el punto $C(4,0)$ y el mínimo en el punto $A(-1,1)$.

También se obtienen estos puntos por la pendiente de la función de objetivos, como se puede apreciar en la figura adjunta.

$$\underline{Máximo\!:\; C(4,0).\;\; Mínimo\!:\; A(-1,1)}.$$

$$\underline{El\ valor\ máximo\ es\ 12\ y\ el\ mínimo, -5}.$$

****

3º) En un concierto celebrado en Murcia se ha estimado el número de miles de jóvenes que han asistido a él en función de la hora de llegada, t, mediante la siguiente función:

$f(t) = \frac{10}{(t-6)^2+1}$. Hallar la hora en el que había el mayor número de personas en el concierto. ¿Cuál fue esa cantidad máxima? Razona la respuesta.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto.

$$f(t) = \frac{10}{t^2-12t+36+1} = \frac{10}{t^2-12t+37}.$$

$$f'(t) = \frac{-10\cdot(2t-12)}{(t^2-12t+37)^2} = \frac{-20\cdot(t-6)}{(t^2-12t+37)^2}.$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow \frac{-20\cdot(t-6)}{(t^2-12t+37)^2} = 0;\ \ -20\cdot(t-6) = 0;\ \ t-6 = 0 \Rightarrow t = 6.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(t) = \frac{-20\cdot(t^2-12t+37)^2+20\cdot(t-6)\cdot[2\cdot(t^2-12t+37)(2t-12)\cdot]}{(t^2-12t+37)^4} =$$

$$= \frac{-20\cdot(t^2-12t+37)+80\cdot(t-6)^2}{(t^2-12t+37)^3} = \frac{-20t^2+240t-740+80\cdot(t^2-12t+36)}{(t^2-12t+37)^3} =$$

$$= \frac{-20t^2+240t-740+80t^2-960t+2.880}{(t^2-12t+37)^3} = \frac{60t^2-720t+2.140}{(t^2-12t+37)^3} = 20\cdot\frac{3t^2-36t+107}{(t^2-12t+37)^3}.$$

$$f''(6) = 20\cdot\frac{3\cdot6^2-36\cdot6+107}{(6^2-12\cdot6+37)^3} = 20\cdot\frac{108-216+107}{(36-72+37)^3} = 20\cdot\frac{215-216}{1^3} = -20 > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Máximo relativo para $t = 6$. $\qquad f(6) = \frac{10}{(6-6)^2+1} = 10.$

$\underline{\textit{El máximo se produce a las } 6 \textit{ horas y es de } 10.000 \textit{ jóvenes.}}$

****

4º) Dada la función $f(x) = ax^2 + 3x + \frac{b}{x}$:

a) Calcule los valores de $a \, y \, b$ de forma que la función tenga un extremo relativo en el punto $P(1, 2)$ y determine si ese extremo es un máximo o un mínimo.

b) Si en la función anterior $a = 2 \, y \, b = 0$, determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

----

a)

Por contener al punto $P(1, 2) \Rightarrow f(1) = 2$.

$f(1) = 2 \Rightarrow a \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + \frac{b}{1} = 2; \;\; a + b = -1.$ (1)

Por tener un extremo relativo en el punto $P(1, 2) \Rightarrow f'(1) = 0$.

$f'(x) = 2ax + 3 - \frac{b}{x^2}$.

$f'(1) = 0 \Rightarrow 2a \cdot 1 + 3 - \frac{b}{1^2} = 0; \;\; 2a - b = -3.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$\left.\begin{array}{r} a + b = -1 \\ 2a - b = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow 3a = -4; \;\; \underline{a = -\frac{4}{3}}. \quad -\frac{4}{3} + b = -1; \;\; b = -1 + \frac{4}{3} \Rightarrow \underline{b = \frac{1}{3}}.$

La función resulta $f(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 3x + \frac{1}{3x}$.

La derivada resulta: $f'(x) = -\frac{8}{3}x + 3 - \frac{1}{3x^2}$.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f''(x) = -\frac{8}{3} + \frac{6x}{9x^4} = -\frac{8}{3} + \frac{2}{3x^3}$.

$f''(1) = -\frac{8}{3} + \frac{2}{3 \cdot 1^3} = -\frac{8}{3} + \frac{2}{3} = -2 < 0 \Rightarrow Máximo \; relativo \; para \; x = 1.$

$\underline{La \; función \; f(x) \; tiene \; un \; máximo \; relativo \; en \; el \; punto \; P(1, 2).}$

b)

Para $a = 2 \, y \, b = 0$ es $f(x) = 2x^2 + 3x$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$f'(x) = 4x + 3.$ $\qquad$ $m = f'(1) = 4 \cdot 1 + 3 = 7.$

$f(1) = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 2 + 3 = 5.$

El punto de tangencia es $Q(1, 5)$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $Q(1, 5)$ con $m = 7$ es:

$y - 5 = 7 \cdot (x - 1) = 7x - 7.$

$$\underline{La\ recta\ tangente\ es\ t \equiv 7x - y - 2 = 0}.$$

****

5º) Representar gráficamente el recinto plano limitado por las parábolas $f(x) = -x^2 + 4$ y $g(x) = x^2$. Calcular su área.

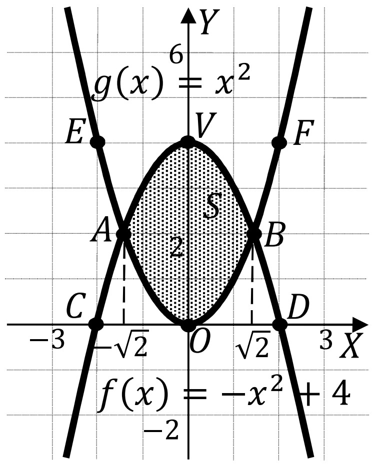
Las abscisas de los puntos de intersección de las curvas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$-x^2 + 4 = x^2;\ 2x^2 = 4;\ x^2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{2} \to A(-\sqrt{2}, 2) \\ x_2 = \sqrt{2} \to B(\sqrt{2}, 2) \end{cases}.$$

La parábola $f(x) = -x^2 + 4$, que es cóncava $(\cap)$, por ser negativo el coeficiente de x^2, tiene su vértice en el punto $V(0, 4)$. Otros puntos de la parábola son $C(-2, 0)\ y\ D(2, 0)$.

La parábola $g(x) = x^2$, que es convexa $(\cup)$ por ser positivo el coeficiente de x^2, tiene su vértice en el origen. Otros puntos de la parábola son $E(-2, 4)\ y\ F(2, 4)$.

La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.



Por ser las ordenadas de la parábola $g(x) = x^2$ iguales o menores que las correspondientes ordenadas de la parábola $f(x) = -x^2 + 4$ en el intervalo del área a calcular y, además, considerando que las dos funciones son pares y, en consecuencia, simétricas con respecto al eje de ordenadas, la superficie S a calcular es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{2}} [(-x^2 + 4) - x^2] \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \int_0^{\sqrt{2}} (-2x^2 + 4) \cdot dx = 4 \cdot \int_0^{\sqrt{2}} (-x^2 + 2) \cdot dx = 4 \cdot \left[-\frac{x^3}{3} + 2x\right]_0^{\sqrt{2}} =$$

$$= 4 \cdot \left\{\left[-\frac{(\sqrt{2})^3}{3} + 2\sqrt{2}\right]\right\} = 4 \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{2}\right) = 8\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{3} + 1\right) = 8\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{16\sqrt{2}}{3}\ u^2 \cong 7{,}54\ u^2.}$$

****

6º) Dada la función $f(x) = x \cdot e^{x^2}$:

$a)$ Hallar la pendiente de esta función en el punto $x = 0$.

$b)$ Calcular $I = \int x \cdot e^{x^2} \cdot dx$. $c)$ Calcular $I = \int_0^1 x \cdot e^{x^2} \cdot dx$.

$a)$

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$$f'(x) = 1 \cdot e^{x^2} + x \cdot 2x \cdot e^{x^2} = e^{x^2} \cdot (1 + 2x^2).$$

$$m = f'(0) = e^0 \cdot (1 + 2 \cdot 0^2) = 1 \cdot 1 = 1.$$

$$\underline{La\ pendiente\ de\ la\ función\ f(x)\ en\ x = 0\ es\ m = 1.}$$

$b)$

$$I = \int x \cdot e^{x^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x^2 = t \\ x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot dt \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \int e^t \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot e^t + C.$$

$$\underline{I = \int x \cdot e^{x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot e^{x^2} + C.}$$

$c)$

$$I = \int_0^1 x \cdot e^{x^2} \cdot dx = \left[\frac{1}{2} \cdot e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \left[e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{1^2} - e^{0^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot (e - 1).$$

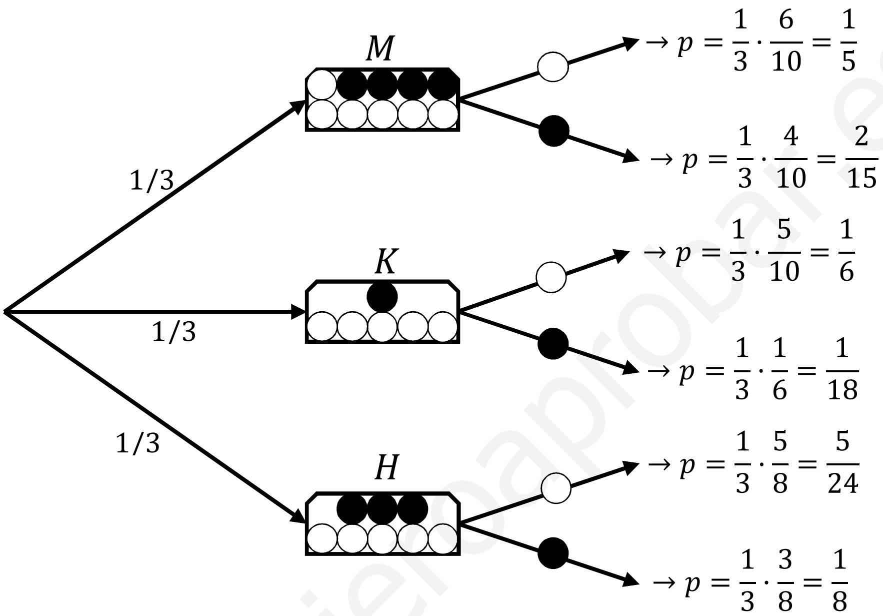
$$\underline{I = \int_0^1 x \cdot e^{x^2} \cdot dx = \frac{e-1}{2}.}$$

****

7º) Se dispone de tres cajas con bolas de distintos colores. La primera contiene 10 bolas: 4 negras y 6 blancas. En la segunda caja hay una única bola negra y 5 blancas. En la tercera caja tenemos 3 bolas negras y 5 blancas. Cogemos una bola al azar de cualquiera de las cajas:

a) Calcule la probabilidad de que la bola cogida sea negra.

b) Si la bola elegida es blanca, calcule la probabilidad de que estuviera en la primera caja.



a)

$$P = P(N) = \frac{1}{3} \cdot P(M \cap N) + \frac{1}{3} \cdot P(K \cap N) + \frac{1}{3} \cdot P(H \cap N) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{2}{15} + \frac{1}{18} + \frac{1}{8} = \frac{48+20+45}{360} = \frac{113}{360} = \underline{0{,}3139}.$$

b)

$$P = P(M/B) = \frac{P(M \cap B)}{P(B)} = \frac{P(M) \cdot P(B/M)}{1 - P(N)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{10}}{1 - \frac{113}{360}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{247}{360}} = \frac{72}{247} = \underline{0{,}2915}.$$

****

8º) Dados dos sucesos de un experimento aleatorio A y B tales que $P(\overline{A}) = 0{,}45$; $P(B) = 0{,}35 \ y \ P(A \cup B) = 0{,}7$. Calcular las siguientes probabilidades:

$a)\ P(A)$. $\qquad$ $b)\ P(A \cap B)$. $\qquad$ $c)\ P(B/A)$. $\qquad$ $b)\ P(\overline{A}/\overline{B})$.

$Datos$: $P(\overline{A}) = 0{,}45$; $P(B) = 0{,}35$; $P(A \cup B) = 0{,}7$.

$a)$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}45 = \underline{0{,}55}.$$

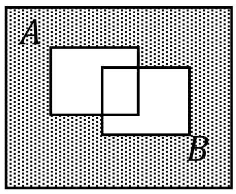
$b)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}55 + 0{,}35 - 0{,}70 = \underline{0{,}20}.$$

$c)$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}20}{0{,}55} = \underline{0{,}3636}.$$



$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B)$

$d)$

$$P(\overline{A}/\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} = \frac{1 - 0{,}7}{1 - 0{,}35} = \frac{0{,}30}{0{,}65} = \underline{0{,}4615}.$$

****