PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

SEPTIEMBRE - 2001

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a una sola de las dos cuestiones de cada uno de los bloques. La puntuación de las dos cuestiones de cada bloque es la misma.

BLOQUE 1

1º) a) Enunciar el Teorema de Rouché-Fröbenius.
b) ¿Puede un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas tener únicamente dos soluciones distintas? Justificar la respuesta.
c) Estudiar, utilizando el Teorema de Rouché-Fröbenius, el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x-y+z=3 \\ 2x+y-3z=1 \\ 8x-5y+3z=19 \end{array}\right\}$$

----

a)

El Teorema de Rouché-Fröbenius puede enunciarse del modo siguiente:

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones con n incógnitas tenga solución es que coincida el rango de la matriz de los coeficientes con el rango de la matriz ampliada con los términos independientes.

Si el rango es igual al número de incógnitas el sistema es compatible determinado.

Si el rango es menor que el número de incógnitas el sistema es compatible indeterminado.

En el caso particular de un sistema homogéneo, la condición necesaria y suficiente para que un sistema sea compatible es que el rango de la matriz de los coeficientes sea menor que el número de incógnitas. La condición necesaria y suficiente para que un sistema de n ecuaciones homogéneas con n incógnitas sea compatible es que el determinante de la matriz de los coeficientes sea nulo.

b)

La respuesta es no. Según el Teorema de Rouché-Fröbenius, las posibilidades de resolución de un sistema de ecuaciones lineales es que sea compatible o no. Si es incompatible el sistema no tiene solución. Si es compatible puede ser determinado, en cuyo caso la solución es única o indeterminado, en cuyo caso el sistema tiene infinitas soluciones.

De forma gráfica: un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas son tres planos en el espacio. Cada solución del sistema es un punto que pertenece simultáneamente a los tres planos. Si tres planos tuvieran dos puntos en común tendrían una recta en común y por lo tanto infinitos puntos en común.

c)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \;;;\; M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 8 & -5 & 3 & 19 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 8 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 3-10+24-8-15+6 = 33-33 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{Rango\ de\ M = 2}$$

Vamos a estudiar ahora el rango de M':

$$\left.\begin{array}{l} M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 8 & -5 & 19 \end{vmatrix} = 19-30-8-24+5+38 = 62-62 = 0 \\ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 8 & 3 & 19 \end{vmatrix} = -57+18+8+72-3-38 = 98-98 = 0 \\ M' \Rightarrow \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 19 \end{vmatrix} = 57+9-5-45+3-19 = 69-69 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \underline{Rango\ M' = 2}$$

$$\underline{\underline{Rango\ M = Rango\ M' = 2 < n^{\circ}\ incógnitas \Rightarrow Compatible\ indeterminado}}$$

****

2º) a) Discutir, según los valores del parámetro α, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+\alpha z=1 \\ \alpha x+y+z=3 \\ x+2y+\alpha z=5 \end{array}\right\}$$

b) Resolverlo, si es posible, para el caso de $\alpha = 2$.

----

a)

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & \alpha & 5 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha \end{vmatrix}=\alpha+2\alpha^2+1-\alpha-2-\alpha^2=\alpha^2-1=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \underline{\alpha_1=1} \\ \underline{\alpha_2=-1} \end{cases}$$

$$Para \begin{Bmatrix} \alpha\neq 1 \\ \alpha\neq -1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\, M = Rango\, M' = 3 = n^o\ incógnitas \Rightarrow \underline{\underline{Compatible\ \det er\min ado}}$$

$$Para\ \ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}\ \ El\ rango\ de\ M'\ es:$$

$$M' \Rightarrow \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}=5+1+6-2-3-5=12-10=2\neq 0$$

$$Para\ \alpha=1 \Rightarrow Rango\ M=2\neq Rango\ M'=3 \Rightarrow \underline{\underline{Incompatible}}$$

$$Para\ \ a=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}\ \ El\ rango\ de\ M'\ es:$$

$$M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}=5-2+3-1-6+5=13-9=4\neq 0$$

$$Para\ \alpha=-1 \Rightarrow Rango\ M=2\neq Rango\ M'=3 \Rightarrow \underline{\underline{Incompatible}}$$

b) $Para\ \ \alpha = 2\ \Rightarrow\ M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Resolviendo por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2+12+5-10-2-6}{2+8+1-2-2-4} = \frac{19-18}{11-8} = \underline{\underline{\frac{1}{3} = x}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{6+20+1-6-5-4}{3} = \frac{27-15}{3} = \frac{12}{3} = \underline{\underline{4 = y}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{3} = \frac{5+4+3-1-6-10}{3} = \frac{12-17}{3} = \underline{\underline{-\frac{5}{3} = z}}$$

****

BLOQUE 2

1º) Encontrar el plano π que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 3 \end{cases}$ y es paralelo a la recta s determinada por los puntos P(1, 1, 1) y Q(-1, 0, 2).

El plano π se puede determinar por los vectores directores de las rectas r y x y por un punto cualquiera de la recta r, por ejemplo A(1, 2, 3).

Un vector director de r es $\overrightarrow{u} = (-1,\ 1,\ 0)$.

Un vector director de s es $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (-1,\ 0,\ 2) - (1,\ 1,\ 1) = (-2,\ -1,\ 1)$.

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ (x-1) + (z-3) + 2(z-3) + (y-2) = 0 \ ;;$$

$$x - 1 + 3z - 9 + y - 2 = 0 \ ;;\ \underline{\underline{\pi \equiv x + y + 3z - 12 = 0}}$$

****

2º) a) Demostrar que las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 3t \\ z = -1 - t \end{cases}$ se cruzan en el espacio.

b) Encontrar la distancia entre ambas rectas.

----

a)

Vamos a resolver este apartado mediante los vectores directores de ambas rectas.

Un vector director de r es $\overrightarrow{u} = (1,\ -1,\ 2)$ y un director de s es $\overrightarrow{v} = (1,\ 3,\ -1)$. Como puede observarse, los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son linealmente independientes, lo cual significa que las rectas se cruzan o se cortan; para diferenciar el caso determinamos un tercer vector $\overrightarrow{w}$ que tenga como origen, por ejemplo, un punto de r, A(1, 0, 2) y por extremo otro punto de s, B(0, 1, -1): $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 1,\ -1) - (1,\ 0,\ 2) = (-1,\ 1,\ -3)$.

Si los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ están en el mismo plano las rectas r y s se cortan; en caso contrario se cruzan, o sea, si el rango de $\{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\ y\ \overrightarrow{w}\}$ es 2 las rectas se cortan y si el rango es 3 se cruzan:

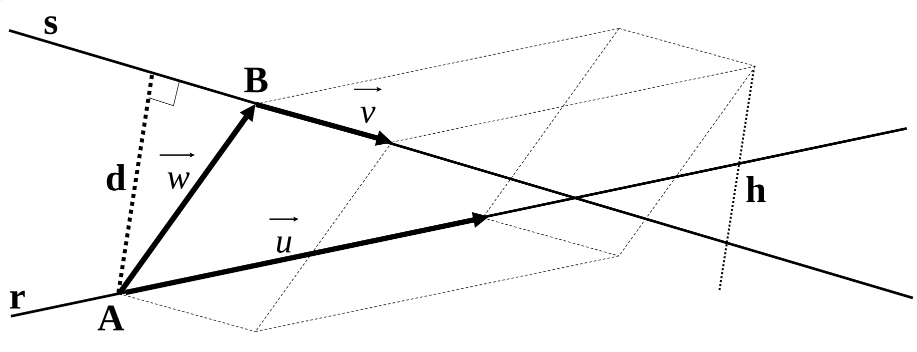
$$Rango\ \{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 2 - 1 + 6 + 1 - 3 = 9 - 13 = -4 \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{Rango = 3}}$$

<u>En efecto, las rectas r y s se cruzan.</u>

b)

Se entiende como distancia entre dos rectas que se cruzan, a la menor distancia entre ambas.

Para una mejor comprensión, hacemos un esquema de la situación.



Para calcular la distancia entre las rectas vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas y otro vector que tiene como origen un punto A de la recta r y como final otro punto B de la recta s, tal como se observa en la figura.

El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observemos que la altura h es igual a la distancia pedida d entre ambas rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\right) = \left|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right| \cdot h = \left|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right| \cdot d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\left|\overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right|}$$

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right|} = \frac{\left\|\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{matrix}\right\|}{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{matrix}\right\|} = \frac{\left|-9+2-1+6+1-3\right|}{\left|3i-2j+k-k-2i+3j\right|} = \frac{\left|9-13\right|}{\left|i+j\right|} = \frac{4}{\sqrt{1^2+1^2}} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{2\sqrt{2}\ u = d}}$$

****

BLOQUE 3

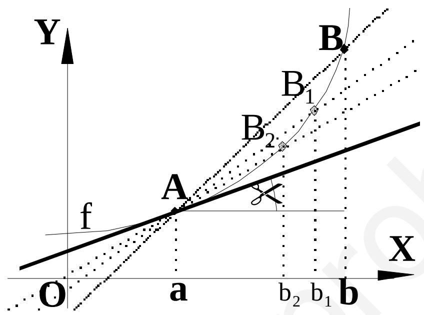
1º) a) Definición de derivada de una función en un punto.

b) Utilizando la definición de derivada, encontrar la derivada de la función $f(x)=\frac{3+x}{x-2}$ en el punto $x_0 = 3$.

c) Encontrar la ecuación de la tangente a la curva $y=\frac{3+x}{x-2}$ en el punto de abscisa $x_0=3$.

----

a)



Consideremos la función f de la figura, continua en el punto A, de abscisa a. Se denomina tasa de variación media de un intervalo cerrado [a, b] a la expresión:

$$TVM\,[a,\,b]=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (1)$$

La TVM[a, b] es la tangente o pendiente de la secante de la función f que pasa por los punto A y B.

La derivada de una función en un punto es la tasa de variación instantánea de la función en ese punto, o sea, es el límite cuando $b \to a$ de la fracción (1). Si hacemos el cambio de variable b - a = h, queda finalmente la expresión de la derivada, que se expresa como sigue:

$$f'(a)=y'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

La interpretación gráfica de la derivada de una función en un punto puede deducirse de la observación de la figura: cuando b tiende a a (h tiende a cero), el punto B tiende a aproximarse infinitamente al punto A, con lo cual la secante tiende a confundirse con la tangente; es decir:

<u>la derivada de una función en un punto es la tangente de la función en ese punto.</u>

b)

$$f(x)=\frac{3+x}{x-2}\ \Rightarrow\ f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{3+3+h}{3+h-2}-\frac{3+3}{3-2}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{6+h}{1+h}-\frac{6}{1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{6+h-6-6h}{1+h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-5h}{h(1+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-5}{1+h}=\underline{\underline{-5=f'(3)}}$$

c)

La tangente a una función en un punto tiene como pendiente m la derivada de la función en ese punto, es decir: <u>m = -5.</u>

El punto P de tangencia para x = 3 es: $f(3)=\frac{3+3}{3-2}=\frac{6}{1}=6\ \Rightarrow\ \underline{P(3,\ 6)}$

Sabiendo que la recta que pasa por un punto es: $y-y_0=m(x-x_0)$, la tangente es:

$y-6=-5(x-3)\ ;;\ y-6=-5x+15 \quad 5x+y-21=0$.

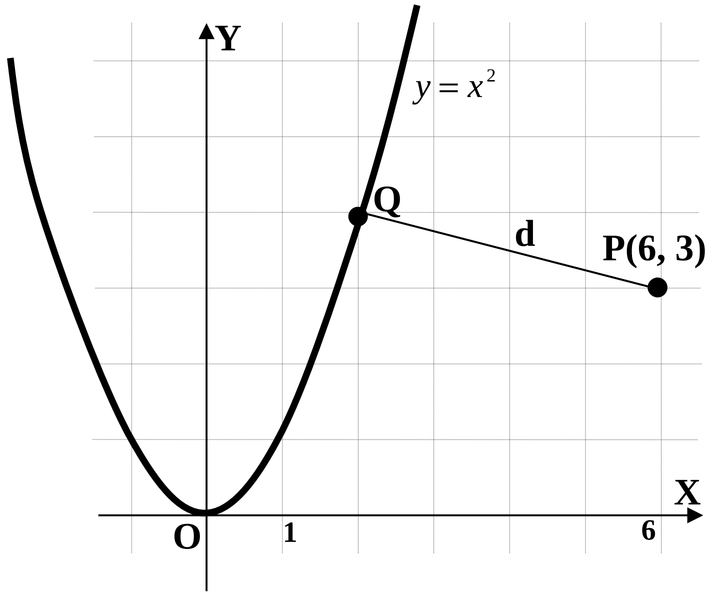
$$\underline{\underline{La\ \ recta\ \ \tan gente\ \ pedida\ \ es:\ t\equiv 5x+y-21=0}}$$

****

2º) a) Determinar el punto de la curva $y = x^2$ cuya distancia al punto P(6, 3) es mínima.
b) ¿Cuál es esta distancia mínima?

----

a)



El punto Q por pertenecer a la curva $y = x^2$ es de la forma $Q\left(x,\ x^2\right)$.

La distancia entre los puntos P y Q tiene que ser mínima, por lo tanto, su derivada tiene que ser nula.

$$d = \sqrt{(x-6)^2 + \left(x^2 - 3\right)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 - 12x + 36 + x^4 - 6x^2 + 9} =$$

$$= \underline{\sqrt{x^4 - 5x^2 - 12x + 45} = d}$$

$$d' = \frac{4x^3 - 10x - 12}{2\sqrt{x^4 - 5x^2 - 12x + 45}} = \frac{2x^3 - 5x - 6}{\sqrt{x^4 - 5x^2 - 12x + 45}} = 0 \ \Rightarrow \ 2x^3 - 5x - 6 = 0$$

Aplicando Ruffini:

	2	0	-5	-6
2		4	8	6
	2	4	3	$\boxed{0}$

El único valor real de x es el hallado, ya que la ecuación residual de segundo grado $2x^2 + 4x + 3 = 0$ no tiene raíces reales:

$$2x^2 + 4x + 3 = 0 \ ;; \ x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-24}}{4} = \frac{-4 \pm \sqrt{-8}}{4} \ \Rightarrow \ \underline{x \notin R}.$$

$$\underline{\underline{El \ \ punto \ \ pedido \ \ es \ \ Q(2,\ 4)}}$$

b)

$$d = \overline{PQ} = \sqrt{(2-6)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{16+1} = \underline{\underline{\sqrt{17} \ unidades = d}}$$

****

BLOQUE 4

1º) a) Justificar geométricamente que si f es una función positiva definida en el intervalo [a, b] y $c \in [a,\ b]$, entonces se cumple que:

$$\int_a^c f(x) \cdot dx + \int_c^b f(x) \cdot dx = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

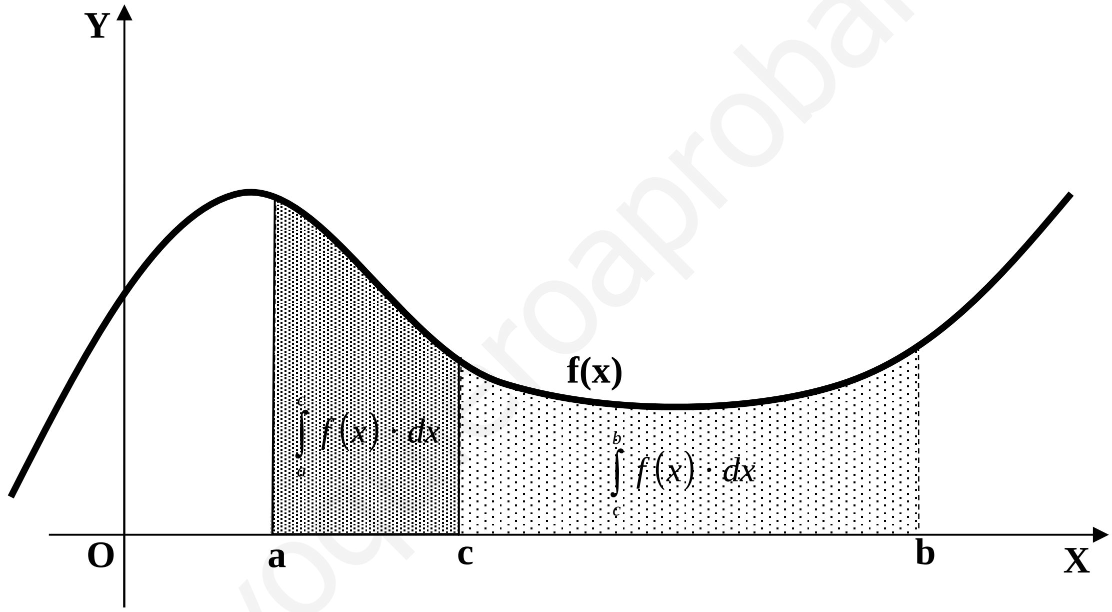
b) Justificar geométricamente que si f y g son funciones definidas en [a, b] y para todo $x \in [a,\ b]$ se cumple que $0 \le g(x) \le f(x)$ entonces:

$$\int_a^b g(x) \cdot dx \le \int_a^b f(x) \cdot dx$$

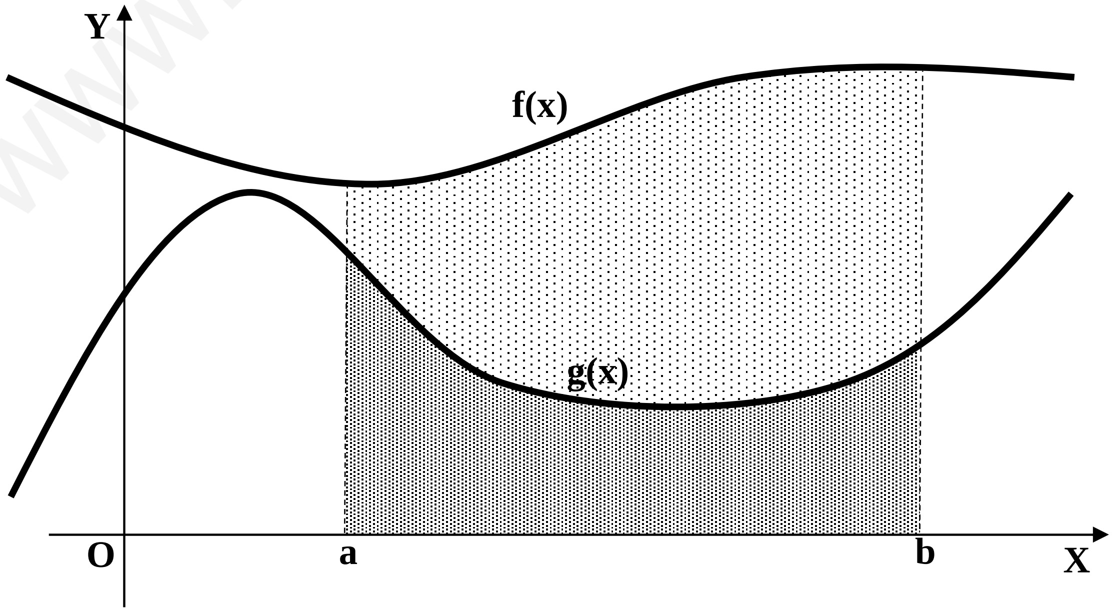
c) Demostrar que $0 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen\ x}{1+x^2} \cdot dx \le 1$.

----

a)



b)



c)

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen\ x}{1+x^2} \cdot dx \leq 1$$

2º) a) Enunciar la Regla de Barrow.

b) Calcular el área del recinto determinado por la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$, las rectas $x = 2$ y $x = -2$ y el eje de abscisas.

----

a)

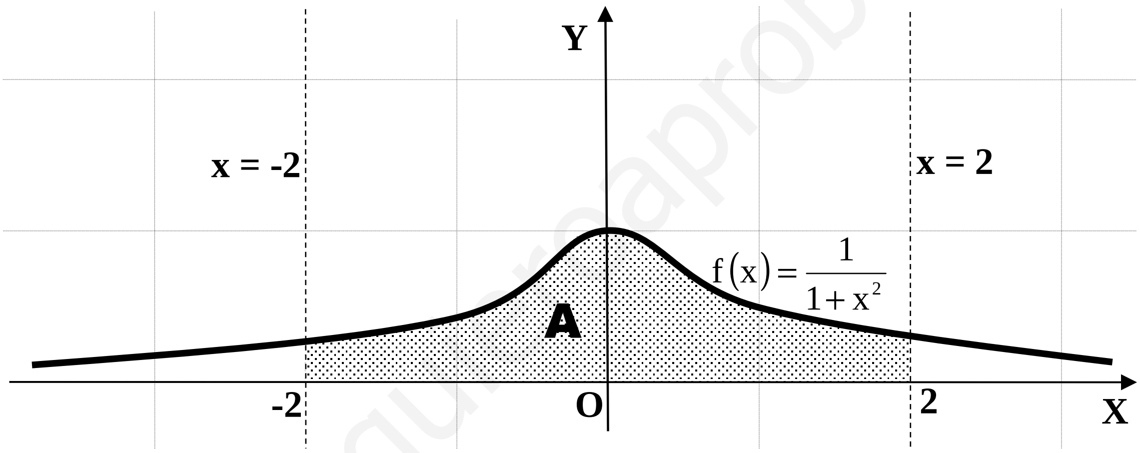
El enunciado de la regle de Barrow es el siguiente:

Si f(x) es una función continua en el intervalo [a, b] y F(x) es una función primitiva de f(x) en dicho intervalo, entonces se verifica la siguiente igualdad:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a)$$

b)

La situación gráfica es la siguiente:



$$A = 2 \cdot \int_0^2 \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = 2 \cdot [arc\ tag\ x]_0^2 = 2 \cdot (arc\ tag\ 2 - arc\ tag\ 0) = 2 \cdot (1'11 - 0) = \underline{\underline{2'22\ u^2}}$$

****