PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

JUNIO - 2001

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a una sola de las dos cuestiones de cada uno de los bloques. La puntuación de las dos cuestiones de cada bloque es la misma.

BLOQUE 1

1º) a) Discutir, según los valores del parámetro a, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} ax+y+z=a \\ x+y+z=a \\ y+az=2 \end{array}\right\}$$

b) Resolverlo, si es posible, para el caso de a = 1.

----

a)

$$M=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} ;;\ M'=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & a & 2 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}=a^2+1-a-a=a^2-2a+1=(a-1)^2=0 \Rightarrow \underline{a=1}$$

$$Para\ a\neq 1 \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M'=3=n^o\ incógnitas \Rightarrow \underline{Compatible\ Determinado}$$

Para a = 1 resulta el sistema $\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ y+z=2 \end{array}\right\}$, equivalente a $\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ y+z=2 \end{array}\right\}$, que como puede observarse, tiene dos ecuaciones linealmente independiente con tres incógnitas, lo cual significa que:

$$Para\ a=1 \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M'=2<n^o\ incógnitas \Rightarrow \underline{Compatible\ Indeterminado}$$

b)

Para a = 0 el sistema resulta el sistema: $\left.\begin{array}{r} y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ y=2 \end{array}\right\}$, cuyas soluciones son:

$\underline{\underline{y=2}}$;; $y+z=0$;; $2+z=0$;; $\underline{\underline{z=-2}}$;; $x+y+z=0$;; $x+2-2=0$;; $\underline{\underline{x=0}}$

****

2º) a) Definir el rango de una matriz.

b) Si A es una matriz y $\alpha \in R$, ¿cuándo se cumple que $Rango\ (\alpha A) = Rango\ A$. Justificar la respuesta.
c) Estudiar, en función de los valores de α, el rango de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -\alpha \\ \alpha & -1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

----

a)

Todas las matrices, mediante transformaciones elementales, se pueden transformar en matrices escalonadas.

Una matriz escalonada es aquella en la cual, si tiene filas nulas están situadas en la parte inferior de la matriz y, en las filas no nulas, el primer elemento distinto de cero de una fila está situado más a la derecha que el primer elemento diferente de cero de la fila superior.

El rango de una matriz escalonada es el número de filas no nulas.

El rango de una matriz A es el rango de una matriz escalonada equivalente a A.

También puede definirse el rango de una matriz por su determinante, para lo cual es necesario definir menor de orden k de una matriz que es el determinante de cualquier submatriz cuadrada de orden k que se puede formar con los elementos de la matriz.

El rango de una matriz A es el orden del mayor menor que puede formarse que sea distinto de cero.

b)

Si A es una matriz y $\alpha \in R$, ¿cuándo se cumple que Rango (αA) = Rango (A). Justificar la respuesta.

Se cumple siempre que $\alpha \neq 0$.

El producto de una matriz por un número distinto de cero es otra matriz que resulta de multiplicar todos y cada uno de sus elementos por el número, por lo tanto se puede expresar:

$$Rango\ (\alpha A) = Rango\ [\alpha \cdot (A)] \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{Rango\ (\alpha A) = Rango\ (A),\ \forall \alpha \in R,\ \alpha \neq 0}}$$

c) $M=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -\alpha \\ \alpha & -1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 & \alpha\end{pmatrix}$

El rango de M es:

$$M\Rightarrow\{C_1,\ C_2,\ C_4\}\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & 1 & -\alpha \\ \alpha & -1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha\end{vmatrix}=-\alpha-\alpha^2+\alpha-\alpha-\alpha-\alpha^2=-2\alpha(\alpha+1)=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=0\\ \alpha_2=-1\end{cases}$$

$$M\Rightarrow\{C_1,\ C_3,\ C_4\}\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & -1 & -\alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha\end{vmatrix}=0\ \rightarrow\ \{C_3=\alpha\cdot C_2\}$$

$$M\Rightarrow\{C_2,\ C_3,\ C_4\}\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & -1 & -\alpha \\ -1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha\end{vmatrix}=0\ \rightarrow\ \{C_3=\alpha\cdot C_2\}$$

$$\underline{\underline{Para\ \left.\begin{cases}\alpha\neq 0\\ \alpha\neq -1\end{cases}\right\}\Rightarrow\ Rango\ de\ M=3}}$$

Para $\alpha=0\ \ y\ \ \alpha=-1$ existen menores de orden dos distintos de cero, por tanto:

$$\underline{\underline{Para\ \left.\begin{cases}\alpha=0\\ \alpha=-1\end{cases}\right\}\Rightarrow\ Rango\ de\ M=2}}$$

****

BLOQUE 2

1º) a) Determinar el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a los puntos P(2, 0) y Q(1, 1) es constante e igual a 2.
b) ¿Qué tipo de curva representa el lugar?

Sea el lugar geométrico A(x, y), donde A representa a todos los puntos del plano que cumplen la condición del problema.

Sabiendo que la distancia entre dos puntos viene dada por la fórmula:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$d\left(\overline{PA}\right)+d\left(\overline{QA}\right)=2 \;\Rightarrow\; \sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=2 \;;;$$

$$\sqrt{x^2-4x+4+y^2}=2-\sqrt{x^2-2x+1+y^2-2y+1}=2 \;;;$$

$$x^2+y^2-4x+4=4-4\sqrt{x^2+y^2-2x-2y+2}+x^2+y^2-2x-2y+2 \;;;$$

$$4\sqrt{x^2+y^2-2x-2y+2}=2x-2y+2 \;;;\; 2\sqrt{x^2+y^2-2x-2y+2}=x-y+1 \;;;$$

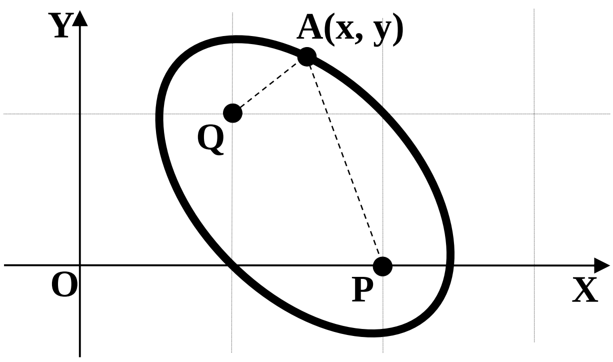
$$4\left(x^2+y^2-2x-2y+2\right)=x^2+y^2+1-2xy+2x-2y \;;;$$

$$4x^2+4y^2-8x-8y+8=x^2+y^2+1-2xy+2x-2y \;;;$$

$$\underline{\underline{3x^2+3y^2-10x-6y+2xy+7=0}}$$

b)

Se trata de una elipse de focos P(2, 0) y Q(1, 1) y cuya gráfica aproximada es la de la siguiente figura:



****

2º) Encontrar la distancia del punto P(1, 1, 1) a la recta $r \equiv \begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x+y=1 \end{cases}$.

La expresión de la recta r en unas ecuaciones paramétricas es:

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=k} \;;;\; \begin{cases} x+y=2+k \\ 2x+y=1 \end{cases} \;;;\; \begin{cases} -x-y=-2-k \\ 2x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \underline{x=-1-k}$$

$$2x+y=1 \;;;\; y=1-2x=1-2(-1-k)=1+2+2k=\underline{3+2k=y} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=-1-k \\ y=3+2k \\ z=k \end{cases}}$$

La distancia de un punto a una recta viene dada por la siguiente fórmula: $d(P,\, r)=\dfrac{\left|\overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}$, siendo Q(-1, 3, 0) un punto de r y $\overrightarrow{v}=(-1,\, 2,\, 1)$ un vector director de la recta r.

$$\overrightarrow{QP}=P-Q=(1,1,1)-(-1,\,3,\,0)=\underline{(2,\,-2,\,1)=\overrightarrow{QP}}$$

$$d(P,\, r)=\frac{\left|\overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}=\frac{\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{matrix} \right\|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}}=\frac{\left|-2i-j+4k-2k-2i-2j\right|}{\sqrt{6}}=\frac{\left|-4i-3j+2k\right|}{\sqrt{6}}=$$

$$=\frac{\sqrt{(-4)^2+(-3)^2+2^2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{16+9+4}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{29}\cdot\sqrt{6}}{6}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{174}}{6}\; u \cong 2'20\; u=d(P,\, r)}}$$

****

BLOQUE 3

1º) Responder a las siguientes cuestiones referidas a la curva $y=\frac{x^2+3}{x^2-4}$:

a) Dominio de definición.
b) Simetrías.
c) Corte con los ejes.
d) Asíntotas.
e) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
f) Máximos y mínimos.
g) Representación aproximada.

----

a) Dominio de definición.

$$x^2-4=0\ ;;\ (x+2)(x-2)=0\ \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=2 \end{cases}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{D(f)\Rightarrow R-\{-2,\ 2\}}}$$

b) Simetrías.

Por tratarse de una función par, es simétrica con respecto a Y

c) Corte con los ejes.

$$X\ \Rightarrow\ y=0\ \Rightarrow\ x^2+3=0\ \Rightarrow x\notin R\ \Rightarrow\ \underline{\underline{La\ \ función\ \ no\ \ corta\ \ al\ \ eje\ \ X}}$$

$$Y\ \Rightarrow\ x=0\ \Rightarrow\ y=-\frac{3}{4}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{A\left(0,\ -\frac{3}{4}\right)}}$$

d) Asíntotas.

Asíntotas horizontales: son los valores finitos que toma y cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$y=k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x^2-4}=\underline{\underline{1=y}}$$

Asíntotas verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$$x^2-4=0\ ;;\ x^2=4\Rightarrow\begin{cases} \underline{\underline{x_1=2}} \\ \underline{\underline{x_2=-2}} \end{cases}$$

No tiene asíntotas oblicuas. (Para que tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador).

e) <u>Intervalos de crecimiento y decrecimiento.</u>

$$y' = \frac{2x(x^2-4) - 2x(x^2+3)}{(x^2-4)^2} = \frac{2x(x^2-4-x^2-3)}{(x^2-4)^2} = \underline{\frac{-14x}{(x^2-4)^2} = y'}$$

Por ser el denominador siempre positivo, solo estudiamos el numerador.

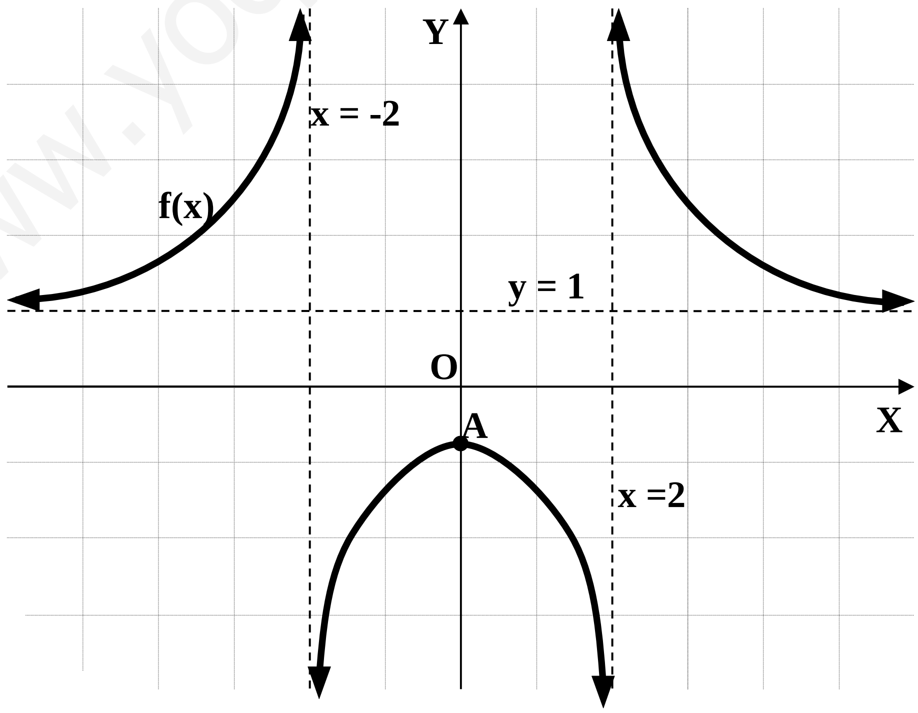
$$y' = \frac{-14x}{(x^2-4)^2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} y' > 0 \;\Rightarrow\; x < 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\textit{Creciente}: (-\infty, -2) \cup (-2, 0)}} \\ \\ y < 0 \;\Rightarrow\; x > 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\textit{Decreciente}: (0, 2) \cup (2, \infty)}} \end{cases}$$

f) Máximos y mínimos.

$$y'' = \frac{-14 \cdot (x^2-4)^2 + 14x \cdot 2 \cdot 2x \cdot (x^2-4)}{(x^2-4)^4} = \frac{-14 \cdot (x^2-4) + 56x^2}{(x^2-4)^3} = \underline{\frac{42x^2+56}{(x^2-4)^3} = y''}$$

$$y' = 0 \;\Rightarrow\; \underline{x = 0} \;\;;;\;\; y''(0) = \frac{56}{(-4)^3} = -\frac{56}{64} < 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\textit{Máximo} \;\Rightarrow\; A\left(0, -\frac{4}{3}\right)}}$$

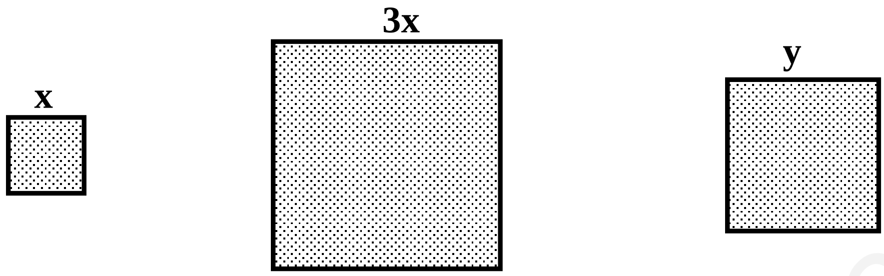
g) Una representación aproximada de la misma.



****

2º) Calcular las dimensiones de tres campos cuadrados de modo que: el perímetro de uno de ellos sea triple del perímetro de otro, se necesiten exactamente 1248 metros para vallar los tres y la suma de las áreas de los tres campos sea la mínima posible.

Sean los campos los representados a continuación.



El perímetro o longitud total es:

$$L = 4x + 4 \cdot (3x) + 4y = 16x + 4y = 1248 \; metros \;\; ;; \;\; 4x + y = 312 \;\; ;; \;\; \underline{y = 312 - 4x}$$

La superficie total, que tiene que ser mínima, es:

$$S_T = S_1 + S_2 + S_3 = x^2 + (3x)^2 + y^2 = x^2 + 9x^2 + (312 - 4x)^2 = \underline{10x^2 + (312 - 4x)^2 = S_T}$$

$$S'_T = 20x + 2 \cdot (312 - 4x) \cdot (-4) = 20x - 8(312 - 4x) = 0 \Rightarrow 20x = 8(312 - 4x) \;\; ;;$$

$$5x = 2(312 - 4x) = 624 - 8x \;\; ;; \;\; 13x = 624 \;\; ;; \;\; x = \frac{624}{13} = \underline{48 = x}$$

<u>Los lados de los cuadrados de los campos son 48 metros, 144 metros y 120 metros.</u>

****

BLOQUE 4

1º) Encontrar el área del recinto determinado por las curvas $\begin{cases} y = |\,x-2\,| \\ y = -x^2 + 4x - 2 \end{cases}$.

La función $y = |\,x-2\,|$ se puede redefinir como: $\begin{cases} y = x-2 \quad si \;\; x \geq 0 \\ y = -x+2 \quad si \;\; x < 0 \end{cases}$

Para facilitar la representación de la función $y = -x^2 + 4x - 2$ determinamos sus puntos de corte con los ejes y su máximo o mínimo:

Corte con los ejes:

$$X \to y = 0 \;\; ;; \;\; x^2 - 4x + 2 = 0 \;\; ;; \;\; x = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + \sqrt{2} \\ x_2 = 2 - \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\underline{P\left(2+\sqrt{2},\ 0\right)} \;\; ;; \;\; \underline{Q\left(2-\sqrt{2},\ 0\right)}$$

$$Y \to x = 0 \;\Rightarrow\; \underline{T(0,\, 2)}$$

El máximo o mínimo es el siguiente:

$$y = -x^2 + 4x - 2 \;\Rightarrow\; y' = -2x + 4 = 0 \;\Rightarrow\; 2x = 4 \;\; ;; \;\; \underline{x = 2}$$

$$y'' = -2 < 0 \;\Rightarrow\; Máximo \;\Rightarrow\; y(2) = -(2)^2 + 4 \cdot 2 - 2 = -4 + 8 - 2 = 2 \;\Rightarrow\; \underline{Máx(2,\, 2)}$$

Los puntos de corte de ambas funciones son:

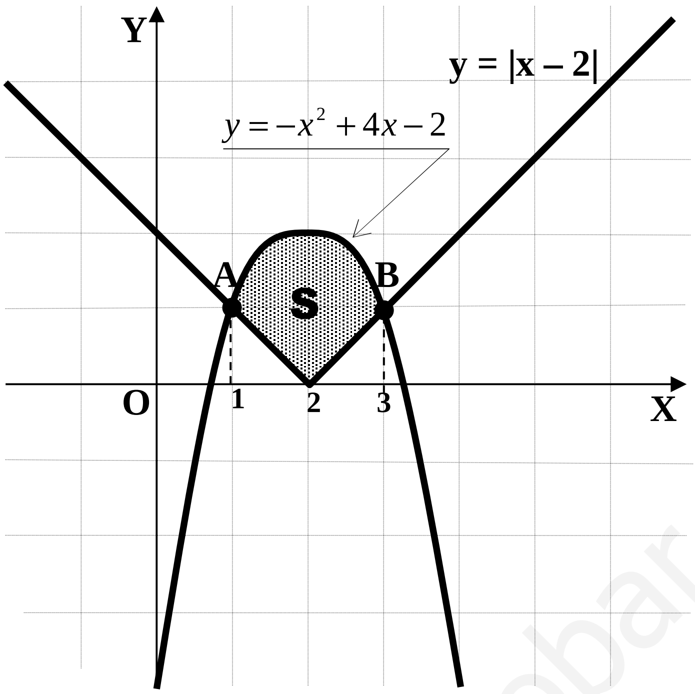
$$-x^2 + 4x - 2 = -x + 2 \;\; ;; \;\; x^2 - 5x + 4 = 0 \;\; ;; \;\; x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 \to y = -4 + 2 = -2 \;\Rightarrow\; (4,\, -2) \notin \; y = |\,x-2\,| \\ \\ x = 1 \to y = -1 + 2 = 1 \;\Rightarrow\; \underline{A(1,\, 1)} \end{cases}$$

$$-x^2 + 4x - 2 = x - 2 \;\; ;; \;\; x^2 - 3x = 0 \;\; ;; \;\; x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \to y = -2 \;\Rightarrow\; (0,\, -2) \notin \; y = |\,x-2\,| \\ \\ x = 3 \to y = 3 - 2 = 1 \;\Rightarrow\; \underline{B(3,\, 1)} \end{cases}$$

La expresión gráfica de la situación es, aproximadamente la siguiente:



$$S=\int_1^3\left(-x^2+4x-2\right)\cdot dx-\int_1^2\left(-x+2\right)\cdot dx-\int_2^3\left(x-2\right)\cdot dx=$$

$$=\int_1^3\left(-x^2+4x-2\right)\cdot dx+\int_2^1\left(-x+2\right)\cdot dx+\int_3^2\left(x-2\right)\cdot dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}-2x\right]_1^3+\left[-\frac{x^2}{2}+2x\right]_2^1+\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_3^2=\left[\left(-\frac{27}{3}+18-6\right)-\left(-\frac{1}{3}+2-2\right)\right]+$$

$$+\left[\left(-\frac{1}{2}+2\right)-\left(-2+4\right)\right]+\left[\left(2-4\right)-\left(\frac{9}{2}-6\right)\right]=3+\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-2-2-\frac{9}{2}+6=5+\frac{1}{3}-\frac{6}{2}=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

$$\underline{\underline{S=\frac{7}{3}\cong 2'33\ u^2}}$$

****

2º) a) Si p y q son enteros positivos, demostrar que: $\int_o^1 x^p (1-x)^q \cdot dx = \int_0^1 x^q (1-x)^p \cdot dx$.

b) Calcular: $\int_o^1 x^2 (1-x)^{10} \cdot dx$

----

a)

$$\int_o^1 x^p (1-x)^q \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1-x=t \ ;; \ x=1-t \\ dx=-dt \end{array} \right\| \left. \begin{array}{c} x=1 \rightarrow t=0 \\ x=0 \rightarrow t=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \int_1^0 -(1-t)^p t^q \cdot dt = \underline{\underline{\int_0^1 t^q (1-t)^p \cdot dt}}$$

Haciendo el cambio de variable x por t en la solución obtenida resulta:

$$\int_o^1 t^q (1-t)^p \cdot dt \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x=t \\ dx=-dt \end{array} \right\| \left. \begin{array}{c} x=1 \rightarrow t=1 \\ x=0 \rightarrow t=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{\int_0^1 x^q (1-x)^p \cdot dx}}$$

, con lo cual queda demostrado lo pedido.

b)

$$\int_o^1 x^2 (1-x)^{10} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1-x=t \ ;; \ x=1-t \\ dx=-dt \end{array} \right\| \left. \begin{array}{c} x=1 \rightarrow t=0 \\ x=0 \rightarrow t=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \int_1^0 -(1-t)^2 t^{10} \cdot dt =$$

$$= \int_0^1 (1-t)^2 t^{10} \cdot dt = \int_0^1 (1-2t+t^2) t^{10} \cdot dt = \int_0^1 (t^{10} - 2t^{11} + t^{12}) \cdot dt = \left[\frac{t^{11}}{11} - \frac{2t^{12}}{12} + \frac{t^{13}}{13} \right]_0^1 =$$

$$= \left(\frac{1^{11}}{11} - \frac{1^{12}}{6} + \frac{1^{13}}{13} \right) - 0 = \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} = \frac{78+143+66}{66 \cdot 13} = \underline{\underline{\frac{287}{858} \cong 0'33 \ u^2}}$$

****