PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

JUNIO – 2005

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Observaciones importantes: El alumno deberá responder a una sola de las dos cuestiones de cada uno de los bloques. La puntuación de las dos cuestiones de cada bloque es la misma y se indica en la cabecera del bloque.

BLOQUE 1

1º) Estudiar, en función de los valores del parámetro a, el siguiente sistema lineal:

$$\left.\begin{array}{r} ay+z=a-1 \\ -ax+(a+1)y=a \\ ax-y+(2a-1)z=2a+1 \end{array}\right\}$$

$$M=\begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ -a & a+1 & 0 \\ a & -1 & 2a-1 \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 0 & a & 1 & a-1 \\ -a & a+1 & 0 & a \\ a & -1 & 2a-1 & 2a+1 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ -a & a+1 & 0 \\ a & -1 & 2a-1 \end{vmatrix}=a-a(a+1)+a^2(2a-1)=a-a^2-a+2a^3-a^2=$$

$$=2a^3-2a^2=2a^2(a-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{a_1=0} \\ \underline{a_2=1} \end{cases}$$

$$Para \begin{Bmatrix} a\neq 0 \\ a\neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\, M = Rango\, M' = 3 = n^{o}\ incóg. \Rightarrow Compatible\ \det er\min ado$$

$$\underline{Para\ \ a=0}\ \Rightarrow\ M'=\begin{pmatrix}0&0&1&-1\\0&1&0&0\\0&-1&-1&1\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ Rango\ de\ M'\ \Rightarrow$$

$$=\begin{vmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\-1&-1&1\end{vmatrix}=1-1=0\ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=0\ \Rightarrow\ Rango\,M\ =Rango\ \ M'=2<n^{o}\ incóg.\Rightarrow Compatible\ \ indeterminado}}$$

$$\underline{Para\ \ a=1}\ \Rightarrow\ M'=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\-1&2&0&1\\1&-1&1&3\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ Rango\ de\ M'\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \{C_1,\ C_2,\ C_4\}\Rightarrow\begin{vmatrix}0&1&0\\-1&2&1\\1&-1&3\end{vmatrix}=1+3=4\neq 0$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=1\ \Rightarrow\ Rango\ M\neq Rango\ M'\ \Rightarrow\ Incompatible.}}$$

****

2º) a) Demostrar que cualquiera que sea el valor de a, los siguientes vectores de R^3 son linealmente dependientes: $\overrightarrow{u_1}=(a,\ 1,\ 2),\ \overrightarrow{u_2}=(1,\ 1,\ a),\ \overrightarrow{u_3}=(3a-2,\ 1,\ 6-2a)$.

b) Si a = 2, escribir el vector $\overrightarrow{w}=(9,\ 2,\ 4)$ como combinación lineal de $\overrightarrow{u_1}$ y $\overrightarrow{u_2}$.

----

a)

Tres vectores son linealmente dependientes si el rango del determinante que determinan es menor de tres, es decir: su determinante es cero.

$$Rngo\left\{\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a \\ 3a-2 & 1 & 6-2a \end{vmatrix} =$$

$$= a(6-2a)+2+a(3a-2)-2(3a-2)-a^2-(6-2a)=$$

$$= 6a-2a^2+2+3a^2-2a-6a+4-a^2-6+2a=3a^2-3a^2+8a-8a+6-5=\underline{0}$$

$$\underline{\underline{Los\ \ vectores\ \ \overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3}\ \ son\ \ linealmente\ \ independientes\ \ \forall a \in R}},\ \underline{\underline{c.q.d.}}$$

b)

Para a = 2, los vectores son: $\overrightarrow{u_1}=(2,\ 1,\ 2)$ y $\overrightarrow{u_2}=(1,\ 1,\ 2)$.

$$\overrightarrow{w}=\alpha\cdot\overrightarrow{u_1}+\beta\cdot\overrightarrow{u_2} \Rightarrow (9,\ 2,\ 4)=\alpha\cdot(2,\ 1,\ 2)+\beta\cdot(1,\ 1,\ 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 9=2\alpha+\beta \\ 2=\ \alpha+\beta \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 9=2\alpha+\beta \\ -2=-\alpha-\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\alpha=7}\ ;;\ \alpha+\beta=2\ ;;\ 7+\beta=2\ ;;\ \underline{\beta=-5}$$

$$\underline{\underline{\overrightarrow{w}=7\cdot\overrightarrow{u_1}-5\cdot\overrightarrow{u_2}}}$$

****

BLOQUE 2

1º) Encontrar la distancia del punto P(1, 1, 1) a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

La distancia de un punto P a una recta r es: $d(P,\ r) = \frac{\left| \overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{v} \right|}{\left| \overrightarrow{v} \right|}$, donde A es un punto cualquiera de la recta r.

Un vector director de r es $\overrightarrow{v} = (1,\ 1,\ -1)$.

Un punto de la recta r puede ser A(1, 0, 1), con lo cual:

$\overrightarrow{PA} = A - P = (1,\ 0,\ 1) - (1,\ 1,\ 1) = (0,\ -1,\ 0)$.

$$d(P,\ r) = \frac{\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{matrix} \right\|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|i + k|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{6}}{3}\ u = d(P,\ r)}}$$

****

2º) a) Demostrar que las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 4 - t \end{cases}$ se cortan en un punto. ¿Cuál es ese punto?

b) Encontrar la ecuación del plano π determinado por dichas rectas.

----

a)

Un vector director y un punto de cada una de las rectas son:

$$r \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u} = (2,\ -1,\ 1) \\ A(1,\ 1,\ 0) \end{cases} \ ;;\ s \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v} = (1,\ 0,\ -1) \\ B(0,\ 0,\ 4) \end{cases}$$

Si las rectas están contenidas en el mismo plano, los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB}$ tienen que ser linealmente independiente, o lo que es lo mismo: el rango de la matriz que constituyen tiene que ser menor de 3.

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 0,\ 4) - (1,\ 1,\ 0) = \underline{(-1,\ -1,\ 4) = \overrightarrow{w}}$$

$$Rango\ \ de\ \ \{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -1 - 1 - 2 + 4 = 0$$

$$\underline{\underline{Las\ \ rectas\ \ r\ \ y\ \ s\ \ están\ \ en\ \ un\ \ mismo\ \ plano\ \ \pi.\ \{c.q.c.\}}}$$

b)

El plano π tiene como vectores directores a los vectores directores de ambas rectas, $\overrightarrow{u} = (2,\ -1,\ 1)$ $\overrightarrow{v} = (1,\ 0,\ -1)$, y como punto a cualquier punto que pertenezca a una cualquiera de las rectas, por ejemplo, el punto A(1, 1, 0):

$$\pi(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (x-1) + (y-1) + z + 2(y-1) = 0\ \ ;;$$

$$x - 1 + y - 1 + z + 2y - 2 = 0\ \ ;;\ \ \underline{\underline{\pi \equiv x + 2y + z - 4 = 0}}$$

****

BLOQUE 3

1º) Se considera la curva definida por la función: $y = \frac{x^3}{x^2+1}$. Se pide:

a) Dominio de definición , corte con los ejes y simetrías.

b) Asíntotas.

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. ¿Tiene extremos la función?

d) Representación aproximada de la curva.

e) ¿Cuál será la gráfica de la curva $y = \frac{x^3}{x^2+1} + 1$?

----

a) Dominio de definición. Al no anularse el denominador para ningún valor real de x, el domino de definición de la curva es R.

Corte con los ejes. La curva pasa por el origen de coordenadas, que es el único punto en que corta a los ejes.

Simetrías. Por ser $y = f(x) = -f(-x)$ es simétrica con respecto al origen.

b) Asíntotas.

Horizontales: son los valores finitos que toma y cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$y = k = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^2+1} = \infty \Rightarrow \underline{No\ \ tiene.}$$

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$$x^2 + 1 = 0\ \ ;;\ \ x \notin R \Rightarrow \underline{No\ \ tiene.}$$

Oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^3}{x^2+1}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \underline{1 = m}$$

$$n = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - mx \right] = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - x^3 - x}{x^2+1} = \underline{0 = n}$$

<u>Asíntota oblicua: y = x</u>

c)

<u>Intervalos de crecimiento y decrecimiento.</u>

$$y' = \frac{3x^2\left(x^2+1\right) - x^3 \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \underline{\frac{x^2\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^2} = y'}$$

$$\underline{\underline{y' > 0,\ \ \forall x \in R \ \Rightarrow \ La \ \ curva \ \ es \ \ monótona \ \ creciente}}$$

Lógicamente no puede tener máximos o mínimos relativos.

Veamos si tiene puntos de inflexión:

$$y'' = \frac{\left(4x^3 + 6x\right) \cdot \left(x^2+1\right)^2 - x^2\left(x^2+3\right) \cdot 2\left(x^2+1\right) \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^4} =$$

$$= \frac{\left(4x^3 + 6x\right) \cdot \left(x^2+1\right) - x^2\left(x^2+3\right) \cdot 2 \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{4x^5 + 4x^3 + 6x^3 + 6x - 4x^5 - 12x^3}{\left(x^2+1\right)^3} =$$

$$= \frac{-2x^3 + 6x}{\left(x^2+1\right)^3} = \underline{\frac{-2x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3} = y''}$$

$$y''' = \frac{\left(-6x^2 + 6\right) \cdot \left(x^2+1\right)^3 - 2x\left(x^2-3\right) \cdot 3\left(x^2+1\right)^2 \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^6} =$$

$$= \frac{\left(-6x^2 + 6\right) \cdot \left(x^2+1\right) - 2x\left(x^2-3\right) \cdot 3 \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^4} = \frac{-6x^4 - 6x^2 + 6x^2 + 6 - 12x^4 + 36x^3}{\left(x^2+1\right)^4} =$$

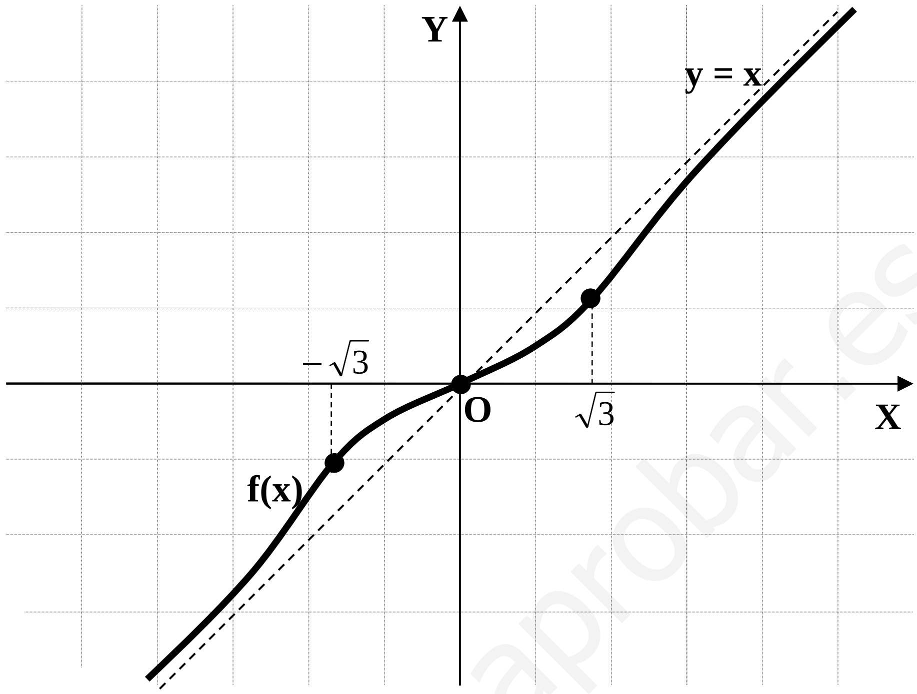
$$= \frac{-18x^4 + 36x^3 + 6}{\left(x^2+1\right)^4} = \underline{\frac{-6\left(3x^4 - 6x^3 - 1\right)}{\left(x^2+1\right)^4} = y'''}$$

$$y'' = 0 \ \Rightarrow \ \begin{Bmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = \sqrt{3} \\ x_3 = -\sqrt{3} \end{Bmatrix} \ ;; \ y'''(0) \neq 0 \ \Rightarrow \ \underline{\underline{P.I.(0,\ 0)}} \ ;; \ y'''\left(\sqrt{3}\right) \neq 0 \ \Rightarrow \ \underline{\underline{P.I.\left(\sqrt{3},\ \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)}}$$

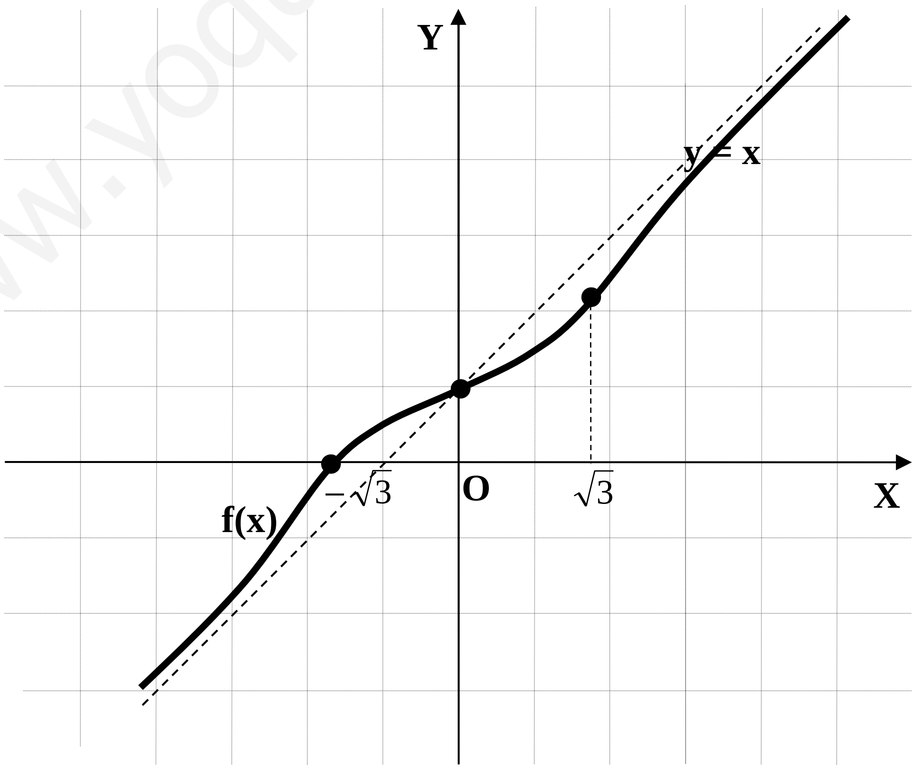
Por simetría: $\underline{\underline{P.I.\left(-\sqrt{3},\ -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)}}$

d)

Representación aproximada de la curva.



La gráfica de la función $y = \frac{x^3}{x^2+1} + 1$ es la que se indica a continuación:



****

2º) De entre todos los números reales positivos x, y, tales que x + y = 10, encontrar aquellos para que el producto $P = x^2\ y$ es máximo.

$$x + y = 10\ ;;\ \underline{y = 10 - x}$$

$$P = x^2 \cdot y = x^2 \cdot (10 - x) = \underline{10x^2 - x^3 = P}$$

$$P' = 20x - 3x^2\ \ ;;\ \ P' = 0 \Rightarrow 20x - 3x^2 = 0\ ;;\ x(20 - 3x) = 0\ \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1 = 0} \\ \underline{x_2 = \frac{20}{3}} \end{cases}$$

La solución x = 0 nos daría cero como producto, que es un mínimo.

$$y = 10 - x = 10 - \frac{20}{3} = \frac{30 - 20}{3} = \underline{\frac{10}{3} = y}$$

$$\underline{\underline{Los\ \ números\ \ reales\ \ pedidos\ \ son\ \ x = \frac{20}{3}\ \ e\ \ y = \frac{10}{3}}}$$

Justificación de que se trata de un máximo:

$$P'' = 20 - 6x\ \ ;;\ P''_{\left(\frac{20}{3}\right)} = 20 - 6 \cdot \frac{20}{3} = 20 - 40 = -20 < 0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Máximo,\ \ c.q.j.}}$$

****

BLOQUE 4

1º) a) Se consideran, en el plano, las curvas de ecuaciones $y=-\frac{x^2}{4}+x$ e $y=\frac{x^2}{4}-x$. Dibujar estas curvas.

b) Encontrar el área del recinto determinado por dichas curvas.

----

a)

$$y=-\frac{x^2}{4}+x \;;;\; y'=-\frac{1}{2}x+1 \;;;\; y'=0 \Rightarrow \underline{x=2} \;;;\; y''=-\frac{1}{2}>0 \Rightarrow \underline{Máximo: P(2,\ 1)}$$

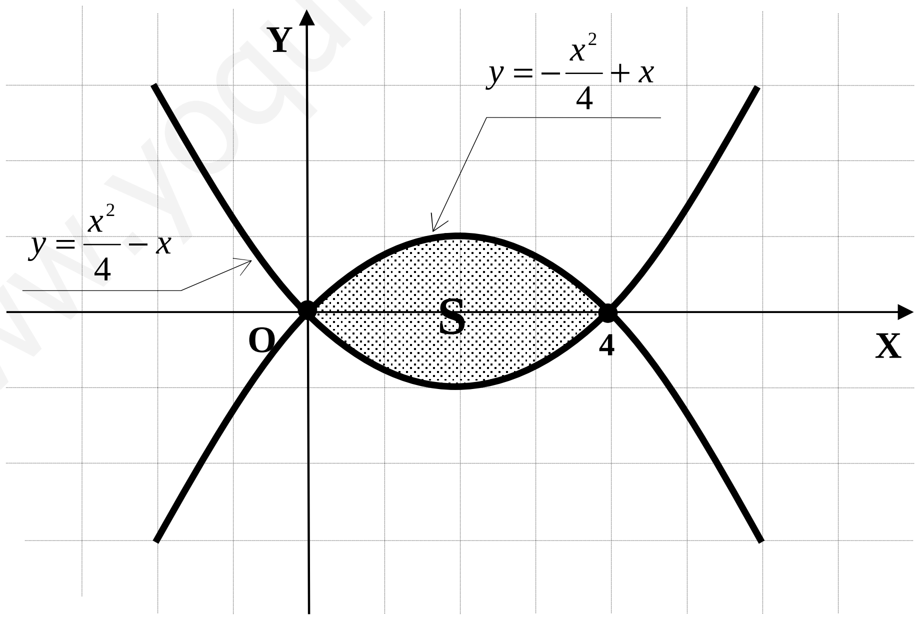
$$y=\frac{x^2}{4}-x \;;;\; y'=\frac{1}{2}x-1 \;;;\; y'=0 \Rightarrow \underline{x=2} \;;;\; y''=\frac{1}{2}>0 \Rightarrow \underline{Mínimo: Q(2,\ -1)}$$

Los puntos de corte de las curvas son:

$$-\frac{x^2}{4}+x=\frac{x^2}{4}-x \;;;\; -x^2+4x=x^2-4x \;;;\; 2x^2-8x=0 \;;;\; 2x(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1=0} \\ \underline{x_2=4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{A(0,\ 0)} \;;;\; \underline{B(4,\ 0)}$$

La representación gráfica, aproximada, que se deduce de lo anterior, es la siguiente:



b)

$$S=\int_0^4\left[\left(-\frac{x^2}{4}+x\right)-\left(\frac{x^2}{4}-x\right)\right]\cdot dx=\left[x^2-\frac{x^3}{6}\right]_0^4=\left(16-\frac{64}{6}\right)-0=\frac{48-32}{6}=\underline{\underline{\frac{8}{3}\ u^2=S}}$$

****

2º) Calcular el valor de la integral: $I=\int_0^1 x\cdot e^x\cdot dx$.

$$I=\int_0^1 x\cdot e^x\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} u=x\rightarrow du=dx \\ e^x\cdot dx=dv\rightarrow v=e^x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[x\cdot e^x-\int e^x\cdot dx\right]_0^1=\left[x\cdot e^x-e^x\right]_0^1=$$

$$=\left[e^x(x-1)\right]_0^1=e^1(1-1)-e^0(0-1)=e\cdot 0+1=\underline{\underline{1=I}}$$

****