PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

JUNIO – 2021

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con tres ejercicios. En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a dos de un bloque y a uno de cada bloque restante. Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuesta a qué cuatro ejercicios se responden en el examen. Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas. Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.

Bloque 1. Álgebra y programación lineal.

1º) Discute el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+ay=1 \\ 2x-ay+2az=5 \\ x+3y-z=0 \end{cases}$, en función del parámetro a. Resuelve el sistema si $a=1$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & -a & 2a \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 2 & -a & 2a & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & -a & 2a \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=a+2a^2-6a+2a=0;\ \ 2a^2-3a=0;$$

$a(2a-3)=0 \Rightarrow a_1=0, a_2=\frac{3}{2}$.

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix} a\neq 0 \\ a\neq 3/2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{o}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2=-3C_3\} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 - 15 = -12 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ a = 0 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$Para\ a = \frac{3}{2} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 2 & -\frac{3}{2} & 3 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. A efectos de rango la matriz M' es equivalente a la matriz $M'' = 2 \cdot M' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 6 & 10 \\ 2 & 6 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

$$Rang\ M'' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 6 & 10 \\ 2 & 6 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{F_3 \rightarrow \frac{1}{2}F_3\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 6 & 10 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 6 & 10 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 - F_2 - 4F_1 \\ F_3 - F_3 - 2F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -15 & 10 & 10 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_2 \rightarrow \frac{1}{5}F_3\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 = F_3\} \Rightarrow Rang\ M'' = Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ a = \frac{3}{2} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Para $a = 1$; el sistema resulta $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y + 2z = 5 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1} = \frac{1 - 6 + 5}{-1} = \frac{0}{-1} = 0. \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-5 + 2 + 2}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{6 + 5 + 1 - 15}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3.$$

$$\underline{Solución: x = 0;\ \ y = 1;\ \ z = 3.}$$

****

2º) Consideramos la ecuación matricial: $X^2 - X = 2I$, donde I es la matriz identidad.

a) ¿Qué matrices de la forma $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ cumplen la ecuación?

b) ¿Se puede expresar en general la diferencia $X^2 - X$ como producto de matrices?

c) Si X es una matriz cuadrada de orden n que cumple la ecuación, ¿cuál es su rango?

----

a)

$$X^2 - X = 2I \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2I;$$

$$\begin{pmatrix} a^2 & ab - b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2I; \ \begin{pmatrix} a^2 - a & ab - 2b \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a^2 - a = 2 \\ ab - 2b = 0 \end{matrix}\right\};$$

$$\left.\begin{matrix} a(a-1) = 2 \\ b(a-2) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = 2 \ y \ \forall b \in R.$$

$$\underline{Cumplen\ la\ ecuación\ las\ matrices\ de\ la\ forma\ X = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \forall b \in R.}$$

b)

$$X^2 - X = 2I; \ \ X \cdot (X - I) = 2I.$$

$$\underline{Puede\ hacerse, siempre\ que\ las\ matrices\ X\ sean\ X = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \forall b \in R.}$$

c)

$$X^2 - X = 2I; \ \ X \cdot (X - I) = 2I; \ \ \frac{1}{2} \cdot X \cdot (X - I) = I; \ \ X \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (X - I)\right] = I \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot (X - I) = X^{-1}$. Como existe la inversa de X es, necesariamente, $|X| \neq 0$, por lo cual, su rango coincide con la dimensión de la matriz X.

$$\underline{Rang\ X = n.}$$

****

3º) En el proceso de fabricación de cierta pintura se mezcla una cantidad (x) de polvo sintético con una cantidad (y) de polvo de un mineral. Se imponen las siguientes restricciones:

$x + 2y \leq 6 \Rightarrow$ (para no rebasar un nivel de toxicidad en el proceso).

$5x + 4y \leq 20 \Rightarrow$ (para mantener la gama de color adecuada).

$y \leq x \Rightarrow$ (para que la viscosidad no sea excesiva).

$a)$ Dibuja en el plano la región factible de cantidades x e y que cumplen las restricciones.

$b)$ ¿Cuál es la máxima cantidad de polvo de mineral que podemos usar?

$c)$ ¿Cuál es la cantidad máxima posible de polvo $(x + y)$ que permiten las restricciones y cuánto incluye de cada tipo?

$a)$

Las condiciones del ejercicio son: $\left.\begin{array}{r} x + 2y \leq 6 \\ 5x + 4y \leq 20 \\ y \leq x \\ x \geq 5;\ y \geq 0 \end{array}\right\}.$

① $\Rightarrow x + 2y \leq 6 \Rightarrow y \leq \frac{6-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	6
y	3	0

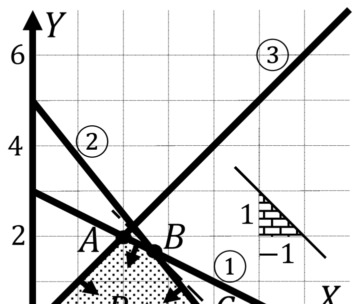
② $\Rightarrow 5x + 4y \leq 20 \Rightarrow y \leq \frac{20-5x}{4} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	4
y	5	0

③ $\Rightarrow y \geq x \Rightarrow P(2,0) \rightarrow Si.$

x	0	6
y	0	6

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.



Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = x \\ x + 2y = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x = 6;\ \ x = 2 \Rightarrow A(2,2).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y = 6 \\ 5x + 4y = 20 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -2x - 4y = -12 \\ 5x + 4y = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$3x = 8;\ \ x = \frac{8}{3};\ \ \frac{8}{3} + 2y = 6;\ \ 8 + 6y = 18;\ \ 3y = 5;\ \ y = \frac{5}{3} \Rightarrow B\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 5x + 4y = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow 5x = 20;\ \ x = 4 \Rightarrow C(4,0).$

$b)$

La función de objetivos: $f(x,y) = x + y.$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(2, 2) = 2 + 2 = 4.$

$B \Rightarrow f\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right) = \frac{8}{3} + \frac{5}{3} = \frac{13}{3} = 4{,}33.$

$C \Rightarrow f(4, 0) = 4 + 0 = 4.$

El valor máximo se produce en el punto $B\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = x + y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{1}x \Rightarrow m = -\frac{1}{1}.$

De la observación de la figura se deduce que el mayor valor de y (polvo de mineral) se produce en el punto $A(2, 2)$, por lo cual:

$\underline{La\ mayor\ cantidad\ de\ polvo\ de\ mineral\ que\ se\ puede\ usar\ es\ de\ 2\ unidades.}$

$c)$

$\underline{La\ mayor\ canatidad\ de\ polvo\ que\ se\ puede\ usar\ es\ de\ 13/3\ unidades.}$

$\underline{La\ proporción\ de\ polvos\ sintético\ y\ mineral\ usado\ es\ 8\ y\ 5, respectivamente.}$

****

Bloque 2. Análisis.

4º) Nos preguntamos por las propiedades de una función de la forma $f(x) = \frac{x(x+b)}{x^2-1}$.

$a)$ ¿Para qué valores de b su gráfica tiene una sola asíntota vertical?

$b)$ Estudia la existencia de extremos relativos de $f(x)$ si $b = -2$.

$a)$

Las propiedades generales de las funciones racionales son las siguientes:

1.--- Su dominio de definición son los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

2.--- Tiene asíntotas horizontales cuando el grado del denominador es mayor que el grado del numerador.

3.--- Tiene asíntotas oblicuas cuando el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador.

Las asíntotas verticales son los valores finitos de x que anulan el denominador.

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$

En principio, las rectas $x = -1$ y $x = 1$ serían asíntotas verticales, pero nos dicen que $f(x)$ debe tener una sola asíntota vertical, por lo cual tiene que poder simplificarse la función, de la forma siguiente:

$$f(x) = \frac{x(x+b)}{x^2-1} = \frac{x(x+b)}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow b = -1 \ o \ b$$

$$\underline{f(x) \ tiene \ una \ sola \ asíntota \ verticas \ para \ b = -1 \ o \ para \ b = 1.}$$

$b)$

Para $b = -2 \Rightarrow f(x) = \frac{x(x-2)}{x^2-1} = \frac{x^2-2x}{x^2-1}$.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x^2-1)-x(x-2)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3-2x-2x^2+2-2x^3+4x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^2-2x+2}{(x^2-1)^2} = \frac{2(x^2-x+1)}{(x^2-1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2(x^2-x+1)}{(x^2-1)^2} = 0; \ \ x^2 - x + 1 = 0; \ \ x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \Rightarrow x \notin R \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^2 - x + 1 > 0, \forall x \in R.$

$$\underline{Para\ b = -2\ la\ función\ f(x)\ no\ tiene\ extremos\ relativos.}$$

****

5º) Queremos definir una función por trozos, de forma que quede definida en el intervalo $[-2,2]$ según: $f(x)=\begin{cases} 3-2x & si\ \ x\in[-2,a) \\ x+4 & si\ \ x\in[a,b) \\ \frac{5}{x} & si\ \ x\in[b,2] \end{cases}$. Calcula los valores de $a\ y\ b$ necesarios para que f sea continua, y representa la función gráficamente.

La función $f(x)$ es continua en su dominio, excepto para $x=a\ y\ x=b$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de $a\ y\ b$ para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=a \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a}(3-2x)=3-2a \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a}(x+4)=a+4=f(a) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a) \Rightarrow 3-2a=a+4;\ \ 3a=-1 \Rightarrow a=-\frac{1}{3}.$$

$$Para\ x=b \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\lim\limits_{x\to b}(x+4)=b+4 \\ \lim\limits_{x\to b^+} f(x)=\lim\limits_{x\to b}\frac{5}{x}=\frac{5}{b}=f(b) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to b^-} f(x)=\lim_{x\to b^+} f(x)=f(b) \Rightarrow b+4=\frac{5}{b};\ \ b^2+4b-5=0;$$

$$b=\frac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{-4\pm 6}{2}=-2\pm 3 \Rightarrow b_1=-5\notin D(f)\ \Rightarrow b=1.$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ su\ dominio\ para\ a=-\frac{1}{3}\ y\ b=1.}$$

La función resulta $f(x)=\begin{cases} 3-2x & si\ \ x\in\left[-2,-\frac{1}{3}\right) \\ x+4 & si\ \ x\in\left[-\frac{1}{3},1\right) \\ \frac{5}{x} & si\ \ x\in[1,2] \end{cases}$.

Para la representación gráfica de la función se tiene en cuenta que en el intervalo $\left[-2,-\frac{1}{3}\right)$ la función es un segmento de extremos $A\ y\ B$, siendo:

$$A \Rightarrow f(-2)=3-2\cdot(-2)=3+4=7 \Rightarrow A(-2,7).$$

$$B \Rightarrow f\left(-\frac{1}{3}\right)=3-2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=3+\frac{2}{3}=\frac{11}{3} \Rightarrow B\left(-\frac{1}{3},\frac{11}{3}\right).$$

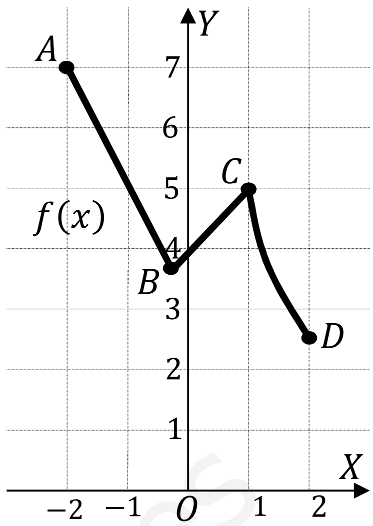
En el intervalo $\left[-\frac{1}{3}, 1\right)$ la función es un segmento de extremos $B\ y\ C$, siendo:

$C \Rightarrow f(1) = 1 + 4 = 5 \Rightarrow C(1, 5).$

En el intervalo $[1, 2]$ la función es una rama hiperbólica de extremos los puntos C y D, siendo:

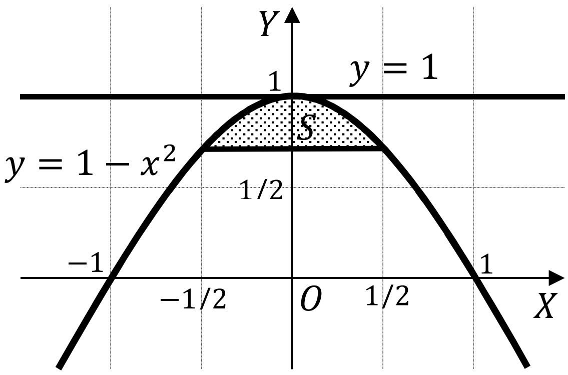
$D \Rightarrow f(2) = \frac{5}{2} \Rightarrow D\left(2, \frac{5}{2}\right).$

La representación gráfica, aproximada, es la que indica la figura adjunta.



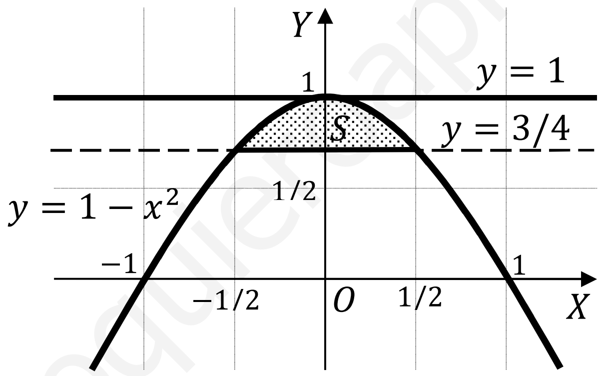
****

6º) Calcula el área de la región sombreada de la figura.



$$y\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}.$$

Considerando que la parábola $y = 1 - x^2$ es simétrica con respecto al eje de ordenadas por ser $y(-x) = y(x)$ y de la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:



$$S = 2 \cdot \int_0^{1/2} \left[(1 - x^2) - \tfrac{3}{4}\right] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^{1/2} \left(1 - x^2 - \tfrac{3}{4}\right) \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \int_0^{1/2} \left(\tfrac{1}{4} - x^2\right) \cdot dx = \left[\frac{x}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{1/2} = 2 \cdot \left[\frac{1/2}{4} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3}\right] - 2 \cdot 0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{3-1}{12} =$$

$$= \frac{2}{12} \Rightarrow \underline{S = \tfrac{1}{6}\ u^2 \cong 0{,}17\ u^2}.$$

****

Bloque 3. Estadística y probabilidad.

7º) Jorge y Laura juegan con dados. Los dados son equilibrados y, como es habitual, las caras están numeradas del 1 al 6. Jorge echa un dado, y a continuación Laura echa otro. Laura gana si la diferencia entre los dos resultados obtenidos es (en valor absoluto) mayor que 1.

a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar de Laura?

b) Si han jugado y ha ganado Laura, ¿cuál es la probabilidad de que Jorge haya sacado un 6?

----

a)

El espacio muestral es $E=\left\{\begin{matrix} 11, 12, \underline{13}, \underline{14}, \underline{15}, \underline{16} \\ 21, 22, 23, \underline{24}, \underline{25}, \underline{26} \\ \underline{31}, 32, 33, 34, \underline{35}, \underline{36} \\ \underline{41}, \underline{42}, 43, 44, 45, \underline{46} \\ \underline{51}, \underline{52}, \underline{53}, 54, 55, 56 \\ \underline{61}, \underline{62}, \underline{63}, \underline{64}, 65, 66 \end{matrix}\right\}$, donde aparecen subrayados los casos favorables a que gane Laura.

Aplicando el concepto básico de probabilidad, es decir, la regla de Laplace:

$$p=\frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}=\frac{20}{36} \Rightarrow \underline{p=\frac{5}{9}=0{,}5556.}$$

b)

Repitiendo el proceso seguido en el apartado anterior, se trata de aplicar la regla de Laplace de nuevo, donde los casos posibles son los 20 casos en que gana Laura y los casos favorables son los que la segunda cifra es un 6:

$$E=\left\{\begin{matrix} 11, 12, \underline{13}, \underline{14}, \underline{15}, \underline{16} \\ 21, 22, 23, \underline{24}, \underline{25}, \underline{26} \\ \underline{31}, 32, 33, 34, \underline{35}, \underline{36} \\ \underline{41}, \underline{42}, 43, 44, 45, \underline{46} \\ \underline{51}, \underline{52}, \underline{53}, 54, 55, 56 \\ \underline{61}, \underline{62}, \underline{63}, \underline{64}, 65, 66 \end{matrix}\right\}$$

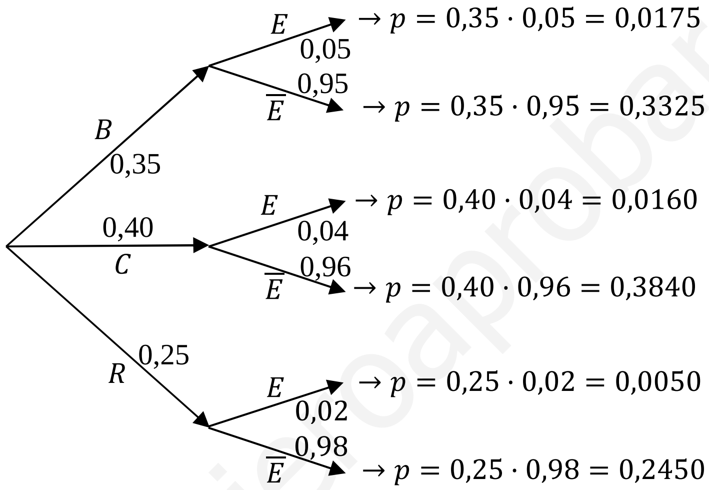
$$p=\frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}=\frac{4}{20} \Rightarrow \underline{p=\frac{1}{5}=0{,}2.}$$

****

8º) Una bodega de Rioja elabora vinos blancos, de crianza y reservas de gran calidad. Su producción consiste en un 35 % de vino blanco, un 40 % de vino de crianza y un 25 % de reservas. Aunque tiene mucho cuidado en la selección de los corchos, la probabilidad de que alguna botella se estropee por razón de un corcho inadecuado es del 5 % para el vino blanco, 4 % para el vino de crianza y 2 % para el vino de reserva.

a) Se elige una botella de la bodega al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el vino esté estropeado?

b) Hemos elegido una botella de vino tinto al azar (crianza o reserva), ¿cuál es la probabilidad de que el vino NO esté estropeado?



a)

$$P = P(E) = P(B \cap E) + P(C \cap E) + P(R \cap E) =$$

$$= P(B) \cdot P(E/B) + P(C) \cdot P(E/C) + P(R) \cdot P(E/R) =$$

$$= 0{,}35 \cdot 0{,}05 + 0{,}40 \cdot 0{,}04 + 0{,}25 \cdot 0{,}02 = 0{,}0175 + 0{,}0160 + 0{,}0050 =$$

$$= \underline{0{,}0385}.$$

b)

$$P = P\left(\overline{E}/C \cup R\right) = \frac{P\left[\overline{E} \cap (C \cap R)\right]}{P(C \cup R)} = \frac{P\left(C \cap \overline{E}\right) + P\left(R \cap \overline{E}\right)}{P(C \cup R)} = \frac{P(C) \cdot P\left(\overline{E}/C\right) + P(R) \cdot P\left(\overline{E}/R\right)}{P(C \cup R)} =$$

$$= \frac{0{,}40 \cdot 0{,}96 + 0{,}25 \cdot 0{,}98}{0{,}40 + 0{,}25} = \frac{0{,}3840 + 0{,}2450}{0{,}65} = \frac{0{,}6290}{0{,}65} = \underline{0{,}9677}.$$

****

9º) Una máquina produce bolas de billar, y sabemos que su peso sigue una distribución normal con una desviación típica de 20 gr.

a) Si el peso medio de las bolas fuese 165 gr, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de 100 bolas supere los 168 gr?

b) El promedio en una muestra de 100 bolas es de 165 gr. Determina un intervalo con el 90 % de confianza para la media del peso de las bolas que produce la máquina.

----

a)

$Datos$: $\mu = 165;\ \ n = 100 \Rightarrow \sigma = 20.$

$\overline{X} \to N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(165, \frac{20}{\sqrt{100}}\right) = N(165, 2).$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-165}{2}$.

$P = P(\overline{X} > 168) = P\left(Z > \frac{168-165}{2}\right) = P\left(Z > \frac{3}{2}\right) = P(Z > 1{,}5) =$

$= 1 - P(Z \leq 1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = \underline{0{,}0668}.$

b)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1 - \alpha = 0{,}95\ \rightarrow\ \alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05\ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$
$(1 - 0{,}025 = 0{,}9750\ \rightarrow z = 1{,}96).$

Datos: $n = 100;\ \ \overline{x} = 165;\ \sigma = 20;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(165 - 1{,}96 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}};\ 165 + 1{,}96 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}}\right);$

$(165 - 1{,}96 \cdot 2;\ 165 + 1{,}96 \cdot 2);\ \ (165 - 3{,}92;\ 165 + 3{,}92).$

$\underline{I.C._{95\ \%} = (161{,}08;\ \ 167{,}92)}.$

****