PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

SEPTIEMBRE – 2011 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Observaciones importantes: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A

1º) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 6$, calcule, sin utilizar la regla de Sarrus, el valor del determinante $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ \frac{x}{2}+3a & \frac{y}{2}+3b & \frac{z}{2}+3c \end{vmatrix}$, indicando en cada paso qué propiedad (o propiedades) de lo0s determinantes se está utilizando.

Se van a utilizar las siguientes propiedades:

.- Si un determinante tiene dos filas iguales o proporcionales, su valor es cero.

.- Si todos los elementos de una fila o columna se descomponen en dos o más sumandos, entonces el determinante es igual a la suma de los determinantes que tienen en esa fila o columna el primero y segundo sumandos, respectivamente, y en las demás los mismos elementos que el determinante inicial.

.- Si los elementos de una línea (fila o columna) se multiplican o dividen por un número, el valor del determinante queda multiplicado o dividido por dicho número.

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ \frac{x}{2}+3a & \frac{y}{2}+3b & \frac{z}{2}+3c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ \frac{x}{2} & \frac{y}{2} & \frac{z}{2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ \frac{x}{2} & \frac{y}{2} & \frac{z}{2} \end{vmatrix} + 0 =$$

$$=\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ \frac{x}{2} & \frac{y}{2} & \frac{z}{2} \end{vmatrix} = 5\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = \frac{5}{2}\cdot 6 = 15.$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ \frac{x}{2}+3a & \frac{y}{2}+3b & \frac{z}{2}+3c \end{vmatrix} = 15$$

****

2º) Determine el punto de la recta $r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z+4}{3}$ que equidista del origen de coordenadas y del punto A(3, 2, 1).

Este ejercicio se puede resolver de diversas formas. La que vamos a emplear consiste en hallar el plano π bisector del segmento de extremos el origen de coordenadas y el punto dado; la intersección del plano π con la recta r es el punto pedido.

El punto medio del segmento de extremos O(0, 0, 0) y A(3, 2, 1) es $M\left(\frac{3}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}\right)$.

El vector que determinan los puntos O(0, 0, 0) y A(3, 2, 1) es $\overrightarrow{v} = (3,\ 2,\ 1)$.

El haz de planos perpendiculares al segmento $\overline{OA}$ tiene como vector normal al vector $\overrightarrow{v} = (3,\ 2,\ 1)$ y su expresión general es de la forma $\alpha \equiv 3x + 2y + z + D = 0$.

De todos los infinitos planos del haz anterior, el plano π que contiene al punto medio del segmento es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv 3x + 2y + z + D = 0 \\ M\left(\frac{3}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} + D = 0 \ ;;\ \frac{10}{2} + 2 + D = 0 \ ;;\ 7 + D = 0 \ ;;\ \underline{D = -7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\pi \equiv 3x + 2y + z - 7 = 0}.$$

La expresión de r dada por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z+4}{3} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x + 9 = 2y + 10 \\ 3x + 9 = 2z + 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 3x - 2z = -1 \end{cases}}.$$

El punto de corte de r y π es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 3x - 2z = -1 \end{cases} \\ \pi \equiv 3x + 2y + z - 7 = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 1 \\ 3x - 2z = -1 \\ 3x + 2y + z = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to \underline{y = \frac{3}{3}x - \frac{1}{2}} \\ \to \underline{z = \frac{3}{3}x + \frac{1}{2}} \end{array} \Rightarrow 3x + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 7 \ ;;$$

$$3x + 3x - 1 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 7 \ ;;\ 6x + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 8 \ ;;\ 12x + 3x + 1 = 16 \ ;;\ 15x = 15 \ ;;\ \underline{x = 1} \ ;;\ \underline{y = 1} \ ;;\ \underline{z = 2}.$$

<u>El punto de r que equidista del origen y del punto A(3, 2, 1) es P(1, 1, 2).</u>

****

3º) Dada la función $f(x)=x^3-6x^2+8x$:

a) Determine los puntos de la gráfica de f para los cuales la recta tangente es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante.

b) Determine si, para alguno de dichos puntos, la recta tangente a la gráfica coincide con la bisectriz del segundo cuadrante.

----

a)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su derivada en ese punto.

La pendiente de la bisectriz del segundo cuadrante es m = -1.

$$f'(x)=3x^2-12x+8 \Rightarrow f'(x)=m \Rightarrow 3x^2-12x+8=-1 \;;\; 3x^2-12x+9=0 \;;\; x^2-4x+3=0 \;;$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=2\pm 1 \Rightarrow \underline{x_1=1} \;;\; \underline{x_2=3}.$$

Los puntos de tangencia son los siguientes:

$$f(1)=1^3-6\cdot 1^2+8\cdot 1=1-6+8=3 \Rightarrow \underline{\underline{A(1,\ 1)}}.$$

$$f(3)=3^3-6\cdot 3^2+8\cdot 3=27-54+24=51-54=-3 \Rightarrow \underline{\underline{B(3,\ -3)}}.$$

b)

La bisectriz del segundo cuadrante es la recta y = -x y sus puntos tienen una expresión de la forma P(x, -x).

El punto B(3, -3) está contenido en la bisectriz del segundo cuadrante.

****

4º) a) Calcule la integral indefinida $I=\int \frac{sen\ x}{1+\cos^2 x}\cdot dx$.

b) Evalúe la integral definida $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen\ x}{1+\cos^2 x}\cdot dx$.

----

a)

$$I=\int \frac{sen\ x}{1+\cos^2 x}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} \cos x = t \\ -sen\ x\cdot dx = dt \\ sen\ x\cdot dx = dt \end{array}\right\} \Rightarrow I=-\int \frac{1}{1+t^2}\cdot dt = -arc\ \tan t + C =$$

$$= \underline{\underline{-arc\ tag\ (\cos x)+C=I}}\,.$$

b)

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen\ x}{1+\cos^2 x}\cdot dx = \left[-arc\ tag\ (\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[arc\ tag\ (\cos x)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{0} = arc\ tag\ (\cos 0) -$$

$$-arc\ tag\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) = arc\ tag\ 1 - arc\ tag\ 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\underline{\underline{I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen\ x}{1+\cos^2 x}\cdot dx = \frac{\pi}{2}}}$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Determine para qué valores del parámetro α la matriz $A=\begin{pmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{pmatrix}$ es regular.

b) Estudie el rango de la matriz A en los casos en que no sea regular.

----

a)

Una matriz regular es toda matriz cuadrada que tiene inversa. Para que una matriz tenga inversa es condición necesaria que su determinante se distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{vmatrix}=a^6+a^2+a^2-a^4-a^2-a^4=a^6-2a^4+a^2=a^2\left(a^4-2a^2+1\right)=$$

$$=a^2\left(a^2-1\right)=0\ \Rightarrow\ \underline{a_1=0}\ ;;\ \underline{a_2=-1}\ ;;\ \underline{a_3=1}.$$

$$\underline{\underline{A\ es\ regular\ \ \forall a\in R-\{-1,\ 0,\ 1\}}}$$

b)

Para α = 0 es $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Rango\ \ A=2}}.$

Para α = -1 es $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\{F_1=-F_2=-F_3\}\Rightarrow\ \underline{\underline{Rango\ \ A=1}}.$

Para α = 1 es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\{F_1=F_2=F_3\}\Rightarrow\ \underline{\underline{Rango\ \ A=1}}.$

****

2º) Considérense los puntos A(2, 0, 1) y B(2, 0, 3), y la recta $r \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{0}$. Determine los puntos C de la recta r para los cuales el área del triángulo de vértices ABC es 2. (Indicación: hay 2 puntos C que son solución del problema).

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente: $r \equiv \begin{cases} x = -1-\lambda \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$.

Los puntos de r tiene por expresión general $C(-1-\lambda,\ 0,\ 2)$.

Los puntos A, B y C determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (2,\ 0,\ 3) - (2,\ 0,\ 1) = (0,\ 0,\ 2)$.

$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (-1-\lambda,\ 0,\ 2) - (2,\ 0,\ 1) = (-3-\lambda,\ 0,\ 1)$.

Sabiendo que el área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que lo determinan:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \right| = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 2 \\ -3-\lambda & 0 & 1 \end{matrix} \right\| = 2\ ;;\ \frac{1}{2} \left| 2(-3-\lambda) j \right| = 2\ ;;\ \left| 0,\ -3-\lambda,\ 0 \right| = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| -3-\lambda \right| = 2 \Rightarrow \begin{cases} -3-\lambda = 2\ ;;\ 3+\lambda = -2 \rightarrow \lambda_1 = -5 \Rightarrow \underline{\underline{C_1(4,\ 0,\ 2)}} \\ \\ 3+\lambda = 2 \rightarrow \lambda_2 = -1 \Rightarrow \underline{\underline{C_2(0,\ 0,\ 2)}} \end{cases}.$$

****

3º) Dada la función $f(x) = x - x^3$:

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto A(1, 0).

b) Calcule los puntos de corte de dicha recta con la gráfica de f.

----

a)

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es igual que el valor de la derivada en ese punto.

$$f'(x) = 1 - 3x^2 \Rightarrow m = f'(1) = 1 - 3 \cdot 1^2 = 1 - 3 = \underline{-2 = m}.$$

La ecuación de una recta que pasa por un punto conocida la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Aplicando la fórmula anterior para el punto A(1, 0) y la pendiente m = -2:

$$y - 0 = -2 \cdot (x - 1) = -2x + 2.$$

$$\underline{\underline{La\ \ \tan gente\ \ a\ \ f(x) = x - x^3\ \ en\ \ A(1,\ 0)\ \ es\ \ t \equiv y = -2x + 2}}$$

b)

Los puntos de corte de la función con su tangente se obtienen igualando sus expresiones:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x - x^3 \\ y = -2x + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x - x^3 = -2x + 2\ ;;\ x^3 - 3x + 2 = 0$$. Resolviendo por Ruffini:

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	$\boxed{0}$
1		1	2	
	1	2	$\boxed{0}$	
-2		-2		
	1	$\boxed{0}$		

Las raíces diferentes son $x_1 = 1$ y $x_2 = -2$. Es evidente que la primera raíz corresponde al punto de tangencia A(1, 0). El punto de corte es el siguiente:

$$f(-2) = -2 - (-2)^3 = -2 + 8 = 6 \Rightarrow \underline{\underline{B(-2,\ 6)}}.$$

****

4º) a) Calcule la integral indefinida $I=\int x^2 \cdot e^x \cdot dx$.

b) Evalúe la integral definida $I=\int_0^1 x^2 \cdot e^x \cdot dx$.

----

a)

$$I=\int x^2 \cdot e^x \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u=x^2 \to du=2x\,dx \\ dv=e^x \cdot dx \to v=e^x \end{array}\right\} \Rightarrow I=x^2 \cdot e^x-\int e^x \cdot 2x \cdot dx=\underline{x^2 \cdot e^x-2I_1=I} \qquad (*)$$

$$I_1=\int x \cdot e^x \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} u=x \to du=dx \\ dv=e^x \cdot dx \to v=e^x \end{array}\right\} \Rightarrow I_1=x \cdot e^x-\int e^x \cdot dx=x \cdot e^x-e^x+C=$$

$$=\underline{e^x(x-1)+C=I_1}.$$

Sustituyendo el valor obtenido de I_1 en (*), resulta:

$$I=x^2 \cdot e^x-2I_1=x^2 \cdot e^x-2e^x(x-1)+C=\underline{\underline{e^x\left(x^2-2x+2\right)+C=I}}$$

b)

$$I=\int_0^1 x^2 \cdot e^x \cdot dx=\left[e^x\left(x^2-2x+2\right)\right]_0^1=\left[e^1\left(1^2-2\cdot 1+2\right)\right]-\left[e^0(0-0+2)\right]=e(1-2+2)-1\cdot 2=$$

$$=\underline{\underline{e-2=I}}.$$

****