PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

SEPTIEMBRE – 2020

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1º) Considere el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-ay+a^2z=-1 \\ -ax+a^2y-a^3z=2 \end{cases}$ en función del parámetro a.

a) Compruebe que el sistema nunca tiene solución única.

b) Determine para qué valores de a el sistema tiene infinitas soluciones.

c) Si es posible, resuélvalo para el valor de $a=2$.

----

a)

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema tiene solución única cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales e igual al número de incógnitas, que en este caso es tres.

La matriz de coeficientes es $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & a^2 \\ -a & a^2 & -a^3 \end{pmatrix}$, cuyo rango es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & a^2 \\ -a & a^2 & -a^3 \end{vmatrix}=a^4+a^2-a^3-a^2-a^4+a^3=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow Rang\ M<3, \forall a \in R.$ El sistema no puede ser compatible determinado.

$\underline{Queda\ comprobado\ que\ el\ sistema\ nunca\ tiene\ solución\ única.}$

$b)$

La matriz ampliada es $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -a & a^2 & -1 \\ -a & a^2 & -a^3 & 2 \end{pmatrix}$, cuyo rango, en función del valor de a, es el siguiente:

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -a & a^2 & -1 \\ -a & a^2 & -a^3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -a & -1 \\ -a & a^2 & 2 \end{vmatrix} = -2a + 2a^2 + a - 2a^2 + a^2 - 2 = a^2 - a - 2 = 0;$$

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow a_1 = -1, a_2 = 2.$$

$$Para \begin{Bmatrix} a = -1 \\ a = 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.$$

$\underline{El\ sistema\ tiene\ infinitas\ soluciones\ para\ a = -1\ y\ para\ a = 2.}$

$c)$

Para $a = 2$ el sistema resulta $\left.\begin{matrix} x + y + z = 2 \\ x - 2y + 4z = -1 \\ -2x + 4y - 8z = 2 \end{matrix}\right\}$, equivalente al sistema $\left.\begin{matrix} x + y + z = 2 \\ x - 2y + 4z = -1 \end{matrix}\right\}$, que es compatible indeterminado. Haciendo $z = \lambda$:

$$\left.\begin{matrix} x + y = 2 - \lambda \\ x - 2y = -1 - 4\lambda \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x + y = 2 - \lambda \\ -x + 2y = 1 + 4\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3y = 3 + 3\lambda;\ \ y = 1 + \lambda.$$

$$x + y = 2 - \lambda;\ \ x = 2 - \lambda - 1 - \lambda \Rightarrow x = 1 - 2\lambda.$$

$\underline{Solución: x = 1 - 2\lambda;\ \ y = 1 + \lambda;\ \ z = \lambda,\ \forall \lambda \in R.}$

****

2º) Considere la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

$a)$ Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3, A^4, A^5 y A^6

$b)$ Calcule $A^{2.020}$.

$c)$ Compruebe que la matriz A es regular (o invertible) y calcule su inversa.

$a)$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}}.$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-I}.$$

$$A^4=A^3\cdot A=-I\cdot A=\underline{\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}}.$$

$$A^5=A^4\cdot A=-A\cdot A=-A^2=\underline{\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}}.$$

$$A^6=A^3\cdot A^3=-I\cdot(-I)=I^2=\underline{I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}.$$

$b)$

$$A^{2.020}=A^{6\cdot 336+4}=A^{6\cdot 336}\cdot A^4=[A^6]^{336}\cdot A^4=I^{336}\cdot A^4=I\cdot A^4=A^4.$$

$$\underline{A^{2.020}=A^4=-A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}}.$$

$c)$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-2+3=1\neq 0\Rightarrow \underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible}.$$

$$A^t=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix};\ \ Adj.de\ A^t=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}=\frac{Adj.de\ A^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}}{1}\Rightarrow \underline{A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}}.$$

****

3º) Calcule los siguientes límites:

$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{L(3+x)-L(3-x)}{2x}.$ $\qquad$ $b)\ \lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right).$

$a)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{L(3+x)-L(3-x)}{2x}=\frac{L3-L3}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow \{L'Hopital\}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3+x}-\frac{-1}{3-x}}{2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3+x}+\frac{1}{3-x}}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3-x+3+x}{9-x^2}}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{6}{2(9-x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{9-x^2}=\frac{3}{9-0^2}=\frac{1}{3}.$$

$$\underline{\lim_{x\to 0}\frac{L(3+x)-L(3-x)}{2x}=\frac{1}{3}.}$$

$b)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right)=\infty-\infty\Rightarrow Indet.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x+2}\right)^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x+1-(x+2)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{x+1-x-2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}=\frac{-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}=\frac{-1}{\infty+\infty}=\frac{-1}{\infty}=0.$$

$$\underline{\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right)=0.}$$

****

4º) a) Calcule la integral indefinida: $I = \int L(1+x^2) \cdot dx$.

b) Calcule la integral definida: $I = \int_0^1 L(1+x^2) \cdot dx$.

----

a)

$$I = \int L\,(1+x^2) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = L(1+x^2) \rightarrow du = \frac{2x \cdot dx}{1+x^2} \\ dx = dv \rightarrow v = x \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot L(1+x^2) - \int x \cdot \frac{2x \cdot dx}{1+x^2} = x \cdot L(1+x^2) - 2\int \frac{x^2}{1+x^2} \cdot dx =$$

$$= x \cdot L(1+x^2) - 2\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} \cdot dx = x \cdot L(1+x^2) - 2\int \frac{1+x^2}{1+x^2} \cdot dx + 2\int \frac{1}{1+x^2} dx.$$

$$\underline{I = \int L\,(1+x^2) \cdot dx = x \cdot L(1+x^2) - 2x + 2 \cdot arc\ tg\ x + C.}$$

b)

$$I = \int_0^1 L(1+x^2) \cdot dx = \left[x \cdot L(1+x^2) - 2x + 2 \cdot arc\ tg\ x\right]_0^1 =$$

$$= \left[1 \cdot L(1+1^2) - 2 \cdot 1 + 2 \cdot arc\ tg\ 1\right] - \left[0 \cdot L(1+0^2) - 0 + 2 \cdot arc\ tg\ 0\right] =$$

$$= L2 - 2 + 2 \cdot \frac{\pi}{4} - 0 = L2 - 2 + \frac{\pi}{2}.$$

$$\underline{I = \int_0^1 L(1+x^2) \cdot dx = L2 - 2 + \frac{\pi}{2}.}$$

****

5º) Considere los puntos $P(5,6,1)$ y $Q(-3,-2,5)$ y la recta $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{4}$.

a) Determine el punto R de la recta r para el cuál el área del triángulo PQR tiene el valor de $18\sqrt{2}$ unidades cuadradas.
Observación: Hay dos puntos R que son solución del apartado a); basta con encontrar uno de ellos.

b) Calcule la ecuación de la recta s que pasa por los puntos P y Q y comprueba que dicha recta corta perpendicularmente a la recta r.

----

a)

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + 4\lambda \end{cases}$.

Un punto genérico de r es $R(\lambda, 1+\lambda, -1+4\lambda)$.

Los puntos P, Q y R determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = [(5,6,1) - (-3,-2,5)] = (8,8,-4)$.

$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} = [(\lambda, 1+\lambda, -1+4\lambda) - (-3,-2,5)] = (3+\lambda, 3+\lambda, -6+4\lambda)$.

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan:

$$S_{PQR} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 8 & 8 & -4 \\ 3+\lambda & 3+\lambda & -6+4\lambda \end{vmatrix} \right\| = 18\sqrt{2};$$

$$\left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & -1 \\ 3+\lambda & 3+\lambda & -6+4\lambda \end{vmatrix} \right\| = 9\sqrt{2};$$

$= |(-12+8\lambda)i - (3+\lambda)j + (6+2\lambda)k - (6+2\lambda)k + (3+\lambda)i + (12-8\lambda)j| =$

$= |(-9+9\lambda)i + (9-9\lambda)j| = 9 \cdot |(-1+\lambda)i + (1-\lambda)j| = 9\sqrt{2};$

$|(-1+\lambda)i + (1-\lambda)j| = \sqrt{2};\ \ \sqrt{(-1+\lambda)^2 + (1-\lambda)^2} = \sqrt{2};$

$1 - 2\lambda + \lambda^2 + 1 - 2\lambda + \lambda^2 = 2;\ \ 2\lambda^2 - 4\lambda = 0;\ \ \lambda^2 - 2\lambda = 0;\ \ \lambda(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2.$ Cumplen la condición pedida los siguientes puntos:

$\underline{R_1(0,1,-1)\ y\ R_2(2,3,7).}$

$b)$

$$\overrightarrow{QP} = (8, 8, -4) \Rightarrow \overrightarrow{v_s} = (2, 2, -1).$$

Considerando, por ejemplo, el punto $Q(-3, -2, 5)$, la expresión de la recta s dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$\underline{s \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-5}{-1}}.$$

Dos rectas son perpendiculares cuando lo son sus vectores directores.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero.

$\overrightarrow{v_r} = (1, 1, 4).$

$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = (1, 1, 4) \cdot (2, 2, -1) = 2 + 2 - 4 = 0.$

Las rectas $r\ y\ s$ son perpendiculares.

Para verificar que las rectas se cortan consideramos, por ejemplo, el vector $\overrightarrow{QR_1}$, que tiene origen en un punto de s y extremo en un punto de r:

$\overrightarrow{QR_1} = \overrightarrow{OR_1} - \overrightarrow{OQ} = [(0, 1, -1) - (-3, -2, 5)] = (3, 3, -6).$

Para que $r\ y\ s$ se corten es necesario que los vectores $\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}\ y\ \overrightarrow{QR_1}$ sean linealmente dependiente (estén en un mismo plano), para lo cual es necesario que se anule el determinante que forman:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 24 - 3 - 24 + 3 + 12 = 0.$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cortan\ y\ son\ perpendiculares.}$$

****

6º) Considere las rectas $r \equiv \begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ y - 5z = 3 \end{cases}$ $y\ s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{0}$.

a) Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) En caso de que las rectas se corten, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso de que las rectas se crucen, determine el plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s.

----

a)

La expresión de la recta r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ y - 5z = 3 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda;\ \ y = 3 + 5\lambda. \qquad\qquad 5x + 3y = 19;$$

$$5x + 9 + 15\lambda = 19;\ \ 5x = 10 - 15\lambda;\ \ x = 2 - 3\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda. \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un punto y un vector director de la recta r son $A(2, 3, 0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (-3, 5, 1)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(1, 0, 5)$ y $\overrightarrow{v_s} = (-1, 1, 0)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(1, 0, 5) - (2, 3, 0)] = (-1, -3, 5)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -15 + 3 + 1 + 25 = 14 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} = 3\ \Rightarrow\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\ no\ son\ coplanarios.$$

$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan.}$$

b)

El plano π que contiene a r y es paralelo a s tiene la siguiente expresión general:

$$\pi(A;\ \overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ -(y-3)-3z+5z-(x-2)=0;$$

$-y+3+2z-x+2=0.$

$$\underline{\pi \equiv x+y-2z-5=0.}$$

****

7º) El peso de los recién nacidos, medido en kg, sigue una distribución normal de media $\mu = 2{,}8$ kg y desviación típica σ. Se sabe que solo el 20,05 % de ellos pesa más de 3 kg.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido mese más de 2,6 kg?

b) Calcule la desviación típica de esta distribución normal.

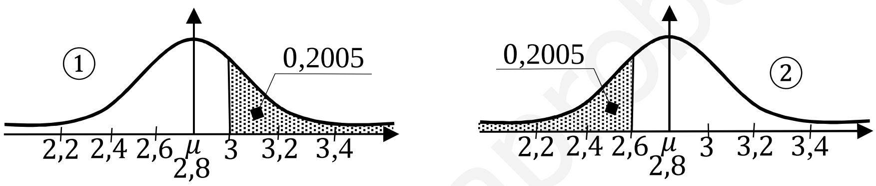
c) ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese menos de 2,9 kg?
Importante: Trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal.

----

a)

$Datos$: $\mu = 2{,}8$; $P = P(X > 3) = 0{,}2005$.

El gráfico adjunto facilita la comprensión del aparado.



La gráfica de la Normal es simétrica con respecto a la media μ, por lo cual las superficies sombreadas de las figuras ① y ② son iguales.

La gráfica de la Normal expresa la probabilidad $F(a) = P(Z \leq a)$, por lo cual:

$$P = P(X > 3) = 1 - P(X \leq 2{,}6) = 1 - 0{,}2005 = \underline{0{,}7995}.$$

b)

$X \rightarrow N(\mu;\ \sigma) = N(2{,}8;\ \sigma)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-2{,}8}{\sigma}$.

$$P = P(X > 3) = P\left(Z > \frac{3-2{,}8}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{0{,}2}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{0{,}2}{\sigma}\right) = 0{,}2005;$$

$$P\left(Z \leq \frac{0{,}2}{\sigma}\right) = 1 - 0{,}2005 = 0{,}7995.$$

Mirando de forma inversa en la tabla $N(0{,}1)$ a 0,7995 le corresponde 0,84:

$$\frac{0{,}2}{\sigma} = 0{,}84\ \Rightarrow\ \sigma = \frac{0{,}2}{0{,}84} = \underline{0{,}24}.$$

c)

$$P = P(X \leq 2{,}9) = P\left(Z \leq \frac{2{,}9-2{,}8}{0{,}24}\right) = P\left(Z \leq \frac{0{,}1}{0{,}24}\right) = P(Z \leq 0{,}42) = \underline{0{,}6628}.$$

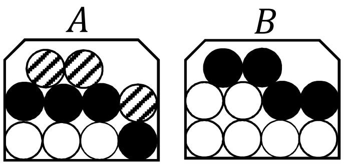
****

8º) Dos urnas A y B contienen bolas con la siguiente composición: La urna A contiene 3 bolas blancas, 4 negras y 3 rayadas, la urna B contiene 6 bolas blancas y 4 bolas negras. Además, se tiene un dado que tiene 2 caras marcadas con la letra A y 4 caras marcadas con la letra B. Se lanza el dado y se saca una bola al azar de la urna que indique el dado.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea blanca?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea rayada?

c) Si la bola extraída es blanca, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?



a)

$$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3};\;\; P(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

$$P=P(Bl)=P(A\to Bl)+P(B\to Bl)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10}+\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{10}=\frac{1}{10}+\frac{2}{5}=\frac{1+4}{10}=$$

$$=\frac{5}{10}=\underline{\frac{1}{2}=0{,}5}.$$

b)

$$P=P(A\to Ra)+P(B\to Ra)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10}+\frac{2}{3}\cdot\frac{0}{10}=\frac{1}{10}+0=\underline{\frac{1}{10}=0{,}1}.$$

c)

$$P(B/Bl)=\frac{P(Bl\cap B)}{P(Bl)}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{10}}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}}=\underline{\frac{4}{5}=0{,}8}.$$

****