PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

JUNIO – 2012

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Observaciones importantes: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A

1º) a) Discuta el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ x+ay+a^2z=-1 \\ ax+a^2y+a^3z=2 \end{array}\right\}$ en función del parámetro α.

b) Resuelva el sistema cuando sea compatible.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ a & a^2 & a^3 \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & a^2 & -1 \\ a & a^2 & a^3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Los rangos de M y M' en función del parámetro α son los siguientes:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ a & a^2 & a^3 \end{vmatrix}=a\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a & a^2 \end{vmatrix}=0 \;\; (dos \;\; filas \;\; iguales) \Rightarrow \underline{Rango \;\; M \le 2, \; \forall a \in R}$$

Vamos a estudiar ahora el rango de M'.

$$\{C_1,\; C_2,\; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & -1 \\ a & a^2 & 2 \end{vmatrix}=2a+2a^2-a-2a^2+a^2-2=a^2+a-2=0 \;;; \; a=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=$$

$$=\frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow \underline{x_1=-2} \;;; \; \underline{x_2=1}.$$

$$\{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a^2 & -1 \\ a & a^3 & 2 \end{vmatrix} = 2a^2 + 2a^3 - a - 2a^3 + a^3 - 2 = a^3 + 2a^2 - a - 2 = 0.$$

Resolviendo por Ruffini resultan las soluciones $\underline{x_1 = 1}$;; $\underline{x_2 = -1}$ y $x_3 = -2$.

$$\{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & a^2 & -1 \\ a^2 & a^3 & 2 \end{vmatrix} = 2a^2 + 2a^4 - a^2 - 2a^4 + a^3 - 2a = a^3 + a^2 - 2a =$$

$$= a\left(a^2 + a - 2\right) = 0 \Rightarrow \underline{a_1 = 0} \ ;;\ \underline{a_2 = 1} \ ;;\ \underline{a_3 = -2}.$$

Para α = 1 es $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Rango\ \ A = 1}$.

Para α = -2 es $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Rango\ \ A = 2}$.

De lo anterior se concluye lo siguiente:

$$\underline{\underline{Para\ \ a = -2 \Rightarrow Rango\ \ M = Rango\ \ M' = 2 < n^o\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ indeterminado}}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a \neq -2 \Rightarrow Rango\ \ M \neq Rango\ \ M' \Rightarrow Incompatible}}$$

b)

Resolvemos para α = -2, que el sistema es compatible indeterminado.

El sistema resulta $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ x - 2y + 4z = -1 \\ -2x + 4y - 8z = 2 \end{array}\right\}$, equivalente a $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ x - 2y + 4z = -1 \end{array}\right\}$.

Haciendo $z = \lambda$: $\left.\begin{array}{r} x + y = 2 - \lambda \\ x - 2y = -1 - 4\lambda \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} x + y = 2 - \lambda \\ -x + 2y = 1 + 4\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 3y = 3 + 3\lambda$;; $\underline{y = 1 + \lambda}$;;

$x + y = 2 - \lambda$;; $x + 1 + \lambda = 2 - \lambda$;; $\underline{x = 1 - 2\lambda}$.

$$\underline{\underline{Solución: \begin{Bmatrix} x = 1 - 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{Bmatrix},\ \forall \lambda \in R}}$$

****

2º) Considere la recta $r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1}$ y el plano $\pi \equiv x - 2y - z = 4$:

a) Calcule el ángulo que forman la recta r y el plano π.

b) Determine el plano γ que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

----

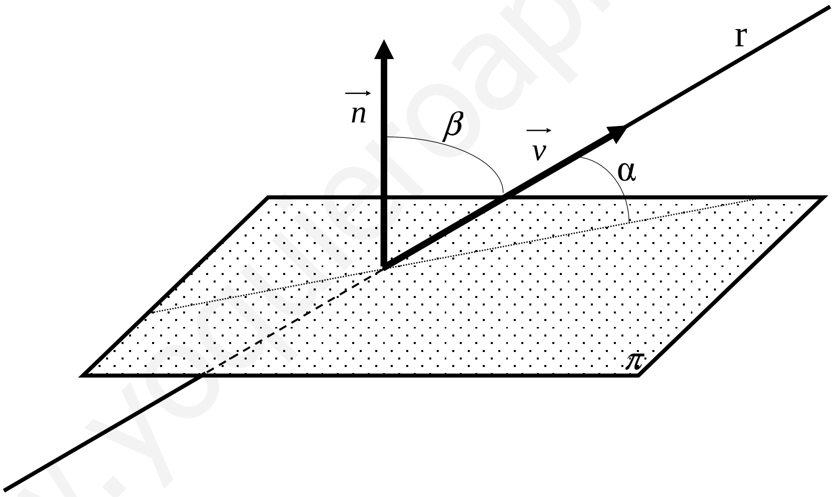
a)

El ángulo α que forman el plano π y la recta r es el complementario del ángulo que forman un vector $\overrightarrow{v}$ director de r y un vector $\overrightarrow{n}$, normal al plano π.

Sabiendo que el ángulo que forman dos vectores se deduce del concepto de producto escalar:

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}\right| \cdot \cos\beta \;\Rightarrow\; \cos\beta = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}\right|}.$$

Para facilitar la comprensión del ejercicio hacemos un esquema de la situación:



Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v} = (2,\ -1,\ 1)$ y el vector normal del plano π es $\overrightarrow{n} = (1,\ -2,\ -1)$.

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}\right|} = \frac{(2,\ -1,\ 1) \cdot (1,\ -2,\ -1)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{2+2-1}{\sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{1+4+1}} = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} =$$

$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \underline{\beta = 60^{\circ}} \;\Rightarrow\; \underline{\alpha = 30^{\circ}}.$$

<u>La recta r y el plano π forman un ángulo de 30º.</u>

b)

El plano γ pedido, por contener a r tiene como vector director al vector director de r, $\overrightarrow{v}=(2,\ -1,\ 1)$ y por ser perpendicular al plano π tiene como vector director al vector normal de π, $\overrightarrow{n}=(1,\ -2,\ -1)$.

Un punto de la recta r es P(-1, 1, 2).

La expresión general del plano γ es la siguiente:

$$\gamma(P;\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{n}) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ (x+1)+(y-1)-4(z-2)+(z-2)+2(x+1)+2(y-1)=0$$

$$3(x+1)+3(y-1)-3(z-2)=0\ ;;\ (x+1)+(y-1)-(z-2)=0\ ;;\ x+1+y-1-z+2=0.$$

$$\underline{\underline{\gamma \equiv x+y-z+2=0}}$$

****

3º) Considere la función dada por $f(x)=\begin{cases} 2x^2+ax+b & si \ \ x\leq 1 \\ L\,x-1 & si \ \ x>1 \end{cases}$. Determine los valores de los parámetros α y b sabiendo que f(x) cumple las siguientes propiedades:

a) f(x) es continua en todo R.

b) f(x) tiene un extremo relativo en el punto de abscisa x = 0.

Por ser continua en R tiene que cumplirse que los límites laterales para x = 1 tienen que ser iguales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2+ax+b\right)=\underline{2+a+b} \\ \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(L\,x-1\right)=0-1=\underline{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow 2+a+b=-1 \ ;; \ \underline{a+b=-3}. \quad (*)$$

Por tener un extremo relativo para x = 0 tiene que anularse su derivada para este valor:

$$f'(x)=\begin{cases} 4x+a & si \ \ x\leq 1 \\ \frac{1}{x} & si \ \ x>1 \end{cases} \Rightarrow f'(0)=4\cdot 0+a=0 \Rightarrow \underline{\underline{a=0}}.$$

Sustituyendo el valor de α en la expresión (*): $\underline{\underline{b=-3}}$.

****

4º) a) Encuentre una primitiva de la función $f(x)=\frac{1}{1+\sqrt{x}}$.

b) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función f(x) y el eje de abscisas entre x = 0 y x = 9.

----

a)

$$F(x)=\int\frac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1+\sqrt{x}=t \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot dx=dt \\ \sqrt{x}=t-1 \rightarrow dx=2(t-1)dt \end{array}\right\} \Rightarrow F(x)=\int\frac{2(t-1)}{t}\cdot dt=2\int\frac{t-1}{t}\cdot dt=$$

$$=2\int\left(1-\frac{1}{t}\right)\cdot dt=2\left[t-L|t|\right]+C=2\left[\left(1+\sqrt{x}\right)-L\left|1+\sqrt{x}\right|\right]+C=2+2\sqrt{x}-2L\left(1+\sqrt{x}\right)=$$

$$=2\sqrt{x}-2L\left(1+\sqrt{x}\right)+C=\underline{\underline{2\left[\sqrt{x}-L\left(1+\sqrt{x}\right)\right]+C=F(x)}}.$$

b)

Por ser positivas todas las ordenadas de la función $f(x)=\frac{1}{1+\sqrt{x}}$, el área pedida es la siguiente:

$$S=\int_0^9\frac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot dx=2\cdot\left[\sqrt{x}-L\left(1+\sqrt{x}\right)\right]_0^9=2\cdot\left\{\left[\sqrt{9}-L\left(1+\sqrt{9}\right)\right]-\left[\sqrt{0}-L\left(1+\sqrt{0}\right)\right]\right\}=$$

$$=2\cdot\left[(3-L\,4)-0\right]=\underline{\underline{2\cdot(3-L\,4)\,u^2=S}}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Se dice que una matriz cuadrada A es ortogonal si se cumple que $A^t \cdot A = I$, donde I denota la matriz identidad y A^t es la traspuesta de A. Determine para qué valores de los parámetros α y b la matriz $A = \begin{pmatrix} a & -a & b \\ a & a & 0 \\ 0 & b & -1 \end{pmatrix}$ es ortogonal.

$$A \cdot A^t = I \Rightarrow \begin{pmatrix} a & -a & b \\ a & a & 0 \\ 0 & b & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ -a & a & b \\ b & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;;;$$

$$\begin{pmatrix} a^2+a^2+b^2 & a^2-a^2 & -ab-b \\ a^2-a^2 & a^2+a^2 & ab \\ -ab-b & ab & b^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2+b^2 & 0 & -ab-b \\ 0 & 2a^2 & ab \\ -ab-b & ab & b^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow b^2+1=1 \Rightarrow \underline{\underline{b=0}}.$$

$$2a^2 = 1 \;;;\; a^2 = \frac{1}{2} \;;;\; a = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \underline{\underline{a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}}} \;;;\; \underline{\underline{a_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}}}.$$

****

2º) a) Halle la ecuación implícita (o general) del plano $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda - \mu \\ y = -3 + \lambda \\ z = 2 + 3\mu \end{cases}$.

b) Determine la ecuación de la recta r que es perpendicular al plano π y pasa por el punto P(-1, 2, 3).

----

a)

Dos vectores directores y un punto del plano π son $\overrightarrow{u} = (2,\ 1,\ 0)$, $\overrightarrow{v} = (-1,\ 0,\ 3)$ y $P(1,\ -3,\ 2)$.

La expresión general del plano π es la siguiente:

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ 3(x-1) + (z-2) - 6(y+3) = 0\ ;;$$

$$3x - 3 + z - 2 - 6y - 18 = 0 \ \Rightarrow\ \underline{\underline{\pi \equiv 3x - 6y + z - 23 = 0}}.$$

b)

Un vector director de la recta r pedida es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector normal de π, que es $\overrightarrow{n} = (3,\ -6,\ 1)$.

La recta r expresada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas es:

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 - 6\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}}}$$

****

3º) Dada la función $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-1}$, se pide:

a) Dominio de definición y corte con los ejes.

b) Estudio de las asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas).

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos (máximos y mínimos).

d) Representación gráfica aproximada.

----

a)

Considerando que tiene que ser $x^2-9\geq 0,\ |x|\geq 3$; el valor que anula el denominador (x = 1) no es relevante con respecto al dominio de la función.

$$\underline{\underline{D(f)\Rightarrow(-\infty,\ -3]\cup[3,\ +\infty)}}$$

Por no estar definida la función para x = 0, <u>la función f(x) no corta al eje Y.</u>

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-1}=0\ \Rightarrow\ \sqrt{x^2-9}=0\ ;;\ x^2-9=0\ ;;\ \underline{x_1=-3}\ ;;\ \underline{x_2=3}.$$

<u>La función f(x) corta el eje X en los puntos A(-3, 0) y B(3, 0).</u>

b)

Las asíntotas son las siguientes:

<u>Horizontales</u>: son los valores finitos que toma y cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$y=k=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-1}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Indet.\Rightarrow\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2-9}{x^2}}}{\frac{x-1}{x}}=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{1-0}}{1-0}=\pm1\Rightarrow$$ <u>Asíntotas horizontales: y = 1 e y = -1</u>.

<u>Verticales</u>: son los valores de x que anulan el denominador.

<u>No tiene asíntotas verticales por no estar definida la función para x = 1.</u>

<u>Oblicuas</u>: <u>No tiene.</u>

Para que una función tenga asíntotas horizontales es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador.

c)

$$f'(x)=\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-9}}\cdot(x-1)-\sqrt{x^2-9}\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{\frac{x^2-x}{\sqrt{x^2-9}}-\sqrt{x^2-9}}{(x-1)^2}=\frac{\frac{x^2-x-\left(\sqrt{x^2-9}\right)^2}{\sqrt{x^2-9}}}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{x^2-x-(x^2-9)}{(x-1)^2\sqrt{x^2-9}}=\underline{\frac{9-x}{(x-1)^2\sqrt{x^2-9}}=f`(x)}.$$

Por ser el denominador positivo $\forall x\in D(f)$, el signo del valor de la función es el que tenga el denominador, por lo cual: $f'(x)=0 \Rightarrow 9-x=0$;; $\underline{x=9}$

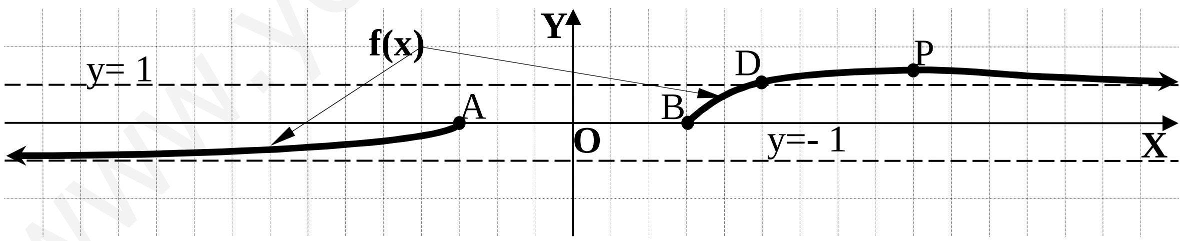
$$f'(x)>0 \Rightarrow x<9 \Rightarrow \underline{\underline{Crecimiento: (-\infty,\ -3)\cup(3,\ 9)}}$$

$$f'(x)<0 \Rightarrow x>9 \Rightarrow \underline{\underline{Decrecimiento: (9,\ +\infty)}}$$

Teniendo en cuenta que f(x) es continua en su dominio y que la derivada se anula para x = 9 y que para este valor pasa de ser creciente a decreciente, la función tiene un máximo relativo para x = 9.

$$f(9)=\frac{\sqrt{9^2-9}}{9-1}=\frac{\sqrt{81-9}}{8}=\frac{\sqrt{72}}{8}=\frac{\sqrt{2^3\cdot 3^2}}{8}=\frac{6\sqrt{2}}{8}=\underline{\frac{3\sqrt{2}}{4}}\Rightarrow \underline{\underline{M\acute{a}ximo\ \ relativo: P\left(9,\ \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)}}.$$

d) Representación gráfica aproximada.



El punto de corte de la función con la asíntota y = 1 es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} y=f(x)=\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-1} \\ y=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-1}=1 \ ;; \ \sqrt{x^2-9}=x-1 \ ;; \ x^2-9=x^2-2x+1 \ ;; \ 2x=10 \ ;;$$

$x=5\Rightarrow f(5)=1 \Rightarrow \underline{D(5,\ 1)}$.

****

4º) a) Encuentre una primitiva de la función $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$.

b) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función f(x) y el eje de abscisas entre x = 0 y x = 1.

----

a)

$$F(x)=\int \frac{x^2}{e^x}dx=\int x^2 \cdot e^{-x}dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2=u \to 2x\cdot dx=du \\ e^{-x}\cdot dx=dv \to v=-e^{-x} \end{array} \right\} \Rightarrow F(x)=x^2\left(-e^{-x}\right)-\int -e^{-x}\cdot 2xdx=$$

$$=-x^2 e^{-x}+2\int x e^{-x}\cdot dx=\underline{-x^2 e^{-x}+2I_1=I}. \qquad (*)$$

$$I_1=\int x\cdot e^{-x}\cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x=u \to dx=du \\ e^{-x}\cdot dx=dv \to v=-e^{-x} \end{array} \right\} \Rightarrow I_1=x\cdot\left(-e^{-x}\right)-\int -e^{-x}\cdot dx=$$

$$=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}+C=\underline{-e^{-x}(x+1)+C=I_1}.$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido para I_1:

$$F(x)=-x^2 e^{-x}+2\cdot\left[-e^{-x}(x+1)\right]+C=\underline{\underline{-e^{-x}\left(x^2+2x+2\right)+C=F(x)}}$$

b)

Teniendo en cuenta que todas las ordenadas de $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$ son positivas en R, el área pedida es la siguiente:

$$S=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 \frac{x^2}{e^x}\cdot dx=\left[-e^{-x}\left(x^2+2x+2\right)\right]_0^1=\left[-e^{-1}(1+2+2)\right]-\left[-e^0(0+0+2)\right]=$$

$$=-\frac{5}{e}+2=\underline{\underline{\frac{2e-5}{e}u^2=S}}.$$

****