PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

JUNIO – 2014

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Observaciones importantes: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.
No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumnos que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

OPCIÓN A

1º) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4$, calcule, sin desarrollar ni utilizar la regla de Sarrus, los siguientes determinantes, indicando en cada paso qué propiedad de los determinantes se está utilizando.

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3x \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. b) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y+2 & 3z+4 \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix}$.

----

a)

$$\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3x \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} x & y & x \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} \cdot 4 = \underline{\underline{-6}}.$$

Se han utilizado las siguientes propiedades de los determinantes:

Si se intercambian dos líneas de un determinante, su valor cambia de signo.

Si se multiplican o dividen todos los elementos de una línea de un determinante por un número, su valor del determinante queda multiplicado o dividido por dicho número.

b)

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y+2 & 3z+4 \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y+2 & 3z+4 \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y+2 & 3z+4 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y+2 & 3z+4 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y & 3z \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 = \underline{\underline{8}}\,.$$

Se han utilizado las siguientes propiedades de los determinantes:

Si los elementos de una línea de un determinante se descomponen en dos sumandos, el valor del determinante es igual a la suma de los dos determinantes obtenidos al considerar por separado cada sumando de esa línea, y el resto de las líneas iguales a las del determinante inicial.

Si un determinante tiene dos líneas paralelas proporcionales, su valor es cero.

Si se multiplican o dividen todos los elementos de una línea de un determinante por un número, su valor queda multiplicado o dividido por dicho número.

Si se rotan todas las líneas (filas o columnas) de un determinante, su valor no varía.

****

2º) a) Determine para qué valor del parámetro α la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z=1 \\ -x-2y+z=0 \end{cases}$ es perpendicular al plano $\pi \equiv -6x+ay+2z=0$.

b) Demuestre que si α = -8 la recta r corta al plano π en un punto y calcule dicho punto.

----

a)

Para determinar un vector director de la recta r se expresa por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=1 \\ -x-2y+z=0 \end{cases} \Rightarrow z=\lambda \Rightarrow \left. \begin{array}{r} x+y=1-\lambda \\ -x-2y=-\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow -y=1-2\lambda \;;;\; y=-1+2\lambda \;;;\; x=1-y-\lambda=$$

$$=1-(-1+2\lambda)-\lambda=2-2\lambda-\lambda=\underline{2-3\lambda=x} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=2-3\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}} \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_r}=(-3,\ 2,\ 1)}.$$

Un vector normal del plano $\pi \equiv -6x+ay+2z=0$ es $\overrightarrow{n}=(-6,\ a,\ 2)$.

La recta r y el plano π serán perpendiculares cuando el vector director de la recta y el vector normal del plano sean linealmente dependientes (paralelos).

Dos vectores son paralelos cuando sus componentes son proporcionales.

$\frac{-3}{-6}=\frac{2}{a}=\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{a=4} \Rightarrow$ <u>La recta r y el plano π son paralelos para α = 4</u>.

b)

Para α = -8 el vector normal del plano π es $\overrightarrow{n}=(-6,\ -8,\ 2)$, que el linealmente independiente al vector director de la recta r, $\overrightarrow{v_r}=(0,\ -1,\ 1)$.

Los vectores $\overrightarrow{n}$ y $\overrightarrow{v_r}$ no son perpendiculares por ser $\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n} \neq 0$:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n}=(-3,\ 2,\ 1)\cdot(-6,\ -8,\ 2)=18-16+2=4\neq 0.$$

<u>Lo anterior demuestra que la recta r y el plano π son secantes, se cortan en un punto</u>.

Para α = -8 es $\pi \equiv -6x-8y+2z=0 \Rightarrow \underline{\pi \equiv 3x+4y-z=0}$.

El punto de corte de r con π es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv 3x+4y-z=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=2-3\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot(2-3\lambda)+4(-1+2\lambda)-\lambda=0 \;;;\; 6-9\lambda-4+8\lambda-\lambda=0 \;;;\; 2-2\lambda=0 \;;;$$

$$1-\lambda=0 \;;;\; \lambda=1 \Rightarrow \underline{\underline{P(-1,\ 1,\ 1)}}.$$

****

3º) Dada la función $f(x)=\frac{e^x}{x}$, se pide:

a) Dominio de definición y cortes con los ejes.

b) Estudio de las asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas).

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos (máximos y mínimos).

d) Representación gráfica aproximada.

----

a)

La función f está definida para cualquier valor real de x, excepto para x = 0.

$$\underline{\underline{D(f) \Rightarrow R-\{0\}}}$$

b)

Horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1} = \lim_{x \to +\infty} e^x = \infty .$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{e^{-\infty}}{-\infty} = \frac{\frac{1}{e^{\infty}}}{-\infty} = \frac{1}{-\infty \cdot \infty} = \frac{1}{-\infty} = 0 .$$

La recta y = 0 (Eje X⁻) es asíntota horizontal.

Verticales:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^0}{0^+} = \frac{1}{0^+} = \underline{+\infty} \Rightarrow$$ La recta x = 0 (Eje Y^+) es asíntota vertical de la función.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^0}{0^-} = \frac{1}{0^-} = \underline{-\infty} \Rightarrow$$ La recta x = 0 (Eje Y^-) es asíntota vertical de la función.

Oblicuas: No tiene. (las asíntotas oblicuas y horizontales son incompatibles).

c)

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2} = 0 \Rightarrow e^x(x-1) = 0 \;;\; x-1=0 \;;\; \underline{x=1} .$$

Los períodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{\underline{f'(x)<0 \Rightarrow x<1 \Rightarrow Decrecimiento: (-\infty,\ 0)\cup(0,\ 1)}}$$

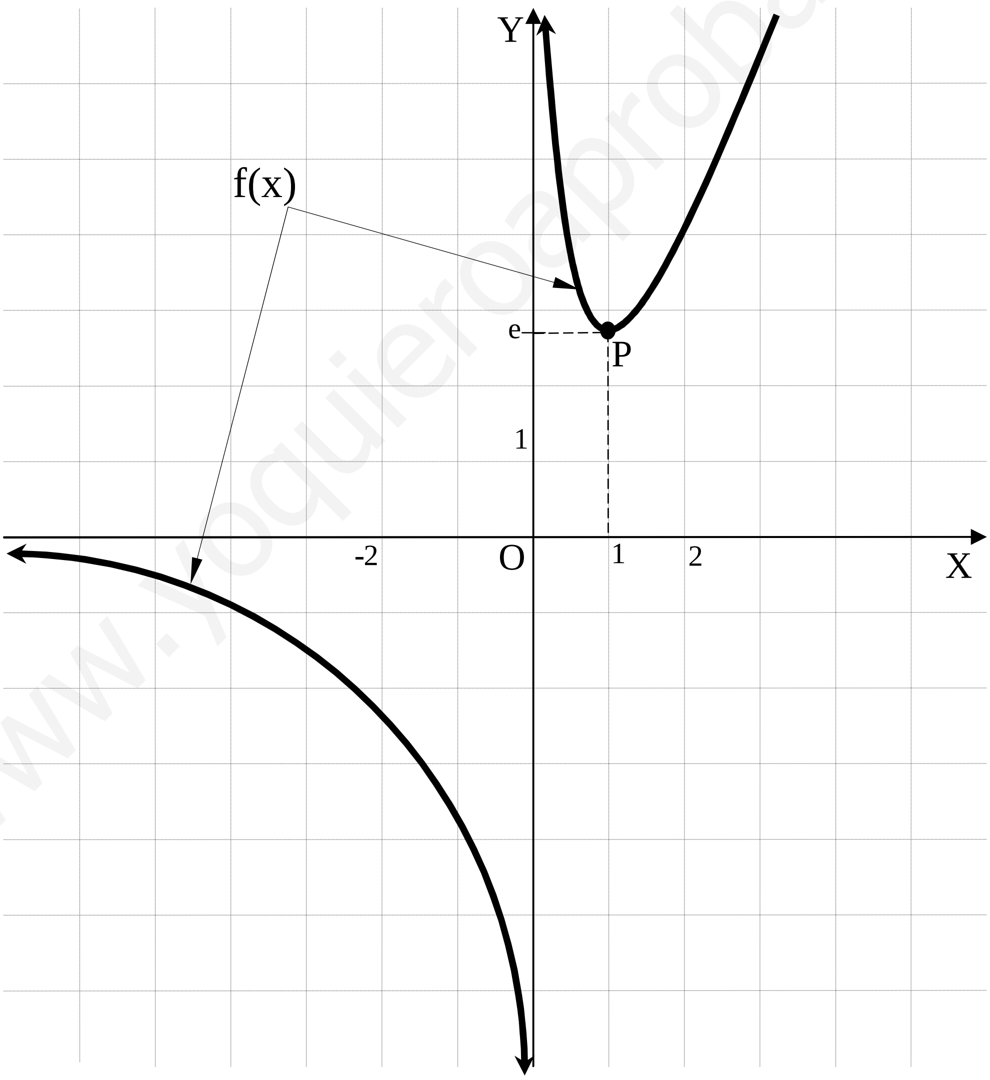
$$\underline{\underline{f'(x)>0 \Rightarrow x>1 \Rightarrow Crecimiento: (1,\ +\infty)}}$$

$$f''(x)=\frac{\left[e^x(x-1)+e^x\cdot 1\right]\cdot x^2-e^x(x-1)\cdot 2x}{x^4}=\frac{e^x(x-1+1)\cdot x-2e^x(x-1)}{x^3}=$$

$$=\frac{e^x\cdot x^2+e^x(2-2x)}{x^3}=\underline{\frac{e^x\left(x^2-2x+2\right)}{x^3}=f''(x)}.$$

$f''(1)=\frac{e^1(1-2+2)}{1^3}=e>0 \Rightarrow$ Mínimo relativo para x = 1.

$f(1)=\frac{e^1}{1}=e \Rightarrow$ <u>Mínimo: P(1, e)</u>.



****

4º) a) Calcule la integral indefinida: $I = \int tag\ x \cdot dx$.

b) De todas las primitivas de la función $f(x) = tag\ x$, encuentre la que pasa por el punto de coordenadas P(0, 2).

----

a)

$$I = \int tag\ x \cdot dx = \int \frac{sen\ x}{\cos x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \cos x = t \\ -sen\ x \cdot dx = dt \end{array} \right\} \Rightarrow -\int \frac{1}{t} \cdot dt = -Lt + C = \underline{\underline{-L(\cos x) + C}}.$$

b)

Las infinitas funciones primitivas de $f(x) = tag\ x$ están representadas por la función $f(x) = -L(\cos x) + C$. La función primitiva que pasa por el punto P(0, 2) es la que satisface su ecuación:

$$f(0) = 2 \Rightarrow -L(\cos 0) + C = 2 \ ;; \ -L1 + C = 2 \ ;; \ -0 + C = 2 \Rightarrow \underline{C = 2}.$$

$$\underline{\underline{f(x) = -L(\cos x) + 2}}$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Discuta el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} ax+3y+z=a \\ x+ay+az=1 \\ x+y-z=1 \end{array}\right\}$ en función del parámetro α.

b) Si es posible, resuélvalo para el valor α = -1.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} a & 3 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \;\; y \;\; M'=\begin{pmatrix} a & 3 & 1 & a \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a & 3 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-a^2+1+3a-a-a^2+3=-2a^2+2a+4=-2\left(a^2-a-2\right)=0 \;\;;;$$

$$a^2-a-2=0 \;\;;;\;\; a=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm 3}{2} \Rightarrow \underline{a_1=-1} \;\;;;\;\; \underline{a_2=2}.$$

$$\underline{\underline{Para \; \left\{\begin{array}{c} a\neq -1 \\ a\neq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow Rango \;\; M = Rango \;\; M' = 3 = n^o \;\; incóg. \Rightarrow Compatible \;\; determinado}}$$

$$Para \;\; a=-1 \;\Rightarrow\; M'=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2=F_3\} \Rightarrow \underline{Rango \;\; de \;\; M'=2}.$$

$$Para \;\; a=1 \;\Rightarrow\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1=C_4\} \Rightarrow \underline{Rango \;\; de \;\; M'=2}.$$

$$\underline{\underline{Para \; \left\{\begin{array}{c} a=-1 \\ a=1 \end{array}\right\} \Rightarrow Rango \;\; M = Rango \;\; M' = 2 < n^o \;\; incóg. \Rightarrow Compatible \;\; indeterminado}}$$

b)

Para α = -1 el sistema es $\left.\begin{array}{r} -x+3y+z=-1 \\ x-y-z=1 \\ x+y-z=1 \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado.

Despreciando una de las ecuaciones (primera) y haciendo $\underline{y=\lambda}$:

$$\left.\begin{array}{l} x-y=1+\lambda \\ x+y=1+\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 2x=2+2\lambda \;;;\; \underline{x=1+\lambda} \;;;\; y=1+\lambda-x=1+\lambda-1-\lambda=\underline{0=y}\,.$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=0 \quad\quad , \;\forall\lambda\in R \\ z=\lambda \end{cases}}}\,.$$

****

2º) Dos de los tres vértices de un triángulo son los puntos A(1, 1, 1) y B(1, 1, 3). El tercer vértice C está en la recta r que pasa por los puntos P(-1, 0, 2) y Q(0, 0, 2).

a) Determine la ecuación de la recta r.

b) Calcule las coordenadas del vértice C para que el área del triángulo sea $\sqrt{15}$ unidades cuadradas.

Observación: Hay dos soluciones distintas; basta con calcular una de ellas.

----

a)

Los puntos P(-1, 0, 2) y Q(0, 0, 2) determinan un vector director de la recta r:

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (0,\ 0,\ 2) - (-1,\ 0,\ 2) = \underline{(1,\ 0,\ 0)}.$$

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}}}$.

b)

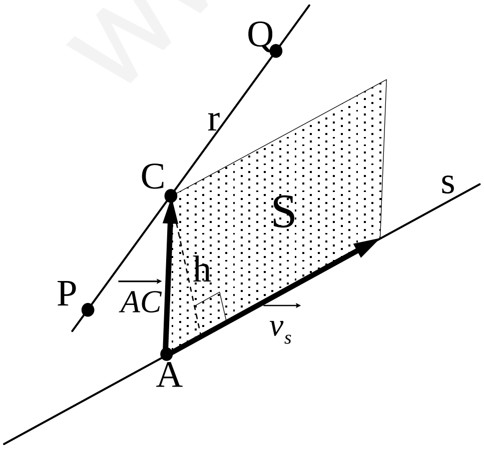
Los puntos A(1, 1, 1) y B(1, 1, 3) determinan un vector director de la recta s que los contiene:

$$\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (1,\ 1,\ 3) - (1,\ 1,\ 1) = \underline{(0,\ 0,\ 2)}.$$

La expresión de la recta s por unas ecuaciones paramétricas es $\underline{s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 + 2\mu \end{cases}}$.

Los puntos de la recta r son de la forma $C(\lambda,\ 0,\ 2)$.

Para facilitar la comprensión del ejercicio hacemos un gráfico aproximado de la situación.



Teniendo en cuenta que $S = h \cdot \left|\overrightarrow{v_s}\right|$ y que también puede ser $S = \left|\overrightarrow{v_s} \wedge \overrightarrow{AC}\right|$, se deduce que la distancia es: $h(C,\ s) = \frac{\left|\overrightarrow{v_s} \wedge \overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{v_s}\right|}$.

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (\lambda,\ 0,\ 2) - (1,\ 1,\ 1) = (\lambda - 1,\ -1,\ 1).$$

Aplicando la fórmula de la distancia h que nos interesa:

$$h(C,\ s)=\frac{\left|\overrightarrow{v_s}\wedge\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{v_s}\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 2 \\ \lambda-1 & -1 & 1 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{0^2+0^2+2^2}}=\frac{\left|2(\lambda-1)j+2i\right|}{2}=\left|i+(\lambda-1)j\right|=\sqrt{1^2+(\lambda-1)^2}=$$

$$=\sqrt{1+\lambda^2-2\lambda+1}=\underline{\sqrt{\lambda^2-2\lambda+2}=h}.$$

Nótese que h es la altura del triángulo cuya base es $\overline{AB}=\left|\overrightarrow{AB}\right|=2$ unidades.

Del enunciado del ejercicio: $\frac{\overline{AB}\cdot h}{2}=\sqrt{15}\Rightarrow\frac{2\cdot\sqrt{\lambda^2-2\lambda+2}}{2}=\sqrt{15}\Rightarrow\lambda^2-2\lambda+2=15$;;

$$\lambda^2-2\lambda-13=0\ ;;\ \lambda=\frac{2\pm\sqrt{4+52}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{56}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{14}}{2}=1\pm\sqrt{14}\ \Rightarrow\ \underline{\lambda_1=1-\sqrt{14}}\ ;;\ \underline{\lambda_2=1+\sqrt{14}}.$$

$$\underline{\underline{C_1\left(1-\sqrt{14},\ 0,\ 2\right)}}\ o\ \underline{\underline{C_2\left(1+\sqrt{14},\ 0,\ 2\right)}}$$

****

3º) Dada la función $f(x) = x\,L\,x - x$, se pide:

a) Determine el punto de la gráfica de f para el cual la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante. Calcule la ecuación de dicha recta.

b) Determine el punto de la gráfica de f para el cual la recta tangente es paralela al eje OX. Calcule la ecuación de dicha recta.

----

a)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función para ese punto.

$$f'(x) = 1L\,x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = L\,x + 1 - 1 = \underline{L\,x}.$$

La pendiente de una recta paralela a la bisectriz del primer cuadrante vale 1.

$$m = f'(x) = 1 \Rightarrow L\,x = 1 \Rightarrow \underline{x = e}.$$

El punto P de tangencia es el siguiente: $f(e) = e \cdot L\,e - e = e - e = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P(e,\ 0)}}$.

La recta t tangente es: $y - 0 = 1 \cdot (x - e) = x - e \Rightarrow \underline{\underline{t \equiv x - y - e = 0}}$.

b)

La pendiente de una recta paralela al eje OX vale 0.

$$m = f'(x) = 0 \Rightarrow L\,x = 0 \Rightarrow \underline{x = 1}.$$

El punto Q de tangencia es el siguiente: $f(1) = 1 \cdot L1 - 1 = 0 - 1 = -1 \Rightarrow \underline{\underline{Q(1,\ -1)}}$.

La recta s tangente es: $y + 1 = 0 \cdot (x - 1) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{s \equiv y + 1 = 0}}$.

****

4º) a) Encuentre una primitiva de la función $f(x)=x\cdot\cos x$.

b) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)=x\cdot\cos x$ y el eje de abscisas entre x = 0 y x = π.

----

a)

$$F(x)=\int x\cdot\cos x\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} u=x\rightarrow du=dx \\ \cos x\cdot dx=dv\rightarrow v=sen\ x \end{matrix}\right\} \Rightarrow x\cdot sen\ x-\int sen\ x\cdot dx=$$

$$=\underline{\underline{x\cdot sen\ x+\cos x+C=F(x)}}.$$

b)

Teniendo en cuenta que las ordenadas de $f(x)=x\cdot\cos x$ en el intervalo $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ son positivas y en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ son negativas y que si se invierten los limites de integración de una integral definida su valor cambia de signo, el área pedida es la siguiente:

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cdot dx+\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cdot dx=[F(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}+[F(x)]_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}=F\left(\tfrac{\pi}{2}\right)-F(0)+F\left(\tfrac{\pi}{2}\right)-F(\pi)=$$

$$=2F\left(\tfrac{\pi}{2}\right)-F(0)-F(\pi)=2\cdot\left(\frac{\pi}{2}\cdot sen\ \frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\right)-(0\cdot sen\ 0+\cos 0)-(\pi\cdot sen\ \pi+\cos\pi)=$$

$$=2\cdot\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1+0\right)-(0\cdot 0+1)-(\pi\cdot 0-1)=\pi-1+1=\underline{\underline{\pi\ u^2=S}}.$$

****