PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas. No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

OPCIÓN A

1º) Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3, A^4.

$b)$ ¿Cuál será la expresión general de la potencia A^n para cualquier valor $n \in N$?

$a)$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$b)$

Considerando la sucesión $2, 4, 6, 8, \cdots$, que es una progresión aritmética de primer término 2, de diferencia 2.

El término general de una progresión aritmética es $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$.

Aplicando la fórmula al caso que nos ocupa:

$a_n = 2 + (n-1) \cdot 2 = 2 + 2n - 2 = 2n.$

$$\underline{A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in N.}$$

****

2º) a) Descomponga el número 10 en dos sumandos positivos de manera que la suma de uno de ellos más el doble del logaritmo neperiano del otro sea máxima.

b) Calcule dicha suma máxima.

----

a)

Sean los números x y $(10-x)$.

$S(x)=x+2L(10-x)$.

La condición necesaria para que una función tenga un máximo es que se anule su primera derivada.

$S'(x)=1+2\cdot\frac{-1}{10-x}=1-\frac{2}{10-x}=\frac{10-x-2}{10-x}=\frac{8-x}{10-x}$.

$S'(x)=0\Rightarrow\frac{8-x}{10-x}=0;\ \ 8-x=0\Rightarrow x=8$.

Para diferenciar los máximos se recurre a la segunda derivada; si es negativa para los valores que anulan la primera, se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$S''(x)=\frac{-1\cdot(10-x)-(8-x)\cdot(-1)}{(10-x)^2}=\frac{-10+x+8-x}{(10-x)^2}=\frac{-2}{(10-x)^2}$.

$S''(8)=\frac{-2}{(10-8)^2}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}<0\Rightarrow Máximo\ para\ x=8$.

$\underline{Los\ números\ pedidos\ son\ 8\ y\ 2, respectivamente.}$

b)

$S=8+2L2=8+L2^2=8+L4$.

$\underline{La\ suma\ máxima\ pedida\ es\ 8+L4\cong 9{,}386.}$

****

3º) a) Calcule la siguiente integral indefinida: $I = \int \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}} \cdot dx$.

b) Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$, y la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$.

----

a)

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 2x^2 + 1 = t \\ 4x \cdot dx = dt \\ x \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot dt \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot dt = \frac{1}{4} \cdot \int t^{-\frac{1}{2}} \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{2}\sqrt{t} + C.$$

$$\underline{I = \int \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}} \cdot dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x^2 + 1} + C.}$$

b)

En el intervalo $(0, 2)$ todas las ordenadas de la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$ son positivas, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^2 f(x) \cdot dx = \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}} \cdot dx = \left[\frac{1}{2}\sqrt{2x^2 + 1}\right]_0^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 2^2 + 1}\right) - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 0^2 + 1}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{9} - \frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

$$\underline{S = 1\ u^2}.$$

****

4º) Considere el plano π dado por la ecuación $\pi \equiv 3x - 2y + z = 3$.

a) Estudie la posición relativa del plano π y de la recta $r \equiv \begin{cases} x + 3y + 3z = 0 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$.

b) En caso de que la recta r sea paralela al plano π, calcule la distancia entre ambos. En caso de que la recta r corte al plano π, calcule el punto de corte y el ángulo de corte entre ambos.

----

a)

La recta r y el plano π determinan el sistema $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y + z = 3 \\ x + 3y + 3z = 0 \\ y + 2z = 1 \end{array}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

1. -- Rango M = Rango M' = 2 $\Rightarrow$ La recta está contenida en el plano.

2. -- Rango M =2, Rango M' = 3 $\Rightarrow$ La recta es paralela al plano.

3. -- Rango M = Rango M' = 3 $\Rightarrow$ La recta es secante al plano.

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18 + 1 - 9 + 4 = 14 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = 3.$$

$$\underline{Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes.}$$

b)

Un vector normal del plano $\pi \equiv 3x - 2y + z - 3 = 0$ es $\vec{n} = (3, -2, 1)$.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x + 3y + 3z = 0 \\ y + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow y = 1 - 2\lambda;\ \ x + 3 - 6\lambda + 3\lambda = 0;$$

$$x = -3 + 3\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -3 + 3\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}.$$

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (3, -2, 1)$, que es el mismo que $\vec{n}$.

Por ser el vector director de la recta paralelo (coincidente) al vector normal del plano:

$$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ perpendiculares\ (forman\ 90°)}.$$

****

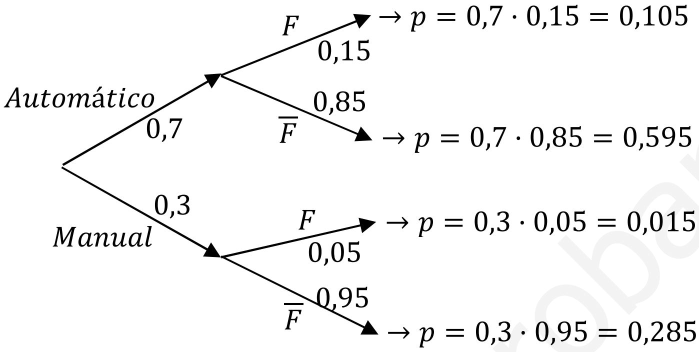
5º) Una máquina funciona en modo automático el 70 % de los días y el resto de los días funciona en modo manual. La probabilidad de que tenga un fallo cuando funciona en modo automático es 0,15. La probabilidad de que tenga un fallo cuando funciona en modo manual es 0,05.

a) Calcule la probabilidad de que no tenga ningún fallo.

b) Si un día tiene un fallo, ¿cuál es la probabilidad de que haya funcionado en modo manual?

----

a)



$$P = P(\overline{F}) = P(A \cap \overline{F}) + P(M \cap \overline{F}) = P(A) \cdot P(\overline{F}/A) + P(M) \cdot P(\overline{F}/M) =$$

$$= 0{,}7 \cdot 0{,}85 + 0{,}3 \cdot 0{,}95 = 0{,}595 + 0{,}285 = \underline{0{,}880}.$$

b)

$$P = P(M/F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{P(M) \cdot P(F/M)}{1 - P(\overline{F})} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}05}{1 - 0{,}880} = \frac{0{,}015}{0{,}120} = \frac{15}{120} = \underline{0{,}125}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Considere el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - y + z = 4a \\ y + z = -4 \\ x + 2z = a^2 \end{cases}$ en función del parámetro a:

a) Justifique que el sistema nunca es compatible determinado.

b) Determine para qué valor del parámetro a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

----

a)

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema nunca es compatible determinado cuando las matrices de coeficientes y ampliada no tienen el mismo rango.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4a \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & a^2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow Rang\ M = 2.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de a es el siguiente:

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4a \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & a^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 - F_1\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4a \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & a^2 - 4a \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 - F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4a \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 - 4a + 4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 4a \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & (a-2)^2 \end{bmatrix}.$$

$$Para\ m = 2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.$$

$$Para\ m \neq 2 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.$$

$$\underline{Queda\ justificado\ que\ el\ sistema\ nunca\ es\ compatible\ determinado.}$$

b)

Como se ha probado en el apartado anterior:

$$\underline{El\ sistema\ es\ compatible\ indeterminado\ para\ a = 2.}$$

****

2º) Considere la función dada por $f(x)=\begin{cases} e^{ax} & si\ \ x<0 \\ a+b\cdot sen\,x & si\ \ x\geq 0 \end{cases}$. Determina los valores de $a\ y\ b$ para los cuales la función $f(x)$ es continua y derivable en $x=0$.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=0$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de $a\ y\ b$ para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=0 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} e^{ax} = e^0 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(a+b\cdot sen\,x) = a = f(0) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow \underline{a=1}$.

La función resulta $f(x)=\begin{cases} e^{x} & si\ \ x<0 \\ 1+b\cdot sen\,x & si\ \ x\geq 0 \end{cases}$.

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x=0$ cuya derivabilidad se va a forzar determinando el correspondiente valor de b.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x)=\begin{cases} e^{x} & si\ \ x<0 \\ b\cdot cos\,x & si\ \ x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x=0 \Rightarrow f'(0)=\begin{cases} 1 & si\ \ x<0 \\ b & si\ \ x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow \underline{b=1}$.

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ derivable\ en\ x=0\ para\ a=b=1.}$$

****

3º) a) Calcule la siguiente integral indefinida: $I = \int x \cdot e^x \cdot dx$.

b) Determine la primitiva de la función $f(x) = x \cdot e^x$ que pasa por el punto $P(0, 1)$.

----

a)

$$I = \int x \cdot e^x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = x \to du = dx \\ e^x \cdot dx = dv \to v = e^x \end{matrix} \right\} \Rightarrow x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx =$$

$= x \cdot e^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$

$$\underline{I = \int x \cdot e^x \cdot dx = e^x(x-1) + C}.$$

b)

$F(x) = e^x(x-1) + C.$

Por contener $F(x)$ al punto $P(0, 1)$ es $F(0) = 1$:

$F(0) = 1 \Rightarrow e^0 \cdot (0-1) + C = 1;\ \ 1 \cdot (-1) + C = 1;\ -1 + C = 1 \Rightarrow C = 2.$

$$\underline{F(x) = e^x(x-1) + 2}.$$

****

4º) Considere el punto $P(0,1,2)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x+y-z=-1 \\ x-y+z=3 \end{cases}$:

a) Calcule la ecuación (en cualquiera de sus formas) del plano π que es perpendicular a la recta r y pasa por el punto P.

b) Calcule la distancia del punto P al plano $\pi \equiv x+y+z=5$.

----

a)

La expresión de la recta r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 2x+y-z=-1 \\ x-y+z=3 \end{cases} \Rightarrow z=\lambda \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y=-1+\lambda \\ x-y=3-\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=2;\ \ x=\tfrac{2}{3};$$

$$y=-1+\lambda-2x=-1+\lambda-\tfrac{4}{3}=-\tfrac{7}{3}+\lambda\ \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=-\frac{7}{3}+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}.$$

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r}=(0,1,1)$.

El haz de planos β perpendiculares a r tiene la expresión $\beta \equiv y+z+D=0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano π que contiene al punto $P(0,1,2)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \beta \equiv y+z+D=0 \\ P(0,1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow 1+2+D=0;\ \ 3+D=0 \Rightarrow D=-3.$$

$$\underline{\pi \equiv y+z-3=0}.$$

b)

La distancia de un punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ al plano $Ax+By+Cz+D=0$ viene dada por la fórmula $d(P_0,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la fórmula al punto $P(0,1,2)$ y al plano $\pi \equiv x+y+z-5=0$:

$$d(P,\pi)=\frac{|1\cdot 0+1\cdot 1+1\cdot 2-5|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{|0+1+2-5|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{|-2|}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\underline{\frac{2\sqrt{3}}{3}\ unidades}.$$

****

5º) En la peña del Atlético de Madrid, el 70 % de sus miembros prefiere que Antoine Griezmann continúe jugando en el equipo durante la próxima temporada, el 50 % prefiere que Fernando Torres continúe jugando en el equipo la próxima temporada y el 30 % prefiere que ambos jugadores sigan jugando en el equipo la próxima temporada. Elegido al azar un miembro de la peña, se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera que al menos alguno de los dos jugadores siga jugando en el equipo la próxima temporada?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera que ninguno de los dos jugadores siga jugando en el equipo la próxima temporada?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera que solo Fernando Torres siga jugando en el equipo la próxima temporada?

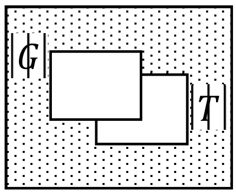
$Datos$: $P(G) = 0{,}7$; $P(T) = 0{,}5$; $P(G \cap T) = 0{,}3$.

a)

$$P = P(G \cup T) = P(G) + P(T) - P(G \cap T) = 0{,}7 + 0{,}5 - 0{,}3 = \underline{0{,}9}.$$

b)

$$P(\overline{G} \cap \overline{T}) = 1 - P(G \cup T) = 1 - 0{,}9 = \underline{0{,}1}.$$

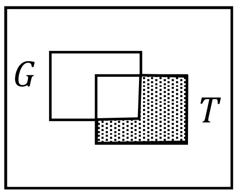


$\overline{G} \cap \overline{T}$

c)

$$P = P(T \cap \overline{G}) = P(T) - P(G \cap T) =$$

$$= 0{,}5 - 0{,}3 = \underline{0{,}2}$$



$T \cap \overline{G}$

****