PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

SEPTIEMBRE – 2019

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas. No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas.

OPCIÓN A

1º) Considere el sistema de ecuaciones $\begin{cases} ax + y - 2z = 0 \\ x + y - az = -1 \\ x + y + z = a \end{cases}$ en función del parámetro a:

a) Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para $a = 2$.

b) Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -a & -1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} a & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 2 - a + 2 + a^2 - 1 = 0;\ a^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = 1 \end{cases}.$$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix} a \neq -1 \\ a \neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

Se resuelve para $a = 2$ por la regla de Cramer.

El sistema resulta $\begin{cases} 2x+y-2z=0 \\ x+y-2z=-1 \\ x+y+z=2 \end{cases}$.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2^2-1}=\frac{2-4+4+1}{3}=\frac{3}{3}=1. \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{2^2-1}=\frac{-2-4-2+8}{3}=\frac{0}{3}=0.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{2^2-1}=\frac{4-1+2-2}{3}=\frac{3}{3}=1.$$

$$\underline{Solución: x=1,\ y=0,\ z=1}.$$

$b)$

$$Para\ a=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{L_2=L_3\} \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a=-1 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Para $a=-1$ el sistema resulta $\begin{cases} -x+y-2z=0 \\ x+y+z=-1 \\ x+y+z=-1 \end{cases}$, que es equivalente al sistema $\left.\begin{matrix} x-y+2z=0 \\ x+y+z=-1 \end{matrix}\right\}$. Para su resolución se hace $z=\lambda$:

$$\left.\begin{matrix} x-y=-2\lambda \\ x+y=-1-\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x=-1-3\lambda;\ \ x=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\lambda.$$

$$x+y=-1-\lambda \Rightarrow y=-1-\lambda+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\lambda=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda$$

$$\underline{Solución: x=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\lambda,\ y=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda,\ z=\lambda,\ \forall\lambda\in R.}$$

$c)$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-1+2+1+2=4\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ a=1 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

****

2º) $a)$ Calcule los extremos relativos (máximos y mínimos) de $f(x) = \frac{x^2+2x}{e^x}$, definida para todo valor de $x \in R$. Determine también los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

$b)$ Calcule $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right)$.

$a)$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición, que es necesaria, no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f'(x) = \frac{(2x+2)\cdot e^x - (x^2+2x)\cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{2x+2-x^2-2x}{e^x} = \frac{2-x^2}{e^x}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2-x^2}{e^x} = 0;\ \ 2 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2}.$$

$$f''(x) = \frac{-2x\cdot e^x - (2-x^2)\cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{-2x-2+x^2}{e^x} = \frac{x^2-2x-2}{e^x}.$$

$$f''(-\sqrt{2}) = \frac{2+2\sqrt{2}-2}{e^{-\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2}\cdot e^{\sqrt{2}} > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = -\sqrt{2}.$$

$$f(-\sqrt{2}) = \frac{2-2\sqrt{2}}{e^{-\sqrt{2}}} = 2e^{\sqrt{2}}(1-\sqrt{2}) \Rightarrow \underline{Mínimo: P\left[-\sqrt{2}, 2e^{\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})\right]}.$$

$$f''(\sqrt{2}) = \frac{2-2\sqrt{2}-2}{e^{\sqrt{2}}} = \frac{-2\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = \sqrt{2}.$$

$$f(\sqrt{2}) = \frac{2+2\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}} = \frac{2(1+\sqrt{2})}{e^{\sqrt{2}}} \Rightarrow \underline{Máximo: Q\left[\sqrt{2}, \frac{2(1+\sqrt{2})}{e^{\sqrt{2}}}\right]}.$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2-x^2}{e^x} = 0;\ \ 2 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2}.$$

Teniendo en cuenta que $f(x)$ es continua en R, las raíces de la derivada dividen a la recta real en los intervalos $(-\infty, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y $(\sqrt{2}, +\infty)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 0 \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ es: $f'(0) = \frac{2-0^2}{e^0} =$

$= \frac{2}{1} = 2 > 0 \Rightarrow Creciente.$

Teniendo en cuenta lo anterior, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Creciente: x \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)}.$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decreciente: x \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right)}.$$

$b)$

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) = \frac{1}{0} - \frac{1}{e^0-1} = \infty - \infty \Rightarrow Indet. \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\cdot(e^x-1)} = \frac{1-1-0}{0\cdot 0} =$

$= \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{1\cdot(e^x-1)+x\cdot e^x} = \frac{1-1}{0+0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow$

$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+1\cdot e^x+x\cdot e^x} = \frac{1}{1+1+0} = \underline{\frac{1}{2}}.$

****

3º) Considere la recta $r \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$ y el plano $\pi \equiv x - 2y - z = -1$.

a) Estudie la posición relativa de la recta r y el plano π.

b) En caso de que la recta corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso de que la recta no corte al plano, calcule la distancia entre ambos.

----

a)

La expresión de r dada por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$r \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+2=-y-3 \\ x+1=-z \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 2x+y=-5 \\ x+z=-1 \end{cases}.$$

La recta r y el plano π determinan el sistema $\left.\begin{array}{r} x-2y-z=-1 \\ 2x+y=-5 \\ x+z=-1 \end{array}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

$1 \rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow La\ recta\ está\ contenida\ en\ el\ plano.$

$2 \rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ es\ paralela\ al\ plano.$

$3 \rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ y\ el\ plano\ son\ secantes.$

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+1+4 = 6 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = 3.$$

$$\underline{Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes.}$$

b)

El punto de corte de la recta y el plano es la solución del sistema que forman; resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -5 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-1-1-10}{6} = \frac{-12}{6} = -2.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\2 & -5 & 0\\1 & -1 & 1\end{vmatrix}}{6}=\frac{-5+2-5+2}{6}=\frac{-6}{6}=-1.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\2 & 1 & -5\\1 & 0 & -1\end{vmatrix}}{6}=\frac{-1+10+1-4}{6}=\frac{6}{6}=1.$$

$$\underline{Punto\ de\ corte: P(-2,-1,1)}.$$

Teniendo en cuenta que el vector director de la recta $\overrightarrow{v_r}=(-1,2,1)$ y el vector normal del plano $\vec{n}=(1,-2,-1)$ son linealmente dependiente indica que la recta el perpendicular al plano, por lo tanto:

$$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ forman\ un\ ángulo\ de\ 90°}.$$

****

4º) (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al 4º decimal).

La probabilidad de que una flecha dé en la diana es 0,40. Si se lanzan 9 flechas, determine:

a) Qué tipo de distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de flechas que dan en la diana.

b) Cuál es la media y la desviación típica de esa distribución.

c) Cuál es la probabilidad de que al menos 5 flechas den en la diana.

----

a)

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$$\underline{p = 0{,}4;\ \ q = 0{,}6;\ \ n = 9\ \Rightarrow X \sim B(9; 0{,}4).}$$

b)

$$\mu = n \cdot p = 9 \cdot 0{,}4 = \underline{3{,}6}.$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{9 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} = \sqrt{2{,}16} \cong \underline{1{,}4697}.$$

c)

La fórmula de la probabilidad de que de n elementos r sean favorables es la siguiente: $P = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$.

$$P = \binom{9}{5} \cdot 0{,}4^5 \cdot 0{,}6^4 + \binom{9}{6} \cdot 0{,}4^6 \cdot 0{,}6^3 + \binom{9}{7} \cdot 0{,}4^7 \cdot 0{,}6^2 +$$

$$+ \binom{9}{8} \cdot 0{,}4^8 \cdot 0{,}6^1 + \binom{9}{9} \cdot 0{,}4^9 \cdot 0{,}6^0 =$$

$$= \frac{9!}{4! \cdot 5!} \cdot 0{,}0102 \cdot 0{,}1296 + \frac{9!}{3! \cdot 6!} \cdot 0{,}0041 \cdot 0{,}216 + \frac{9!}{2! \cdot 7!} \cdot 0{,}0016 \cdot 0{,}36 +$$

$$+9 \cdot 0{,}0007 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}0003 \cdot 1 =$$

$$= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 0{,}001327 + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} \cdot 0{,}000885 + \frac{9 \cdot 8}{2} \cdot 0{,}000590 + 0{,}00393 + 0{,}000262 =$$

$$= 126 \cdot 0{,}001327 + 84 \cdot 0{,}000885 + 36 \cdot 0{,}000590 + 0{,}003539 + 0{,}000262 =$$

$$= 0{,}167202 + 0{,}074340 + 0{,}021240 + 0{,}003801 = 0{,}266583 \cong \underline{0{,}2666}.$$

Este apartado también puede hacerse con cierta aproximación transformando la distribución binomial en una distribución normal.

$X = B(9;\ 0{,}4) \approx N(3{,}6;\ 1{,}47)$.

Tipificando la variable: $X \rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-3{,}6}{1{,}47}$.

Considerando la corrección de Yates:

$P(X \geq 5) = P(X > 4{,}5) = P\left(Z > \frac{4{,}5-3{,}6}{1{,}47}\right) = P\left(Z > \frac{0{,}9}{1{,}47}\right) = P(Z > 0{,}61) =$

$= 1 - P(Z < 0{,}61) = 1 - 0{,}7291 = \underline{0{,}2709}$.

****

OPCIÓN B

1º) Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determine para qué valores de a la matriz A tiene inversa.

b) Para $a = 1$, calcule la inversa de A.

c) Para $a = 1$, resuelva la ecuación matricial $XA + 2I = 2A$, donde I es la matriz identidad 3×3.

----

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + a^2 - a = a^2 - a - 1 = 0; \quad a = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} =$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall \in R - \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}}.$$

b)

Para $a = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

La inversa de A se obtiene por la adjunta de la traspuesta: $A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 - 1 = -1. \qquad A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{-1} \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$c)$

$$XA + 2I = 2A;\ \ XA = 2A - 2I = 2 \cdot (A - I);\ \ XA \cdot A^{-1} = 2 \cdot (A - I) \cdot A^{-1};$$

$X \cdot I = 2 \cdot (A - I) \cdot A^{-1} \Rightarrow \underline{X = 2 \cdot (A - I) \cdot A^{-1}}.$

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$X = 2 \cdot (A - I) \cdot A^{-1} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) $a)$ Calcule la integral indefinida $I=\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\cdot dx$.

$b)$ Determine la primitiva de $\frac{\sqrt{x}}{1+x}$ que pasa por el punto $P(1,2)$.

$c)$ Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x}$.

$a)$

$$I=\int\frac{\sqrt{x}}{1+x}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c}\sqrt{x}=t\to x=t^2\\ dx=2t\cdot dt\end{array}\right\} \Rightarrow \int\frac{t}{1+t^2}\cdot 2t\cdot dt=2\cdot\int\frac{t^2}{t^2+1}\cdot dt=$$

$$=2\cdot\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}\cdot dt=2\cdot\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)\cdot dt=2\cdot(t-arc\ tag\ t)+C.$$

$$\underline{I=\int\frac{\sqrt{x}}{1+x}\cdot dx=2\cdot\left(\sqrt{x}-arc\ tag\ \sqrt{x}\right)+C.}$$

$b)$

Del apartado anterior se deduce que:

Si $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1+x}\Rightarrow F(x)=2\cdot\left(\sqrt{x}-arc\ tag\ \sqrt{x}\right)+C$.

Por pasar por $P(1,2)$ es $F(1)=2$:

$$F(1)=2\Rightarrow 2\cdot\left(\sqrt{1}-arc\ tag\ \sqrt{1}\right)+C=2\cdot(1-arc\ tag\ 1)+C=$$

$$=2\cdot\left(1-\frac{\pi}{4}\right)+C=2-\frac{\pi}{2}+C=2\Rightarrow C=\frac{\pi}{2}.$$

$$\underline{F(x)=2\cdot\left(\sqrt{x}-arc\ tag\ \sqrt{x}\right)+\frac{\pi}{2}.}$$

$c)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x}=0$, por ser mayor el grado del denominador.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Indet\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{x}}{x}}{\frac{1+x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}+1}=\frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}+1}=\frac{0}{0+1}=0.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Indet\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\infty}=0.$$

$$\underline{\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x}=0.}$$

****

3º) Los puntos$A(0,-1,1)\ y\ B(1,1,1)$ son dos de los vértices de un triángulo. El tercer vértice C está contenido en la recta r que pasa por el punto B y es perpendicular al plano $\pi \equiv 2x-y+z=1$.

$a)$ Calcule la ecuación de la recta r que pasa por B y es perpendicular al plano π.

$b)$ Calcule las coordenadas del vértice C sabiendo que el área del triángulo es $3\sqrt{30}$.

$a)$

Un vector normal del plano $\pi \equiv 2x-y+z=1$ es $\vec{n}=(2,-1,1)$.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es $\underline{r \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}}$.

$b)$

La expresión genérica de $C \in r$ es $C(1+2\lambda, 1-\lambda, 1+\lambda)$.

Los puntos A, B y C determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=[(0,-1,1)-(1,1,1)]=(-1,-2,0)$.

$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=[(0,-1,1)-(1+2\lambda, 1-\lambda, 1+\lambda)]=$

$=(-1-2\lambda, -2+\lambda, -\lambda)$.

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{CA}\right|=3\sqrt{30};\ \frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ -1 & -2 & 0 \\ -1-2\lambda & -2+\lambda & -\lambda \end{matrix}\right\|=3\sqrt{30};$$

$=|2\lambda i+(2-\lambda)k+(-2-4\lambda)k-\lambda j|=|2\lambda i-\lambda j-5\lambda k|=\lambda\cdot|2i-j-5k|=$

$=\lambda\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+(-5)^2}=\lambda\cdot\sqrt{4+1+25}=\lambda\sqrt{30}=6\sqrt{30} \Rightarrow \lambda=6$.

$C(1+2\cdot 6, 1-6, 1+6) \Rightarrow \underline{C(13,-5,7)}$.

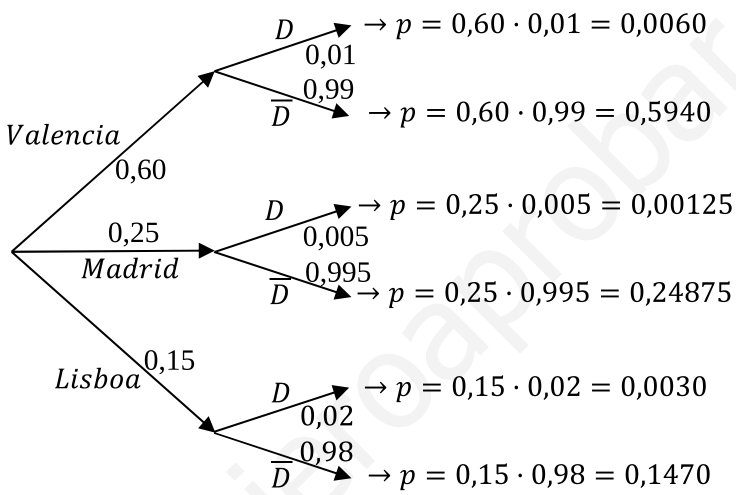
****

4º) (En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al 4º decimal).

El 60 % de los coches de una marca se fabrican en su factoría de Valencia, el 25 % en Madrid, y el resto en Lisboa. El 1 % de los coches fabricados en Valencia tiene algún defecto de fabricación, mientras que para los coches fabricados en Madrid y en Lisboa estos porcentajes son del 0,5 % y del 2 %, respectivamente.

a) Elegido al azar un coche de esa marca, calcule la probabilidad de que no sea defectuoso.

b) Si un coche de esa marca resulta ser defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en Madrid?



a)

$$P = P(\overline{D}) = P(V \cap \overline{D}) + P(M \cap \overline{D}) + P(L \cap \overline{D}) =$$

$$= P(V) \cdot P(\overline{D}/V) + P(M) \cdot P(\overline{D}/M) + P(L) \cdot P(\overline{D}/L) =$$

$$= 0,60 \cdot 0,99 + 0,25 \cdot 0,995 + 0,15 \cdot 0,98 = 0,5940 + 0,24875 + 0,1470 =$$

$$= \underline{0,9898}.$$

b)

$$P = P(M/D) = \frac{P(M \cap D)}{P(D)} = \frac{P(M) \cdot P(D/M)}{1 - P(\overline{D})} = \frac{0,25 \cdot 0,005}{1 - 0,98975} = \frac{0,00125}{0,01025} = \underline{0,1220}.$$

****