PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

JUNIO – 2006

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Observaciones importantes: El alumno deberá responder a una sola de las dos cuestiones de cada uno de los bloques. La puntuación de las dos cuestiones de cada bloque es la misma y se indica en la cabecera del bloque.

BLOQUE 1

1º) a) Enuncie el Teorema de Rouché-Fröbenius.

b) Estudie, según los valores del parámetro a, el sistema de ecuaciones lineales siguiente: $\left.\begin{array}{r} ax+ay=a \\ x-y+az=a \\ x+2y+3z=a \end{array}\right\}$.

----

a)

El Teorema de Rouché-Fröbenius puede enunciarse del modo siguiente:

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones con n incógnitas tenga solución es que coincida el rango de la matriz de los coeficientes con el rango de la matriz ampliada con los términos independientes.

Si el rango es igual al número de incógnitas el sistema es compatible determinado.

Si el rango es menor que el número de incógnitas el sistema es compatible indeterminado.

En el caso particular de un sistema homogéneo, la condición necesaria y suficiente para que un sistema sea compatible es que el rango de la matriz de los coeficientes sea menor que el número de incógnitas. La condición necesaria y suficiente para que un sistema de n ecuaciones homogéneas con n incógnitas sea compatible es que el determinante de la matriz de los coeficientes sea nulo.

b)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} a & a & 0 & a \\ 1 & -1 & a & a \\ 1 & 2 & 3 & a \end{pmatrix}.$$

$$|M|=\begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-3a+a^2-2a^2-3a=-a^2-6a=-6a(a+1)=0 \;\Rightarrow\; \underline{a_1=0} \;;;\; \underline{a_2=-1}$$

$$\underline{\underline{Para \;\begin{cases} a\neq 0 \\ a\neq -1 \end{cases} \Rightarrow Rango\, M = Rango\; M'=3=n^o \;\, incógnitas \Rightarrow Compatible \;\; Deter\min ado}}$$

$$Para \;\; a=0 \;\Rightarrow\; M'=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \underline{Rango \;\; M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; a=0 \;\Rightarrow\; Rango\, M = Rango \;\, M'=2<n^o \;\, incógnitas \Rightarrow Compatible \;\; In\det er\min ado}}$$

$$Para \;\; a=-1 \;\Rightarrow\; M'=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; Rango \;\; M' \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1,\; C_2,\; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-1-2+1-1-2-1=-6\neq 0 \;\Rightarrow\; \underline{Rango \;\; M'=3}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; a=-1 \;\Rightarrow\; Rango\, M \neq Rango \;\, M' \;\Rightarrow\; Incompatible}}$$

****

2º) a) Estudie si los vectores : $\overrightarrow{v_1}=(a,\ -a,\ 1),\ \overrightarrow{v_2}=(2a,\ 1,\ 1),\ \overrightarrow{v_3}=(1,\ -1,\ -1)$ son linealmente independientes en función del valor del parámetro a.

b) Cuando sean linealmente dependientes, escribir, si es posible, $\overrightarrow{v_3}$ como combinación lineal de $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$.

----

a)

Tres vectores son linealmente independientes si el rango del determinante de la matriz que determinan es tres, es decir: su determinante tiene que ser distinto de cero.

$$Rngo\ \left\{\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{v_3}\right\}\Rightarrow\begin{vmatrix} a & -a & 1 \\ 2a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-a-2a-a-1+a-2a^2=-2a^2-3a-1=0\ ;;$$

$$2a^2+3a+1=0\ ;;\ a=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{1}}{4}=\frac{-3\pm 1}{4}\Rightarrow\underline{a_1=-1}\ ;;\ \underline{a_2=-\frac{1}{2}}$$

$$\underline{\underline{Los\ \ vectores\ \ \overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{v_3}\ \ son\ \ linealmente\ \ independientes\ \ \forall a\in R-\left\{-1,\ -\frac{1}{2}\right\}}}$$

b)

$$\underline{Para\ \ a=-1}\Rightarrow\overrightarrow{v_1}=(-1,\ 1,\ 1),\ \overrightarrow{v_2}=(-2,\ 1,\ 1),\ \overrightarrow{v_3}=(1,\ -1,\ -1)$$

$$\overrightarrow{v_3}=\alpha\cdot\overrightarrow{v_1}+\beta\cdot\overrightarrow{v_2}\Rightarrow(1,-1,-1)=\alpha\cdot(-1,\ 1,\ 1)+\beta\cdot(-2,\ 1,\ 1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{r}1=-\alpha-2\beta\\ -1=\ \alpha+\beta\\ -1=\alpha+\beta\end{array}\right\}\left.\begin{array}{r}1=-\alpha-2\beta\\ \\ -1=\alpha+\beta\end{array}\right\}\Rightarrow\ 0=-\beta\ ;;\ \underline{\beta=0}\ ;;\ \underline{\alpha=-1}$$

$$\underline{\underline{\overrightarrow{v_3}=-\overrightarrow{v_1}+0\cdot\overrightarrow{v_2}}}$$

$$\underline{Para\ \ a=-\frac{1}{2}}\Rightarrow\overrightarrow{v_1}=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right),\ \overrightarrow{v_2}=(-1,\ 1,\ 1),\ \overrightarrow{v_3}=(1,\ -1,\ -1)$$

$$\overrightarrow{v_3}=\alpha\cdot\overrightarrow{v_1}+\beta\cdot\overrightarrow{v_2}\Rightarrow(1,\ -1,\ -1)=\alpha\cdot\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right)+\beta\cdot(-1,\ 1,\ 1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 1=-\frac{1}{2}\alpha-\beta \\ -1=\ \frac{1}{2}\alpha+\beta \\ -1=\alpha+\beta \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 1=-\frac{1}{2}\alpha-\beta \\ \\ -1=\alpha+\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \ 0=\frac{1}{2}\alpha \ ;; \ \underline{\alpha=0} \ ;; \ \underline{\beta=-1}$$

$$\underline{\underline{\overrightarrow{v_3} = 0 \cdot \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}}}$$

****

BLOQUE 2

1º) Las trayectorias de dos aviones vienen dadas por las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases}$.

a) Estudiar si las trayectorias se cortan, se cruzan o son coincidentes.

b) Calcular la distancia mínima entre ambas trayectorias.

----

a)

Las trayectorias son las rectas respectivas, por tanto su estudio es equivalente al estudio de la situación de las rectas.

Se realiza el estudio por los vectores directores de las rectas.

Un punto y un vector de cada una de las rectas son:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \underline{\overrightarrow{u} = (1,\ -1,\ 2)} \\ \\ \underline{A(1,\ 1,\ 1)} \end{array} \right\} \ y \ \ r_2 \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \underline{\overrightarrow{v} = (-1,\ 1,\ 0)} \\ \\ \underline{B(1,\ 0,\ 2)} \end{array} \right\}$$

Los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son linealmente independientes: $\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1} \neq \frac{2}{0}$.

Esto significa que las rectas se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso determinamos el vector $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ 0,\ 2) - (1,\ 1,\ 1) = (0,\ -1,\ 1)$.

Si el rango de los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ es dos, entonces son coplanarios y las rectas se cortan; si el rango es tres las rectas se cruzan. Veamos:

$$Rango\ \left\{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 - 1 = 2 \neq 0$$

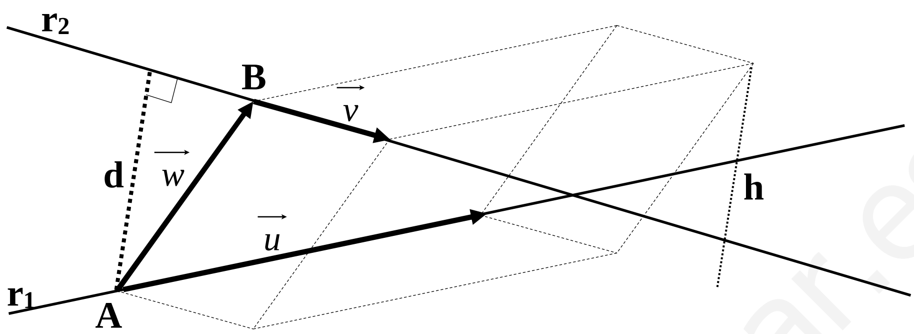
$$\underline{\underline{Rango\ \left\{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\right\} = 3\ \ \Rightarrow\ Las\ \ trayectorias\ \ se\ \ cruzan}}$$

b)

La distancia mínima de las trayectorias es equivalente a la distancia mínima entre las rectas.

Se entiende como distancia entre dos rectas que se cruzan, a la menor distancia entre ambas.

Para una mejor comprensión, hacemos un esquema de la situación.



El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observemos que la altura h es igual a la distancia pedida d entre ambas rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\right) = \left|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right| \cdot h = \left|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right| \cdot d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\left|\overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right|}$$

$$d(r_1,\ r_2) = \frac{\left|\overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right|} = \frac{\left\|\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix}\right\|}{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{matrix}\right\|} = \frac{2}{\left|-2j + k - k - 2i\right|} = \frac{2}{\left|-2i - 2j\right|} = \frac{1}{\left|-i - j\right|} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+1+0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2} = d(r_1,\ r_2)}$$

$$\underline{\underline{La\ \ distancia\ \ mínima\ \ entre\ \ las\ \ trayectorias\ \ es\ \ de\ \ \frac{\sqrt{2}}{2}\ \ unidades.}}$$

****

2º) La trayectoria de un proyectil viene dada por la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$.

a) Estudie si el proyectil impactará con la superficie determinada por el plano de ecuación $\pi \equiv 3x + y - z = 0$.

b) Calcule el punto de impacto y la distancia recorrida por el proyectil desde el punto inicial P(2, 3, 1) hasta el punto de impacto.

----

a)

La recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$ no está contenida en el plano $\pi \equiv 3x + y - z = 0$, ya que si un plano contiene a una recta, contiene a todos sus puntos, y el punto $P(2,\ 3,\ 1) \in r$ no pertenece al plano ya que no satisface su ecuación.

El proyectil impactará en la superficie del plano π si la recta r corta al plano en un punto. Para ello, el vector director de la recta, $\overrightarrow{v} = (-1,\ 1,\ 2)$ y el vector normal al plano, $\overrightarrow{n} = (3,\ 1,\ -1)$ tienen que ser linealmente independientes:

$$\frac{-1}{3} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{2}{-1} \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v}\ \ y\ \ \overrightarrow{n}\ \ son\ \ linealmente\ \ independientes.}$$

<u>El proyectil impacta en el plano.</u>

b)

El punto de impacto del proyectil en el plano π es su intersección con la recta r.

El punto Q de intersección se obtiene sustituyendo en el plano los diferentes valores de las incógnitas de la recta:

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \\ \pi \equiv 3x + y - z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 3(2 - \lambda) + (3 + \lambda) - (1 + 2\lambda) = 0 \ ;;\ 6 - 3\lambda + 3 + \lambda - 1 - 2\lambda = 0 \ ;;$$

$$8 - 4\lambda = 0 \ ;;\ 2 - \lambda = 0 \ ;;\ \underline{\lambda = 2} \ \Rightarrow \left. \begin{cases} x = 2 - 2 = 0 \\ y = 3 + 2 = 5 \\ z = 1 + 2 \cdot 2 = 5 \end{cases} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{Q(0,\ 5,\ 5)}}$$

La distancia recorrida por el proyectil es igual al módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (0,\ 5,\ 5) - (2,\ 3,\ 1) = (-2,\ 2,\ 4).$$

$$d = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24} = \underline{2\sqrt{6} = d}$$

$\underline{La\ \ distancia\ \ recorrida\ \ por\ \ el\ \ proyectil\ \ es\ \ de\ \ 2\sqrt{6}\ \ unidades.}$

****

BLOQUE 3

1º) Dada la función: $y = \frac{x}{x^2 - 1}$, se pide:

a) Dominio de definición y corte con los ejes.

b) Intervalos en los que es positiva y en los que es negativa.

c) Asíntotas.

d) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

e) Representación aproximada de la curva.

----

a)

El dominio de una función racional es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

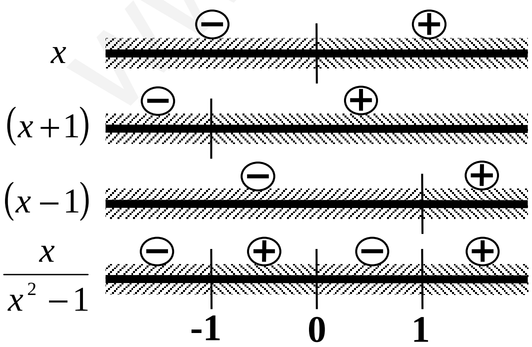
$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{D(f) \Rightarrow R - \{-1,\ 1\}}}$$

La función pasa por el origen de coordenadas: f(0) = 0. El único punto de corte con los ejes es el origen O(0, 0).

b)

Para estudiar los intervalos de ordenadas positivas y negativas tenemos en cuenta que la función se puede expresar de la forma $y = \frac{x}{(x+1)(x-1)}$.

Las ordenadas serán positivas o negativas, cuando lo sea la fracción $\frac{x}{(x+1)(x-1)}$.



$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{y > 0 \Rightarrow (-1,\ 0) \cup (1,\ +\infty)}} \\ \underline{\underline{y < 0 \Rightarrow (-\infty,\ -1) \cup (0,\ 1)}} \end{cases}$$

c)

Las asíntotas de la función son las siguientes:

Horizontales: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$y = k = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \underline{\underline{0 = y}} \quad (Eje \;\; X)$$

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$$x^2 - 1 = 0 \;\; ;; \;\; x^2 = 1 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{x_1 = 1}} \;\; ;; \;\; \underline{\underline{x_2 = -1}}$$

Oblicuas: No tiene.

(Para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador).

c)

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, derivamos:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 - 1) - x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} = \underline{\frac{-(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} = f'(x)}$$

Como el denominador de la derivada es siempre positivo y el denominador es siempre negativo, la derivada es negativa para cualquier valor real de x.

$$\underline{\underline{f(x) \;\; es \;\; decreciente \;\; en \;\; su \;\; do\min io}}$$

La anterior implica que la función no tiene máximos y mínimos relativos.

Para estudiar los puntos de inflexión determinamos la segunda derivada:

$$f''(x) = -\frac{2x \cdot (x^2 - 1)^2 - (x^2 + 1) \cdot 2 \cdot (x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^4} = -\frac{2x^3 - 2x - 4x^3 - 4x}{(x^2 - 1)^3} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3} =$$

$$= \underline{\frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} = f''(x)}$$

$$f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 4)^3} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{x = 0}$$

La condición anterior es necesaria, pero no suficiente para asegurar que existe el punto de inflexión; es necesario que no se anule la tercera derivada para ese valor:

$$f'''(x)=\frac{(6x^2+6)\cdot(x^2-1)^3-2x(x^2+3)\cdot 3\cdot(x^2-1)^2\cdot 2x}{(x^2-1)^6}=$$

$$=\frac{(6x^2+6)\cdot(x^2-1)-12x^2(x^2+3)}{(x^2-1)^4}=\frac{6x^4-6x^2+6x^2-6-12x^4-36x^2}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{-6x^4-36x^2-6}{(x^2-1)^4}=\underline{\frac{-6(x^4+6x^2+1)}{(x^2-1)^4}=f'''(x)}$$

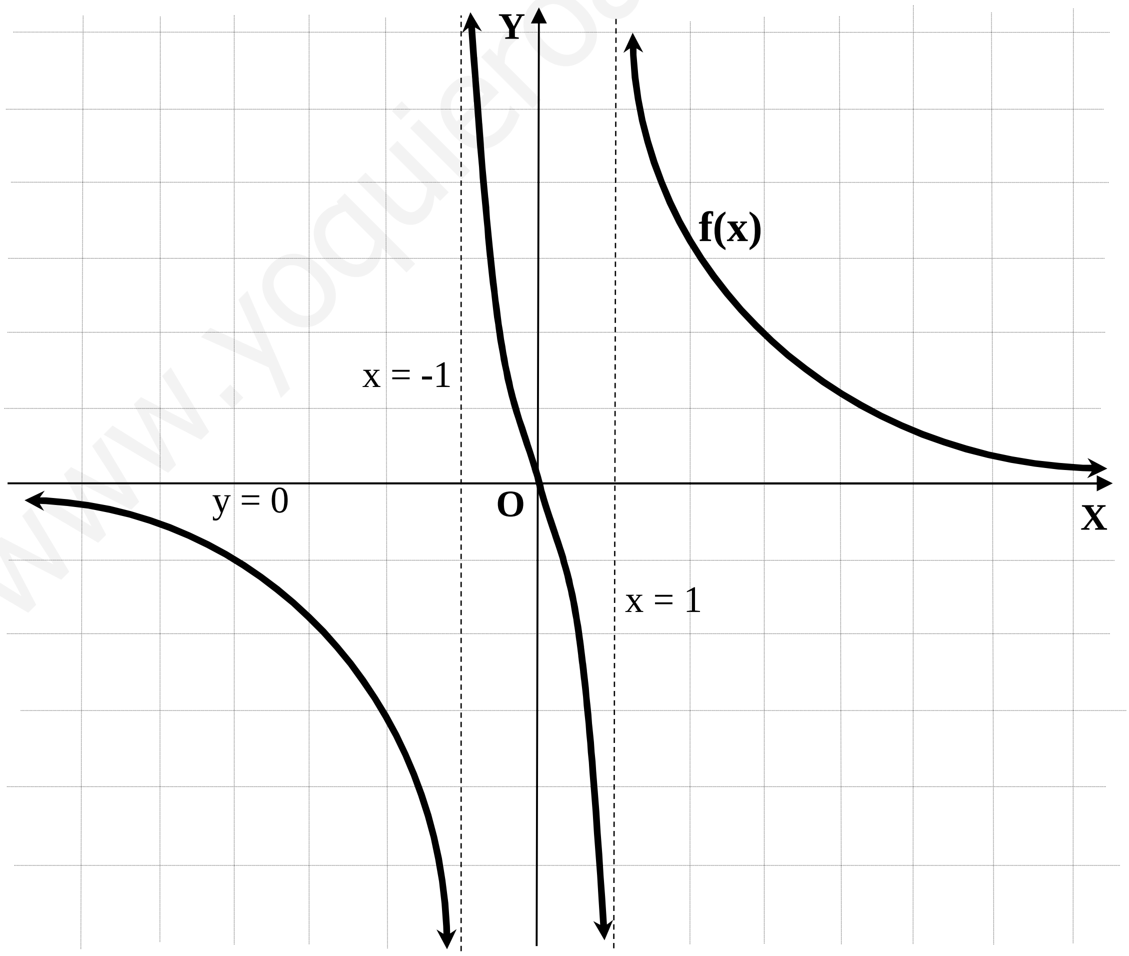
$$f'''(0)=\frac{-6(+1)}{(-4)^4}=-\frac{6}{256}\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Punto\ de\ \inf lexión\ en\ O(0,\ 0)}}$$

Para estudiar la concavidad de la función estudiamos la segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}\ \Rightarrow\ \begin{cases}\underline{\underline{(-\infty,\ -1)\cup(0,\ 1)\to f''(x)<0\ \Rightarrow\ Convexa\ \ (\cap)}}\\ \underline{\underline{(-1,\ 0)\cup(1,\ +\infty)\to f''(x)>0\ \Rightarrow\ Cáncava\ \ (\cup)}}\end{cases}$$

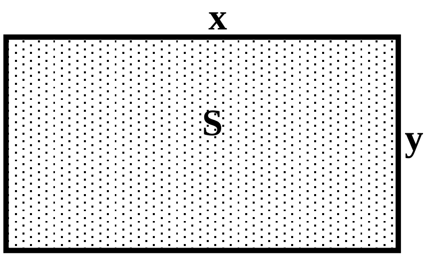
d)

La represtación gráfica aproximada es la que sigue.



****

2º) Construir un triángulo rectángulo de perímetro 3 m con área máxima.



Sea el rectángulo de la figura, cuyo perímetro dado es 3 m.

$$3 = 2x + 2y \;\;;;\;\; \underline{y = \frac{3-2x}{2}}$$

El valor del área S es:

$$S = x \cdot y = x \cdot \frac{3-2x}{2} = \underline{\frac{1}{2}\left(3x - 2x^2\right) = S}$$

Para que el área sea máxima, su derivada tiene que ser cero:

$$S' = \frac{1}{2}(3-4x) = 0 \;\Rightarrow\; 3 - 4x = 0 \;\;;;\;\; \underline{x = \frac{3}{4}} \;\;;;\;\; y = \frac{3-2x}{2} = \frac{3-\frac{3}{2}}{2} = \underline{\frac{3}{4} = y}$$

Como puede observarse, se trata de un cuadrado.

Justificación de que se trata de un máximo:

$$S'' = \frac{1}{2} \cdot (-4) = -2 < 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\mathit{Máximo},\;\; c.q.j.}}$$

<u>Se trata de un cuadrado de lado 0’75 metros</u>

****

BLOQUE 4

1º) a) Enuncie el Teorema Fundamental del Cálculo.

b) Calcule la integral siguiente: $I = \int_0^1 (x^2 - 1) \cdot e^{-2x} \cdot dx$.

----

a)

El enunciado del Teorema Fundamental del Cálculo Integral para funciones continuas es el siguiente: "Si f(x) es continua en el intervalo [a, b], su función integral asociada F(x) es derivable en dicho intervalo, siendo su derivada f(x), $\forall x \in [a,\ b]$ y se expresa de la forma $F(x) = \int_a^x f(x) \cdot dx$".

Aunque no se pide, vamos a demostrar el teorema:

De la definición de F(x) se deduce que:

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx = \int_a^x f(x)dx + \int_x^{x+h} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx = \int_x^{x+h} f(x)dx$$

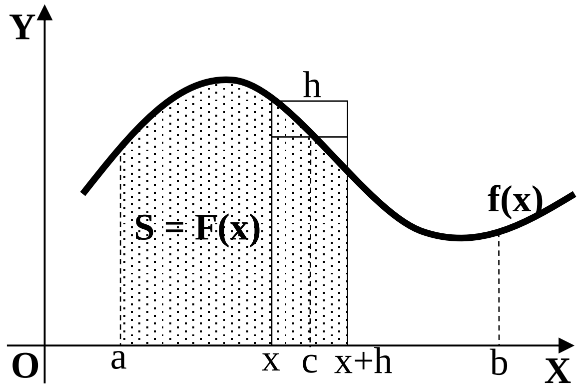
Como la función f(x) es continua en [a, b], por el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral, existe un c perteneciente al intervalo $(x,\ x+h)$, tal que:

$\int_x^{x+h} f(x)dx = f(c) \cdot (x+h-x) = f(c) \cdot h$, por lo tanto se puede poner:

$F(x+h) - F(x) = f(c) \cdot h$, $(con\ \ h \neq 0,\ aunque\ \ tiende\ \ a\ \ cero)$ o también:

$F(x+h) - F(x) = f(c) \cdot h \ \Rightarrow\ f(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$. Tomando límites cuando $h \to 0$:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(x)dx \right] = \lim_{h \to 0} \left[\frac{1}{h} \cdot f(c) \cdot h \right] = \lim_{h \to 0} f(c)$$



Como c perteneciente al intervalo $(x,\ x+h)$, $\lim_{h \to 0} f(c) = f(x)$, por ser f(x) continua en [a, b], por lo cual podemos, finalmente, decir que:

$$\underline{\underline{F'(x) = f(x),\ c.q.d.}}$$

La interpretación gráfica es la que indica la figura:

b)

En primer lugar resolvemos la integral indefinida $A=\int\left(x^2-1\right)\cdot e^{-2x}\cdot dx$ por el método de "por partes", cuya fórmula es $\int u\ \cdot dv=u\ \cdot v-\int v\ \cdot du$.

$$A=\int\left(x^2-1\right)\cdot e^{-2x}\cdot dx\quad\Rightarrow\quad\left\{\begin{array}{l} u=x^2-1\rightarrow du=2x\,dx \\ e^{-2x}\cdot dx=dv\rightarrow v=-\frac{1}{2}e^{-2x}\qquad (*)\end{array}\right\}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad A=\left(x^2-1\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)-\int-\frac{1}{2}e^{-2x}\cdot 2x\,dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x^2-1\right)+\int e^{-2x}\cdot x\,dx=$$

$$=\underline{-\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x^2-1\right)+A_1=A}$$

$$A_1=\int x\ \cdot e^{-2x}\cdot dx\quad\Rightarrow\quad\left\{\begin{array}{c} u=x\rightarrow du=dx \\ e^{-2x}\cdot dx=dv\rightarrow v=-\frac{1}{2}e^{-2x}\end{array}\right\}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_1=x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)-\int-\frac{1}{2}e^{-2x}\,dx=-\frac{1}{2}x\,e^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx=-\frac{1}{2}x\,e^{-2x}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)+K=$$

$$=-\frac{1}{2}x\,e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+K=\underline{-\frac{1}{4}e^{-2x}\left(2x+1\right)+K=A_1}$$

Sustituyendo el valor de A_1 en la expresión de A, queda:

$$A=-\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x^2-1\right)-\frac{1}{4}e^{-2x}\left(2x+1\right)+K=-\frac{1}{4}e^{-2x}\left[2\left(x^2-1\right)+\left(2x+1\right)\right]+K=$$

$$=-\frac{1}{4}e^{-2x}\left(2x^2+2x\right)+K=\underline{-\frac{x}{2}e^{-2x}\left(x+1\right)+K=A}$$

Teniendo en cuenta A, el valor de la integral pedida $I=\int_0^1\left(x^2-1\right)\cdot e^{-2x}\cdot dx$ es el siguiente:

$$I=\left[-\frac{x}{2}e^{-2x}\left(x+1\right)\right]_0^1=\left[-\frac{1}{2}e^{-2}\left(1+1\right)\right]-\left[-\frac{0}{2}e^{0}\left(0+1\right)\right]=-e^{-2}-0=\underline{\underline{-\frac{1}{e^2}=I}}$$

****

2º) Calcule el área determinada por la función $f(x)=\frac{x^2}{x^2+4x+3}$ y las rectas $y=0$, $x=0$ y $x=3$.

Para valores positivos de x las ordenadas de la función son positivas, por lo cual, el área pedida es el valor de la siguiente integral definida: $S=\int_0^3 \frac{x^2}{x^2+4x+3}\cdot dx$.

Teniendo en cuenta que $\frac{x^2}{x^2+4x+3}=\frac{x^2+4x+3-4x-3}{x^2+4x+3}=1+\frac{-4x-3}{x^2+4x+3}$, el valor del área es:

$$S=\int_0^3 \frac{x^2}{x^2+4x+3}\cdot dx=\int_0^3 dx+\int_0^3 \frac{-4x-3}{x^2+4x+3}\cdot dx=\underline{[x]_0^3+I_1=S} \qquad (*)$$

$$x^2+4x+3=0\ ;;\ x=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{-4\pm 2}{2}\Rightarrow x_1=-1\ ;;\ x_2=-3\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \underline{x^2+4x+3=(x+1)(x+3)}$$

La resolución de la integral indefinida $\int \frac{-4x-3}{x^2+4x+3}\cdot dx$ es como sigue:

$$\int \frac{-4x-3}{x^2+4x+3}\cdot dx=\int \frac{-4x-3}{(x+1)(x+3)}\cdot dx\Rightarrow \frac{-4x-3}{(x+1)(x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3}=\frac{Ax+3A+Bx+B}{(x+1)(x+3)}=$$

$$=\frac{(A+B)x+(3A+B)}{x^2+4x+3}\ \Rightarrow\ \begin{cases}A+B=-4\\3A+B=-3\end{cases}\ \begin{cases}-A-B=4\\3A+B=-3\end{cases}\ \Rightarrow\ \underline{A=\frac{1}{2}}\ ;;\ \underline{B=-\frac{9}{2}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \int \frac{-4x-3}{x^2+4x+3}\cdot dx=\int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{x+3}\right)\cdot dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}\cdot dx-\frac{9}{2}\int\frac{1}{x+3}\cdot dx=$$

$$=\underline{\frac{1}{2}\cdot L|x+1|-\frac{9}{2}\cdot L|x+3|}$$

Sustituyendo el valor obtenido en la expresión (*) queda:

$$S=[x]_0^3+\left[\frac{1}{2}\cdot L|x+1|-\frac{9}{2}\cdot L|x+3|\right]_0^3=$$

$$=3-0+\left[\left(\frac{1}{2}\cdot L|3+1|-\frac{9}{2}\cdot L|3+3|\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot L|0+1|-\frac{9}{2}\cdot L|0+3|\right)\right]=$$

$$= 3 + \frac{1}{2} \cdot L4 - \frac{9}{2} \cdot L6 - \frac{1}{2} \cdot L1 + \frac{9}{2} \cdot L3 = 3 + \frac{1}{2} \cdot 2L2 - \frac{9}{2} \cdot L6 - 0 + \frac{9}{2} \cdot L3 =$$

$$= 3 + L2 - \frac{9}{2} L6 + \frac{9}{2} L\ 3 \cong 3 + 0'6931 - 4'5 \cdot 1'7916 + 4'5 \cdot 1'0986 =$$

$$= 3 + 0'6931 - 8'0629 + 4'9438 = 8'6339 - 8'0629 = \underline{\underline{0'574\ u^2 = S}}$$

****